

システムと制御入門

2021 年度後期（システムと制御）

島根大学総合理工学部
機械・電気電子工学科

吉田和信

Copyright ©2021 Kazunobu Yoshida. All rights reserved.

目次

第 1 章 序章	1
1.1 動的システム	1
1.2 動的システムの制御	2
1.3 問題	6
第 2 章 静的システムのモデリング	7
2.1 歯車系	7
2.2 ばね系	9
2.3 回路系	12
2.4 スコッチヨークの機構	15
2.5 問題	16
第 3 章 1 次系のモデリング	17
3.1 水槽系	17
3.2 DC モータ系	18
3.3 熱系	19
3.4 RC 回路系	20
3.5 ダンパー系	21
3.6 流出孔のある水槽系	22
3.7 問題	23
第 4 章 2 次系のモデリング	25
4.1 慣性系	25
4.2 回転慣性系	25
4.3 1 自由度振動系	27
4.4 1 自由度振動系 (回転系)	28
4.5 RLC 回路系	28
4.6 問題	31
第 5 章 ラプラス変換	33
5.1 ラプラス変換の定義	33
5.2 推移定理	35
5.3 微分・積分	37
5.4 逆ラプラス変換	39
5.5 ラプラス変換による微分方程式の解法	43
5.6 問題	50

第 6 章	微分方程式と伝達関数	53
6.1	微分方程式の一般形	53
6.2	伝達関数の定義	54
6.3	系の結合と伝達関数	58
6.4	問題	60
第 7 章	ブロック線図と等価変換	63
7.1	ブロック線図の構成要素	63
7.2	等価変換	63
7.3	問題	71
第 8 章	ブロック線図のモデリングへの応用	73
8.1	インピーダンス法による回路系のモデリング	73
8.2	問題	76
第 9 章	安定性と安定判別法	81
9.1	安定性の定義	81
9.2	安定判別法	84
9.3	問題	88
第 10 章	フィードバック制御系の設計	89
10.1	回転系の角速度制御	89
10.2	粘性摩擦がある回転系の角速度制御	92
10.2.1	P 制御	92
10.2.2	PI 制御	94
10.3	粘性摩擦がある回転系の角度制御	96
10.4	問題	97
第 11 章	状態方程式とその解	99
11.1	伝達関数と状態方程式	99
11.2	初期状態の計算法	104
11.3	状態方程式の解	106
11.3.1	1 次系の解	106
11.3.2	2 次以上の系の解	107
11.4	状態方程式の離散化	109
11.5	結合系の状態方程式	114
11.6	問題	126
第 12 章	フィードバック制御系の設計例	129
12.1	台車系の位置制御	129
12.2	P 制御	129
12.3	PI 制御	135
12.4	IMC 制御	138

付録 A 問題の解答	141
A.1 第 1 章	141
A.2 第 2 章	141
A.3 第 3 章	142
A.4 第 4 章	143
A.5 第 5 章	146
A.6 第 6 章	152
A.7 第 7 章	154
A.8 第 8 章	156
A.9 第 9 章	158
A.10 第 10 章	159
A.11 第 11 章	161

第1章 序章

本章では，動的システムとその制御について説明する．すなわち，動的システムの定義を与え具体例を示す．また，水槽系の液面制御問題と慣性系の位置制御問題を紹介し，それぞれに対する制御系の設計を概観する．そして，一般的な制御系設計法の流れと各段階で行う仕事を説明し，本講義に対する動機付けとする．

1.1 動的システム

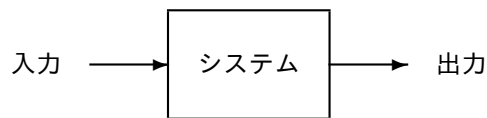


図 1.1: システム

制御工学でいうシステム（系）とは，入力と出力を持つものである（図 1.1）．したがって，システムと呼ぶ対象は多岐にわたっている．一つの質点でさえ力学系というクラスのシステムである（図 1.2．例えば，入力は質点に作用する力 u ，出力は質点の位置 (x, y) と考えられる）．システムには，静的システムと動的システムがある．静的システムとは，現在の出力が現在の入力のみに関するシステムであり，動的システムとは，現在の出力が現在および過去の入力に関するシステムである．制御工学の目的は，入力を制御して出力を所望の状態にすることである．静的システムでは，所望の出力を実現する入力をその出力から比較的容易に逆算できるが，動的システムでは，一般に，そのような入力を求めることは容易ではない．制御工学は動的システムの制御に関する学問である．

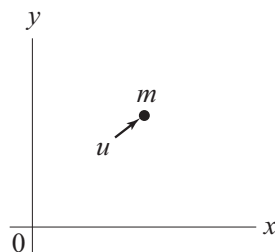


図 1.2: 質点系 (m は質点の質量， u は質点に作用する力)

1.2 動的システムの制御

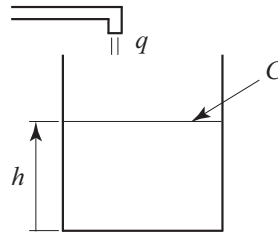


図 1.3: 水槽系

動的システムの例として、図 1.3 の水槽系を考えよう。 h は水位、 q は流入量、 C は水槽の断面積である。 q を入力、 h を出力とする。次の問題を考える。

「空の水槽がある。水位 h が目標の水位 r に一致するように流入量 q を制御せよ。」

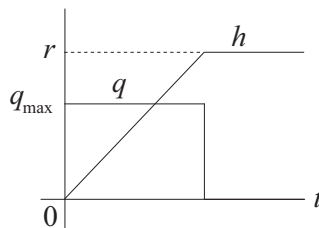


図 1.4: 流入量 q に制限がある場合の最短時間制御

まず、図 1.4 のような制御を行った。すなわち、制御開始時から $q = q_{max}$ で制御し、水位が目標値に達した瞬間に $q = 0$ とする制御である。これは、 $q \leq q_{max}$ という制限がある場合に、水位をもっとも早く目標値に制御する最短時間制御である。一般に、入力に制限がある場合の最短時間制御は、使用できる入力の上限值と下限値を切り換えるバンバン制御となる。水槽系の問題は常識的に最適解を求めることができる稀な例である。最短時間制御は目的が理解しやすく、ある意味で理想的な制御であるが、バンバン状に流入量を変えることが実際には困難なので、現実的な制御ではない。

次に、目標水位 r と現在の水位 h との差に係数を掛けたものを流入量とする制御、すなわち

$$q = k(r - h) \quad (1.1)$$

を適用した。この制御は、大きな偏差に対しては流入量を大きくし、偏差が小さくなるにしたがって流入量も小さくするという制御である。人が制御する場合、このような制御をしていると思われる。制御結果を図 1.5、図 1.6 に示す。係数 k を大きくすれば、流入量が大きくなり水位が早く目標値に近づくことがわかる。(1.1) 式は出力を入力に反映させるフィードバックの形になっている。実際、実用的な制御則のほとんどは何らかの形でフィードバックを含んでいる。

もう一つの例として、図 1.7 の慣性系を考える。 m は物体の質量、 x は基準位置 ($x = 0$) から測定した物体の変位、 u は物体に作用する力で x が増加する方向を正とする。問題は次

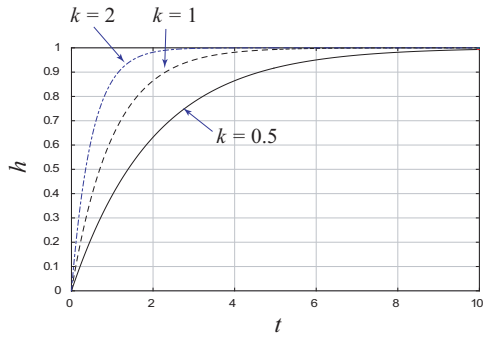


図 1.5: (1.1) 式の制御による水位 h の変化 ($C = 1, r = 1$)

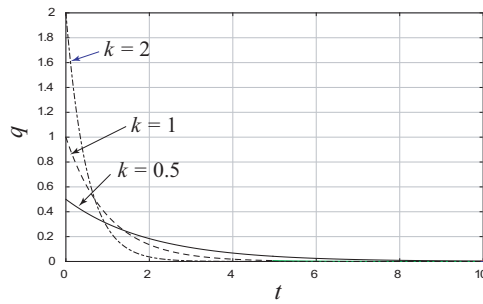


図 1.6: (1.1) 式の制御による流入量 q の変化 ($C = 1, r = 1$)

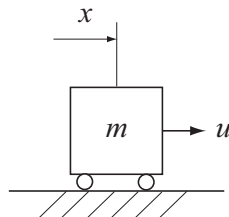


図 1.7: 慣性系

のようである。

「物体を初期位置 $x \neq 0$ から基準位置 $x = 0$ へ移動させてそこで止めるように制御せよ。」

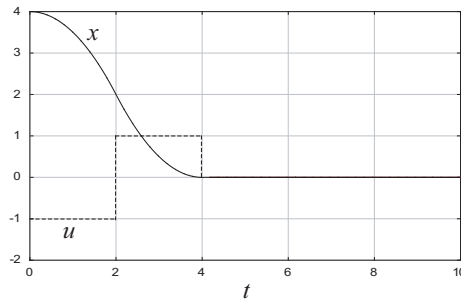


図 1.8: $|u| \leq 1$ という制限下での慣性系の最短時間制御 ($m = 1, x(0) = 4$)

図 1.8 に $|u| \leq 1$ という制限がある場合の最短時間制御を示す。この場合、最初の半区間で $u = -1$ の力を加え、残りの半区間で $u = 1$ とし、 $x = 0$ となった時点で $u = 0$ とおく。この場合、最適制御の形は x の中間点に対して対称となる。ただし、初速度がある場合このような対称性は崩れる。一般に、最適制御を求めるには、システムの運動を表す方程式と初期条件が必要となる。また、解析的に解が求まる場合は少なく、大抵の場合、計算機によって数値解を求めることになる。

目標値を r ($r = 0$) として水槽系と同様なフィードバック制御、すなわち

$$u = k_1(r - x) \quad (1.2)$$

を適用した。係数として $k_1 = 2, 4$ を与えた場合の制御結果を図 1.9 に示す。 x の応答は振動的になっている。物体の位置のみをフィードバックする (1.2) 式の制御則を適用した場合、 $k_1 > 0$ に対して減衰しない振動的な応答が得られる。 $k_1 = 0$ は、フィードバックがない状態で、物体は初期位置から動かない（ただし、初速度があれば等速運動する）。また、 $k_1 < 0$ では、物体の位置は $x = 0$ からさらに速ざかり応答は発散する（図 1.10）。

次に、速度 \dot{x} (\dot{x} は x の時間微分を表す) も測定可能として、 x と \dot{x} をフィードバックする制御

$$u = k_1(r - x) - k_2\dot{x} \quad (1.3)$$

を適用した。この場合の制御結果を図 1.11 に示す。 $k_1 = 2$ と固定し、 k_2 を変化させた場合、 $(k_1, k_2) = (2, 0.2)$ のとき減衰性が不足し、 $(k_1, k_2) = (2, 2)$ のとき適度な減衰性が得られ、 $(k_1, k_2) = (2, 4)$ のとき減衰性が過大となった。よって、適切に k_1 と k_2 を選べば、(1.3) 式の制御で良好な位置制御を行う制御系が構成できることがわかる。ちなみに、(1.3) 式によってフィードバック制御するとき、 $k_1 > 0, k_2 > 0$ のとき $x \rightarrow 0$ となり、係数に一つでも非正の係数があれば、 x は 0 に収束しない。

以上、二種類の動的システムに対する制御問題を考えた。制御工学の主要な目的は、できるだけ広いクラスの動的システムに対して、制御系を設計するための系統的手法を与えることである。ここで、制御すべき動的システム（制御対象）と制御問題が与えられてから制御系を構成するまでのステップと各ステップで行う仕事を整理しよう。

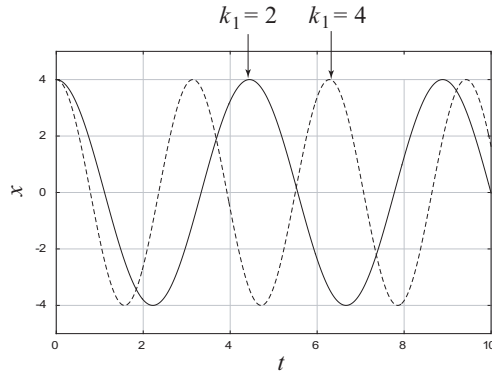


図 1.9: (1.2) 式の制御則による制御結果 ($m = 1, x(0) = 4, r = 0$)

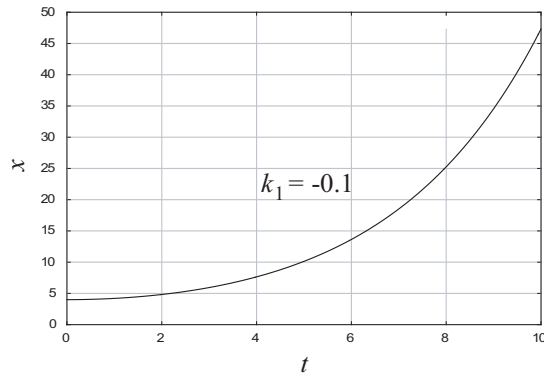


図 1.10: (1.2) 式の制御則による制御結果 ($m = 1, x(0) = 4, r = 0$)

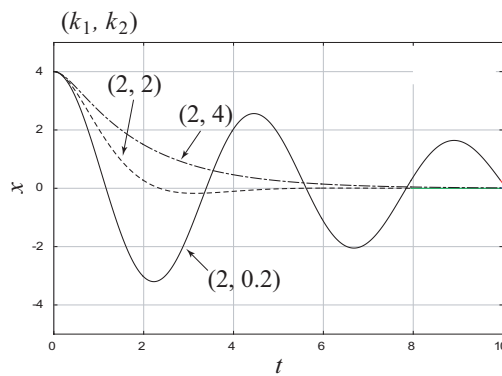


図 1.11: (1.3) 式の制御則による制御結果 ($m = 1, x(0) = 4, r = 0$)

1. 制御対象と制御問題が与えられる.
2. 設計仕様を決める.
3. 制御対象のモデリングを行う.
4. 数学モデルの特性を解析する.
5. 制御則を求める.
6. 制御系をシミュレーションする.
7. 満足のいくまで2から6を繰り返す.
8. 実際の制御系を構築する.
9. 制御系の調整を行う.

まず、制御対象と制御問題が与えられ、次に、設計仕様を定める。すなわち、どの程度の外乱（制御系の状態を乱す外的な作用。慣性系の場合、床面と物体との摩擦など）やノイズ（入力信号や出力信号に混入する雑音）を想定し、どの程度の精度で制御を行うかということを決める。制御対象のモデリングとは、制御対象の運動を支配する方程式（数学モデル）を求めることである。一般に、動的システムの運動を記述する方程式は微分方程式となる。モデリングでは、微分方程式の形（何階の微分方程式かなど）や式に含まれるパラメータを定める。次に、数学モデルの特性を解析し、適合する制御理論を用いて制御則を求め、さらに、制御系がうまく機能するかどうかを計算で確かめる。簡単な制御系の場合、手計算で出力を求めることができるが、多くの場合、計算機を用いて出力を求める。この模擬的な実験をシミュレーションという。1回で満足のいく制御系が設計できることは稀で、通常、2から6までのステップを満足のいく制御系が設計できるまで繰り返す。シミュレーションが成功すれば、実際の制御系を構築し、最終的な調整を行う。この段階で、制御系の性能が不十分であると判明すれば、数学モデルと実際の制御対象との違い（モデル誤差）、外乱、ノイズ、設計仕様の設定などに問題があると考えられるので、ステップをさかのぼって再設計しなければならない。

本講義では、動的システムのモデリング、特性解析、制御系設計およびシミュレーションに必要な基礎的事柄を学ぶ。

1.3 問題

1. 「フィードバック制御」の対義語として「フィードフォワード制御」がある。フィードフォワード制御について説明せよ。
2. 人が制御系の一部になっている例をいくつか挙げよ。(例：自動車を運転する.)

第2章 静的システムのモデリング

静的システムとは、現在の出力 $y(t)$ が現在の入力 $u(t)$ のみによって決まるシステムである。静的で線形なシステムでは、出力は入力に比例し、その数学モデルは

$$y = Ku$$

と表される。ここで、 K は定数である（本講義では、時不変系（数学モデルのパラメータが時間に依存しない系）を扱う）。入力と出力の間に比例関係がない（非線形な）システムもある。その場合の数学モデルは

$$y = f(u)$$

となる。ただし、 $f(u)$ は u の非線形関数である。このような場合でも、 u の範囲を限定すれば、線形システムとして近似できる場合がある。例えば、 $y = \sin u$ は、 $|u|$ が小さな範囲で $y \simeq u$ と近似できる（図 2.2）。本章では、静的システムの例として、歯車系、ばね系、回路系、リンク機構を紹介する。

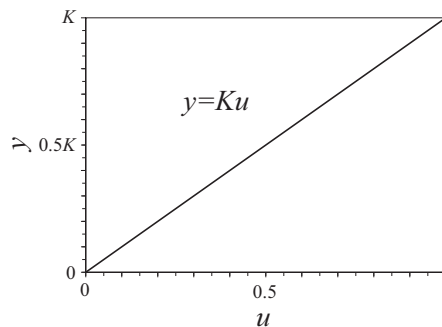


図 2.1: 線形な静的システムの入出力関係

2.1 歯車系

歯車系は回転角を増減する装置として利用される。実際の歯車系には、慣性モーメント、摩擦、バックラッシュ（がた）があり、静的で線形なシステムではないが、ここでは、これらを見捨てる。図 2.3 に示すように、軸受で支持された軸と歯車からなる歯車系を考える。 θ_1 , θ_2 は軸の回転角、 N_1 , N_2 は歯車の歯数である。 θ_1 を入力、 θ_2 を出力とすると、入出力間に次

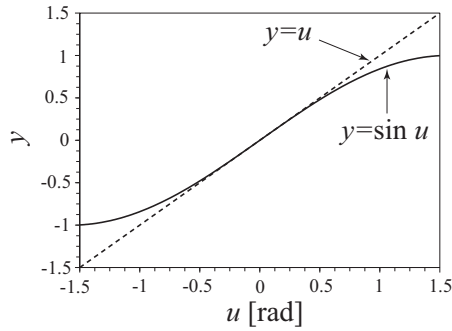


図 2.2: 非線形な静的システムの入出力関係

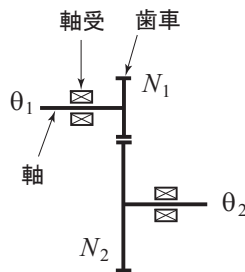


図 2.3: 歯車系

の比例関係が成立する¹.

$$\theta_2 = -\frac{N_1}{N_2}\theta_1 \quad (2.1)$$

負号は回転方向が逆になることを意味する. この場合, θ_2 を入力, θ_1 を出力と考えてもよい. 以後, 通常, 系の数学モデルを示すとき, 入力を右辺に, 出力を左辺に書く.

例題 2.1 図 2.4 の歯車系において, θ_1 を入力, θ_3 を出力とするとき, 系の数学モデルを求めよ.

[解] θ_1 と θ_2 の関係は

$$\theta_2 = -\frac{N_1}{N_2}\theta_1 \quad (2.2)$$

¹歯車 N_1 , N_2 のピッチ円 (基準円) 直径を d_1 , d_2 , 半径を r_1 , r_2 とする. かみ合う歯車のモジュール m は等しいので

$$m = \frac{d_1}{N_1} = \frac{d_2}{N_2} = \frac{2r_1}{N_1} = \frac{2r_2}{N_2}$$

よって

$$r_1 = \frac{mN_1}{2}, \quad r_2 = \frac{mN_2}{2} \quad (1)$$

また, 歯車が回転するとき, ピッチ円の円周上の移動距離が等しいことから

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \quad (2)$$

① 式を ② 式に代入すると $\theta_1 N_1 = \theta_2 N_2$ を得, 回転方向を考慮すると (2.1) 式となる.

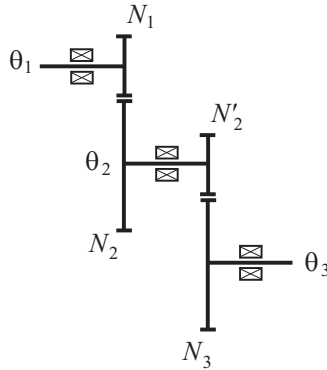


図 2.4: 歯車系

であり, θ_2 と θ_3 の関係は

$$\theta_3 = -\frac{N'_2}{N_3}\theta_2 \quad (2.3)$$

である. (2.2) 式を (2.3) 式に代入すると

$$\theta_3 = \frac{N'_2 N_1}{N_3 N_2}\theta_1$$

を得る.

2.2 ばね系

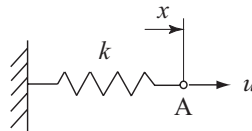


図 2.5: ばね系

ばねは振動系などの力学系における基本的な構成要素である. フックの法則「変位と復元力は比例する。」が成り立つばねを線形ばねという. 本講義で扱うばねはすべて線形ばねである. 図 2.5 のばね系において, 力 u [N] と変位 x [m] との関係を求めよう.

力の方向について, x が増加する方向を正とすると, A 点における力のつりあい式は

$$u - kx = 0 \quad (2.4)$$

となる. x を入力, u を出力とみなせば, ばね系の数学モデルは

$$u = kx \quad (2.5)$$

と表され, u を入力, x を出力とみなせば

$$x = \frac{1}{k}u \quad (2.6)$$

と表される。 k をばね定数という。変位と復元力が比例しないばね（非線形ばね）もある。実際のばねは厳密にはすべて非線形ばねである。

例題 2.2 図 2.6 のばね系を一つのばねとみなしたときの等価ばね定数を求めよ。また、力 u を入力、変位 x を出力としたときの数学モデルを求めよ。

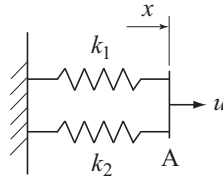


図 2.6: 二つのばねが並列結合されたばね系

[解] A 点における力のつりあいから

$$u - k_1 x - k_2 x = 0$$

すなわち

$$u = (k_1 + k_2)x$$

を得る。よって、等価ばね定数 k_e は

$$k_e = k_1 + k_2$$

である。以上から、数学モデルは

$$x = \frac{1}{k_e} u$$

と求まる。

例題 2.3 図 2.7 のばね系を一つのばねとみなしたときの等価ばね定数を求めよ。また、力 u を入力、変位 x_1 を出力としたときの数学モデルを求めよ。

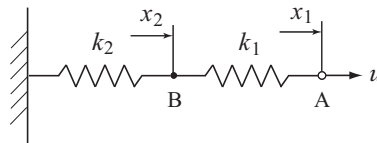


図 2.7: 二つのばねが直列結合されたばね系

[解] A 点における力のつりあい式は

$$u - k_1(x_1 - x_2) = 0 \tag{2.7}$$

となり、B 点における力のつりあい式は

$$k_1(x_1 - x_2) - k_2 x_2 = 0 \tag{2.8}$$

となる。(2.7), (2.8) 式から

$$x_2 = \frac{u}{k_2}$$

が得られ, これを (2.7) 式へ代入し整理すると

$$u = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_1$$

となる. よって, 等価ばね定数は

$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

である. また, 数学モデルは

$$x_1 = \frac{1}{k_e} u$$

である.

(別解) ばね k_1, k_2 の伸びをそれぞれ y_1, y_2 とすると

$$x_1 = y_1 + y_2 = \frac{u}{k_1} + \frac{u}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) u$$

が成り立つ. これから等価ばね定数は

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

と得られる.

以上から, 結合された二つのばねの等価ばね定数について次がいえる.

1. 並列結合された二つのばね k_1, k_2 の等価ばね定数 k_e は次式で計算される.

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (2.9)$$

2. 直列結合された二つのばね k_1, k_2 の等価ばね定数 k_e は次式で計算される.

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (2.10)$$

これらの関係式を繰り返し使えば, 三つ以上のばねが並列結合または直列結合された場合にも, 等価ばね定数の計算式を求めることができる.

すなわち, 図 2.8 の場合, まず, k_1 と k_2 の等価ばね定数を

$$k_{e1} = k_1 + k_2$$

と求め, つぎに, k_{e1} と k_3 の等価ばね定数を

$$k_e = k_{e1} + k_3 = k_1 + k_2 + k_3$$

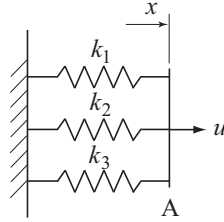


図 2.8: 三つのばねが並列結合されたばね系

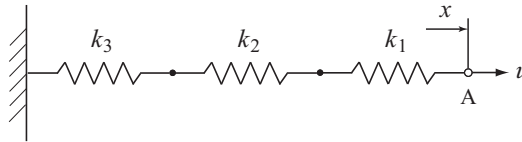


図 2.9: 三つのばねが直列結合されたばね系

と計算する.

図 2.9 の場合, まず, k_1 と k_2 の等価ばね定数を

$$k_{e1} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

と求め, つぎに, k_{e1} と k_3 の等価ばね定数を

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_{e1}} + \frac{1}{k_3}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}$$

と計算する.

2.3 回路系

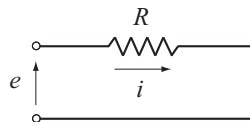


図 2.10: 回路系

回路系も身近なシステムの例である. 本講義では, 抵抗, コンデンサ, コイル, 電源から構成される回路系 (受動回路となる) を扱う. その数学モデルはオームの法則とキルヒホッフの法則を用いて求められる.

図 2.10 の回路系において, e は印加電圧 [V], i は電流 [A], R は抵抗 [Ω] である. オームの法則から

$$e = Ri$$

が成り立つ。 e を入力、 i を出力とすれば、系の数学モデルは

$$i = \frac{1}{R}e$$

と表される。

例題 2.4 図 2.11 の並列結合された抵抗 R_1 , R_2 の合成抵抗を求めよ。また、入力を印加電圧 e , 出力を電流 i としたときの系の数学モデルを求めよ。

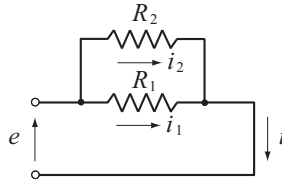


図 2.11: 回路系

[解] 電流間に次の関係がある。

$$i = i_1 + i_2 \tag{2.11}$$

また、各抵抗の両端の電圧は e なので

$$e = R_1 i_1 = R_2 i_2$$

すなわち

$$i_1 = \frac{1}{R_1}e, \quad i_2 = \frac{1}{R_2}e$$

がわかる。これらを (2.11) 式に代入すると、系の数学モデルとして

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) e = \frac{1}{R_e}e$$

を得る。ここで、 R_e は合成抵抗である。上式から、合成抵抗は次式となる。

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

例題 2.5 図 2.12 の直列結合された抵抗 R_1 , R_2 の合成抵抗を求めよ。また、入力を印加電圧 e , 出力を電流 i としたときの系の数学モデルを求めよ。

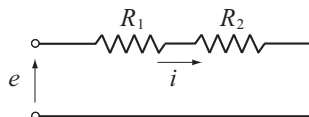


図 2.12: 回路系

[解] 各抵抗に電流 i が流れるので, R_1 , R_2 における電圧降下はそれぞれ $R_1 i$, $R_2 i$ となる. これらの和が e に等しくなるので次式を得る.

$$e = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i = R_e i$$

ただし, R_e は合成抵抗である. 上式から

$$R_e = R_1 + R_2$$

がわかる. また, 系の数学モデルは, この R_e を用いて

$$i = \frac{1}{R_e} e$$

と書ける.

以上の合成抵抗の公式をまとめておく.

1. 並列結合された二つの抵抗 R_1 , R_2 の合成抵抗 R_e は次式で計算される.

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (2.12)$$

2. 直列結合された二つの抵抗 R_1 , R_2 の合成抵抗 R_e は次式で計算される.

$$R_e = R_1 + R_2 \quad (2.13)$$

ばねの場合と同様に, これらを繰り返し利用することで, 三つ以上の抵抗が並列結合または直列結合された場合の合成抵抗の計算式が得られる.

例題 2.6 図 2.13 の回路系において, e_i, e_o をそれぞれ入力電圧, 出力電圧とする. この回路系の数学モデルを求めよ.

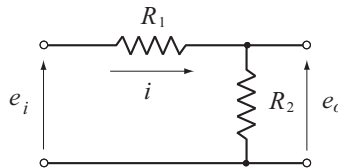


図 2.13: 回路系

[解] 電圧の平衡式は

$$e_i = R_1 i + e_o \quad (2.14)$$

となる. 一方

$$e_o = R_2 i$$

なので

$$i = \frac{e_o}{R_2}$$

がわかる．これを (2.14) 式に代入すると

$$e_i = \frac{R_1}{R_2} e_o + e_o$$

となり，これから

$$e_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_i$$

を得る．右辺の係数について

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

であることに注意する．よって，このような回路で電圧の増幅はできない．

2.4 スコッチヨークの機構

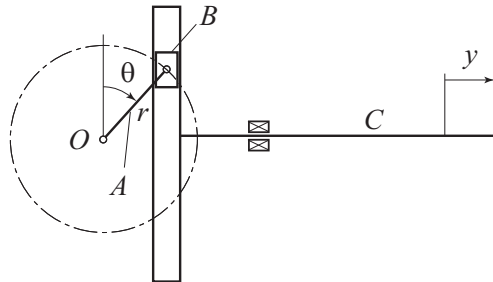


図 2.14: スコッチヨークの機構

最後に，非線形システムをある動作点で線形近似して（線形化という），線形システムを求める例を示す．

図 2.14 はスコッチヨークの機構と呼ばれるリンク機構である．固定された O 点を中心として回転するクランク A の先端にスライダ B が取り付けられてあり，クランク A の回転運動をリンク C の並進運動に変えることができる．クランク A の長さとして r とし，クランク A の回転角をそれぞれ r, θ とし，リンク C の基準点からの変位を y とする．クランク，リンク等の慣性モーメント，質量，作動部分の摩擦は無視する．このとき，入力を θ ，出力を y とすれば，次式が成り立つ．

$$y = r \sin \theta$$

$|\theta|$ が小さい範囲でこの機構を使う場合

$$y \simeq r\theta$$

と線形近似できる．

2.5 問題

1. 以下のばね系の等価ばね定数を求めよ。また、入力を u 、出力を x としたときのばね系の数学モデルを求めよ。

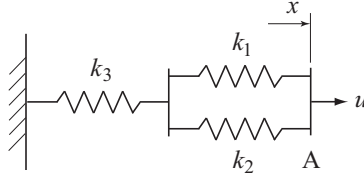


図 2.15: (1)

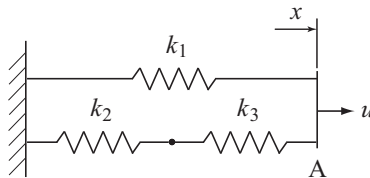


図 2.16: (2)

2. 以下の回路系の数学モデルを求めよ。ただし、電圧 e_i を入力、電圧 e_o を出力とする。

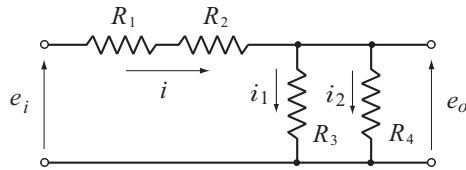


図 2.17: (1)

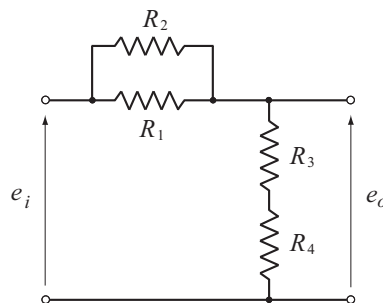


図 2.18: (2)

第3章 1次系のモデリング

1次系とは、数学モデルが1階の微分方程式で表される系である。微分方程式の階数はその方程式に含まれる変数の導関数の最大階数である。数学モデルが微分方程式で表される系は動的システムである。したがって、1次系はもっとも簡単な動的システムといえる。具体的には、入力を u 、出力を y とするとき、1次系の数学モデルは次式で表される。

$$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad a_1 \neq 0$$

ただし、 \dot{y} は y の時間微分 dy/dt を表す。 a_0, a_1, b_0, b_1 は定数である。ここでは、1次系のモデリングの例として、水槽系、モータ系、熱系、RC回路系、ダンパー系を取り扱う。

3.1 水槽系

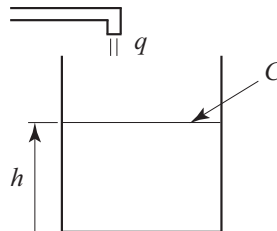


図 3.1: 水槽系

図 3.1 において、断面積 C [m²] (一定) の水槽に流量 $q(t)$ [m³/s] の水が注がれている。入力を q 、出力を水位 h [m] とすると、流量バランスから、系の数学モデルとして

$$C \dot{h}(t) = q(t)$$

または

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{C} q(t) \tag{3.1}$$

を得る。

ちなみに、(3.1) 式の解は

$$h(t) = h(0) + \frac{1}{C} \int_0^t q(\tau) d\tau \tag{3.2}$$

と表される。これは、(3.2) 式が (3.1) 式と初期条件を満たすことから確認できる。実際、(3.2) 式を t で微分すると、(3.1) 式が得られる。(3.2) 式の第二項の t に関する微分は、積分の上限

のみに t があるので、積分記号を外し、被積分項の τ に t を代入することによって得られる。すなわち

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^t q(\tau) d\tau \right] = q(t)$$

が成り立つ。解が (3.2) 式で表現されるため、「水槽系は積分作用を持つ」、あるいは、「水槽系は積分器である」といわれる。

例題 3.1 水槽の断面積と初期水位を

$$C = 1 \text{ m}^2, \quad h_0 = 0 \text{ m}$$

とする。流入量 $q(t)$ として

$$(1) \quad q(t) = 1 \text{ m}^3/\text{s} \quad (2) \quad q(t) = t \text{ m}^3/\text{s}$$

を与えたときの $h(t)$ を求めよ。

[解] (3.2) 式から

$$(1) \quad h(t) = t \text{ m} \quad (2) \quad h(t) = \frac{t^2}{2} \text{ m}$$

を得る。これらは、積分公式で学習した「1 の積分は t 」, 「 t の積分は $t^2/2$ 」という事実である。図 3.2, 図 3.3 にこれらの流入量と水位の関係を示す。

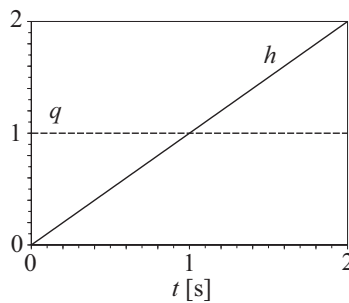


図 3.2: 水槽系 : $q(t) = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ に対する水位の変化

3.2 DC モータ系

理想的な DC モータ系（直流モータ+ドライバ）は、入力電圧 v に比例した角速度 ω で軸が回転する（図 3.4）。この関係を式で表すと

$$\omega(t) = Kv(t) \tag{3.3}$$

となる。上式を角度 θ を用いて書けば、 $\omega = \dot{\theta}$ なので

$$\dot{\theta}(t) = Kv(t) \tag{3.4}$$

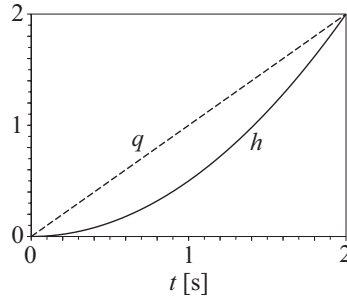


図 3.3: 水槽系 : $q(t) = t \text{ m}^3/\text{s}$ に対する水位の変化

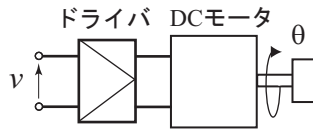


図 3.4: DC モータ系

を得る。これは、入力を v 、出力を θ とした場合の数学モデルである。(3.4) 式は、水槽系の数学モデル (3.1) 式と同じ形をしている。よって、その解 $\theta(t)$ も (3.2) 式と同じ形を持つ。解の表現から、DC モータ系では、入力 v に係数 K を掛けた量を積分して角度 θ としていると解釈できる。

一方、入力を電圧 v 、出力を角速度 ω とした場合、数学モデルは (3.3) 式となり、このときシステムは静的システムとなる。

3.3 熱系

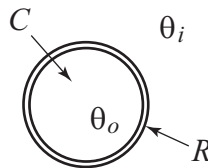


図 3.5: 熱系

図 3.5 に示すように、密閉された容器があり、容器の内部と外部には液体がある。外部の液体の温度を θ_i [K]、内部の液体の温度を θ_o [K] とする。両液体の温度は場所にかかわらず均一であるとする。ニュートンの冷却則（物体の温度変化率は物体と周囲との温度差に比例する）から、次の関係が導かれる。

$$C\dot{\theta}_o(t) = \frac{1}{R} (\theta_i(t) - \theta_o(t)) \quad (3.5)$$

ただし

C : 容器の熱容量（比熱×体積）[J/K], R : 壁面の伝熱抵抗 [J/(Ks)]

である。この場合、 θ_i を入力、 θ_o を出力と考えた。周囲の温度 θ_i が一定で、初期には、容器の内部の温度が周囲の温度よりも低い場合の温度変化の例を図 3.6 に示す。このような温度変化は日常的に経験する現象であろう。

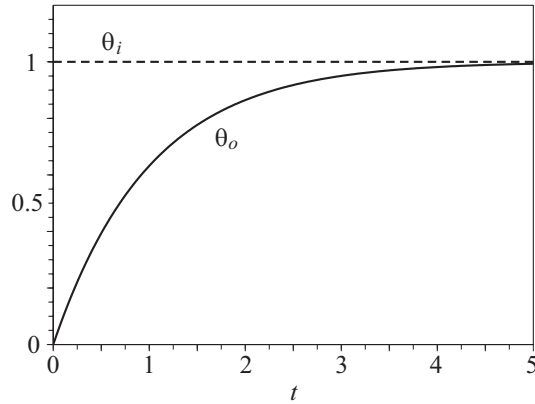


図 3.6: 熱系 ($C = 1, R = 1, \theta_o(0) = 0$): $\theta_i(t) = 1$ に対する温度 θ_o の変化 (θ_i に漸近的に近づく指数関数となる。 $\theta_o(t) = \theta_i(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$)

3.4 RC 回路系

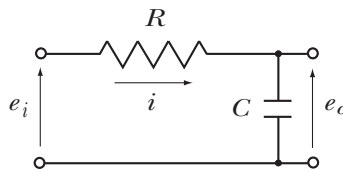


図 3.7: RC 回路系

図 3.7 の RC 回路系の数学モデルを求めよう。 e_i を入力、 e_o を出力とする。電圧の平衡式を立てると

$$Ri(t) + e_o(t) = e_i(t) \quad (3.6)$$

となる。コンデンサの性質から、 e_o と i との間には次式が成り立つ。

$$e_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (3.7)$$

これから、コンデンサは、 i/C を積分して電圧 e_o とする積分器であるとみなせる。(3.7) 式の両辺を t で微分して整理すると

$$i(t) = C\dot{e}_o(t)$$

が得られ、これを (3.6) 式に代入して整理すると

$$\dot{e}_o(t) = \frac{1}{RC} (e_i(t) - e_o(t))$$

を得る。

3.5 ダンパー系

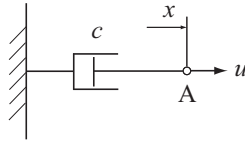


図 3.8: ダンパー系

図 3.8 のダンパー系の数学モデルを求める。ダンパーは、ダッシュポットとも呼ばれ、速度に比例した抵抗力を発生する要素である。力 u を入力、変位 x を出力とする。

A 点における力のつりあいから

$$u(t) - c\dot{x}(t) = 0$$

すなわち

$$c\dot{x}(t) = u(t)$$

または

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{c}u(t)$$

を得る。 c はダンパーの粘性減衰係数である。これは、水槽系や DC モータ系と同じ形の数学モデルである。よって、ダンパーも積分作用があり、 u/c を積分して変位 x にする要素であると理解できる。

例題 3.2 図 3.9 のばねとダンパーが直列結合された系を考える。A 点に力 u が作用している。A 点と B 点における変位をそれぞれ x_1, x_2 とする。また、入力を u 、出力を x_1 とする。この系の数学モデルを求めよ。

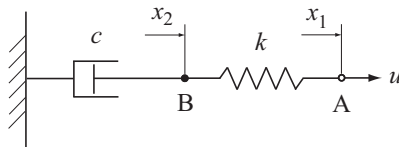


図 3.9: ばね-ダンパー系 (直列結合)

[解] u と x_1 に関する運動方程式を求める。A 点における力のつりあいから

$$u - k(x_1 - x_2) = 0 \tag{3.8}$$

また、B 点における力のつりあいから

$$k(x_1 - x_2) - c\dot{x}_2 = 0 \tag{3.9}$$

(3.8), (3.9) 式から

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{c}u \quad (3.10)$$

(3.8) 式を t で微分し, (3.10) 式を用いると

$$\dot{u} - k \left(\dot{x}_1 - \frac{1}{c}u \right) = 0$$

すなわち

$$k\dot{x}_1 = \dot{u} + \frac{k}{c}u$$

を得る.

3.6 流出孔のある水槽系

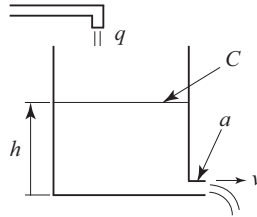


図 3.10: 流出孔のある水槽系

最後に, 図 3.10 に示す流出孔のある水槽系の数学モデルを求める. q は流入する水の流量, h は水位, C は水槽の断面積, a は流出孔の断面積とする. $a \ll C$ の場合, トリチェリの定理から, 孔から流出する水の速度は次式で計算できる.

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

ただし, g は重力加速度である. これを利用して水槽系の流量バランス式を求めると

$$C\dot{h}(t) = q(t) - fav(t) \quad (3.11)$$

となる. f は流量係数であり, 1 よりも小さな正数である. いま, 基準流入量を q_0 , q_0 に対する平衡水位を h_0 とする. q_0 と h_0 との間には次の関係がある.

$$q_0 = fa\sqrt{2gh_0}$$

このとき, $h(t)$ と $q(t)$ を

$$h(t) = h_0 + x(t), \quad q(t) = q_0 + u(t) \quad (3.12)$$

と表し, h_0 , q_0 からの偏差 x , u に注目する. (3.12) 式を (3.11) 式に代入し, さらに, x/h_0 を微小量と仮定して

$$\sqrt{h_0 + x(t)} = \sqrt{h_0} \left(1 + \frac{x(t)}{h_0} \right)^{1/2} \simeq \sqrt{h_0} \left(1 + \frac{x(t)}{2h_0} \right)$$

と線形近似すると，つぎの線形化数学モデルを得る．

$$C\dot{x}(t) = -\frac{1}{R}x(t) + u(t)$$

ただし

$$\frac{1}{R} := \frac{fa\sqrt{g}}{\sqrt{2h_0}}$$

とおいた．

3.7 問題

以下の系の数学モデルを導出せよ．

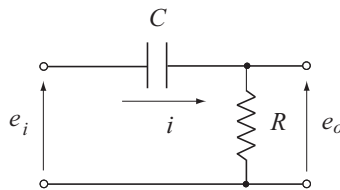


図 3.11: 問題 1 : CR 回路系 (入力 : e_i , 出力 : e_o)

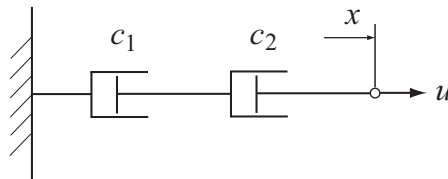


図 3.12: 問題 2 : ダンパー系 (直列結合) (入力: u , 出力 : x)

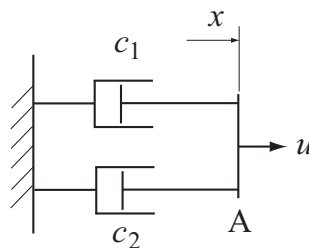


図 3.13: 問題 3 : ダンパー系 (並列結合) (入力 : u , 出力 : x)

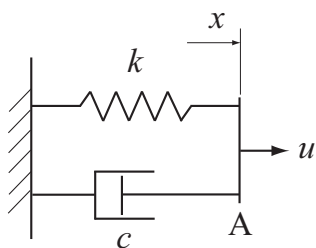


図 3.14: 問題 4: ばね-ダンパー系 (入力: u , 出力: x)

第4章 2次系のモデリング

2次系は数学モデルが2階の微分方程式となる系である。入力を $u(t)$ ，出力を $y(t)$ とすると，2次系の数学モデルの一般形は次式で表される。

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t), \quad a_2 \neq 0$$

2次系には，1自由度振動系などポピュラーで応用上重要な動的システムが含まれている。また，2次系までのモデリングによって，モデリングの基本的考え方を理解することができるであろう。本章では，慣性系，1自由度振動系，RLC回路系等のモデリングを紹介する。

4.1 慣性系

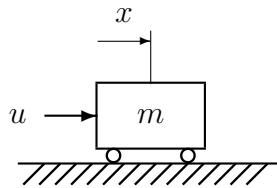


図 4.1: 慣性系

図 4.1 の慣性系を考える。滑らかな床の上に台車があり，力 u が作用している。台車の位置を x とする。 m は質量である。入力を u ，出力を x とする。物体の運動方程式を求めるため，ダランベールの原理（各瞬間で物体に作用する動的な力（慣性力など）と静的な力（ばねの復元力など）がつりあっている）を用いて台車について力のつりあい式を立てると

$$u(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \tag{4.1}$$

となり，これを整理して

$$m\ddot{x}(t) = u(t) \tag{4.2}$$

を得る。

4.2 回転慣性系

図 4.2 において，滑らかに回転する円板にトルク（回転軸まわりのモーメント） u が作用している。 θ は円板の回転角， J は円板の慣性モーメントである。入力を u ，出力を θ とする。

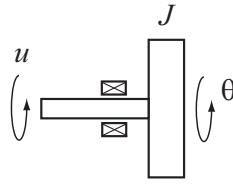


図 4.2: 回転慣性系

モーメントのつりあいから運動方程式を求めると

$$u - J\ddot{\theta} = 0 \quad (4.3)$$

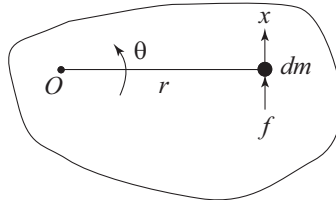
すなわち

$$J\ddot{\theta} = u \quad (4.4)$$

を得る。円板の質量を m ，半径を r とすると J は

$$J = \frac{1}{2}mr^2 \quad (4.5)$$

で計算できる。

図 4.3: 慣性モーメント J

参考 慣性モーメント J の計算式は以下のように導出できる。

図 4.3 において、 O を中心として回転する物体がある。 dm を物体の微小質量とする。また、 O から dm までの距離を r とする。 θ は回転角、 x は円周方向の移動距離、 f は dm に作用する力である。

$$x = r\theta, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

の関係がある。また、ニュートンの第2法則から、力 f は

$$f = dm \cdot \ddot{x}$$

と表され、モーメントは

$$rf = dm \cdot r\ddot{x} = dm \cdot r^2\ddot{\theta}$$

と表される。全モーメント M は、上式を物体全体で積分することによって得られる。

$$M = \int r^2 dm \cdot \ddot{\theta}$$

いま

$$J = \int r^2 dm.$$

とおくと

$$M = J\ddot{\theta}$$

を得る． J を慣性モーメントという．

4.3 1 自由度振動系

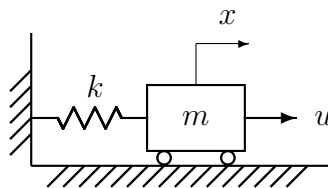


図 4.4: 1 自由度振動系

図 4.4 に示すように、摩擦のない床の上に質量 m の台車が置かれ、台車は壁面とばね定数 k のばねを介して結合されている。さらに、台車には、力 u が作用している。ばねが自然長であるときを基準とした台車の位置を x とする。この系の運動は振動的になる。また、振動を減衰させる摩擦力やダンパーが無いので、 $u = 0$ の場合、振動が持続する。入力を u 、出力を x とする。

いま、運動方程式を求めるため、ダランベールの原理を用いると

$$u(t) - m\ddot{x}(t) - kx(t) = 0 \quad (4.6)$$

を得る。これを整理すれば

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (4.7)$$

となる。

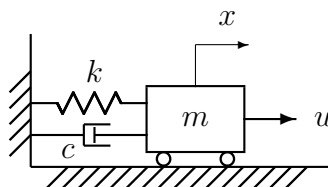


図 4.5: 減衰のある 1 自由度振動系

次に、図 4.5 のダンパーを含む 1 自由度振動系を考える。 c はダンパーの粘性減衰係数である。運動方程式を力のつりあいから求めると

$$u(t) - m\ddot{x}(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) = 0 \quad (4.8)$$

すなわち

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (4.9)$$

となる.

4.4 1自由度振動系（回転系）

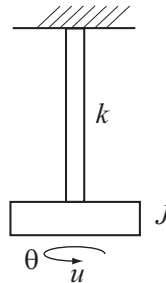


図 4.6: 1 自由度振動系（回転系）

図 4.6 のように、円板と軸からなる回転系の一端が天井に固定されている。軸のばね定数を k （単位角度回転させるために必要なトルク）、円板の慣性モーメントを J 、円板の回転角を θ とする。入力を u 、出力を θ とする。この系の運動方程式は、モーメントのつりあいから

$$u - J\ddot{\theta} - k\theta = 0 \quad (4.10)$$

すなわち

$$J\ddot{\theta} + k\theta = u \quad (4.11)$$

となる。軸に粘性減衰がある場合の運動方程式は

$$J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = u$$

となる。ただし、 c は回転に関する粘性減衰係数である。

4.5 RLC 回路系

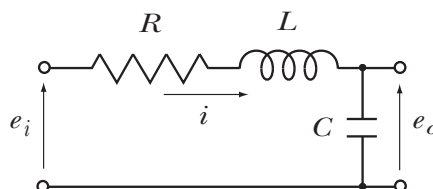


図 4.7: RLC 回路系

図 4.7 の RLC 回路系において，入力端の電圧を e_i ，出力端の電圧を e_o とする． L [H] はインダクタンス， R [Ω] は抵抗， C [F] はコンデンサの静電容量（キャパシタンス）である．この回路系の電圧の平衡式を求めると

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + e_o(t) = e_i(t) \quad (4.12)$$

となる．また

$$e_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

すなわち

$$i(t) = C\dot{e}_o(t)$$

という関係があるので，これを (4.12) 式に代入すれば

$$LC\ddot{e}_o(t) + RC\dot{e}_o(t) + e_o(t) = e_i(t) \quad (4.13)$$

を得る．

例題 4.1 質量-ばね-ダンパー系（直列結合） 図 4.8 の力学系の数学モデルを求めよ．ただし，入力を u ，出力を $v_1 = \dot{x}_1$ とせよ．

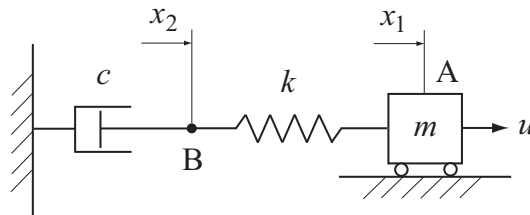


図 4.8: 質量-ばね-ダンパー系（直列結合）

[解] A 点における力のつりあいから

$$u - m\ddot{x}_1 - k(x_1 - x_2) = 0 \quad (4.14)$$

B 点における力のつりあいから

$$k(x_1 - x_2) - c\dot{x}_2 = 0 \quad (4.15)$$

を得る．(4.14) 式から

$$k(x_1 - x_2) = u - m\ddot{x}_1 \quad (4.16)$$

すなわち

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{k}(u - m\ddot{x}_1)$$

が得られ、さらに、これを t で微分して

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \frac{1}{k} \left(\dot{u} - m\ddot{x}_1^{(3)} \right) \quad (4.17)$$

を得る. (4.16), (4.17) 式を (4.15) 式に代入すると

$$u - m\ddot{x}_1 - c \left\{ \dot{x}_1 - \frac{1}{k} \left(\dot{u} - m\ddot{x}_1^{(3)} \right) \right\} = 0$$

これを整理すると

$$\frac{cm}{k} \ddot{x}_1^{(3)} + m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 = \frac{c}{k} \dot{u} + u$$

この式に $v_1 = \dot{x}_1$ を用いると

$$\frac{cm}{k} \ddot{v}_1 + m\dot{v}_1 + cv_1 = \frac{c}{k} \dot{u} + u \quad (4.18)$$

を得る.

例題 4.2 質量-ばね系 (自由) 図 4.9 の力学系の数学モデルを求めよ. ただし, 入力を u , 出力を x_1 とせよ.

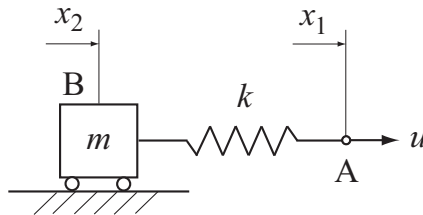


図 4.9: 質量-ばね系 (自由)

[解] A 点における力のつりあいから

$$u - k(x_1 - x_2) = 0 \quad (4.19)$$

B 点における力のつりあいから

$$k(x_1 - x_2) - m\ddot{x}_2 = 0 \quad (4.20)$$

(4.19) 式から

$$k(x_1 - x_2) = u \quad (4.21)$$

また, 上式から

$$x_2 = x_1 - \frac{u}{k} \quad (4.22)$$

これを t で 2 回微分すると

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - \frac{\ddot{u}}{k} \quad (4.23)$$

(4.21), (4.23) 式を (4.20) 式に代入すると

$$u - m \left(\ddot{x}_1 - \frac{\ddot{u}}{k} \right) = 0$$

すなわち

$$m\ddot{x}_1 = \frac{m}{k}\ddot{u} + u \quad (4.24)$$

4.6 問題

以下の系の数学モデルを求めよ.

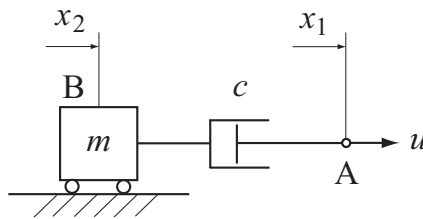


図 4.10: 問題 1 質量-ダンパー系 (自由). 入力: u , 出力: x_1

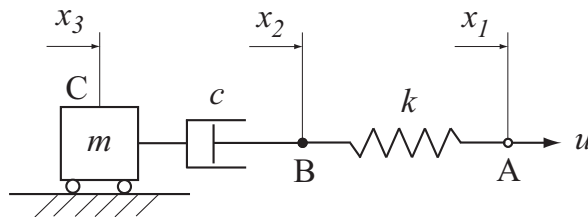


図 4.11: 問題 2 質量-ダンパー-ばね系 (自由). 入力: u , 出力: x_1

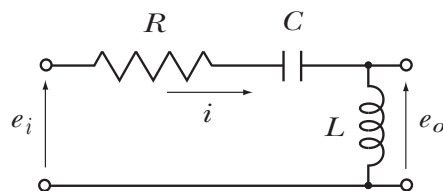


図 4.12: 問題 3 RCL 回路系. 入力: e_i , 出力: e_o

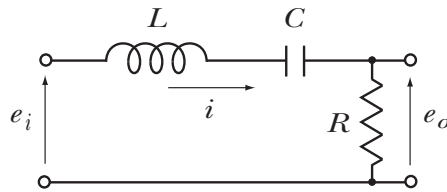


図 4.13: 問題 4 LCR 回路系. 入力: e_i , 出力: e_o

第5章 ラプラス変換

ラプラス変換は時間 t の関数を複素数 s の関数に変換する積分変換である。この名称はフランスの数学者 Pierre-Simon Laplace に因んで付けられたものである。この変換は Laplace 以前にも Leonhard Euler が微分方程式の解法に応用した (1737) が、これとは独立に Laplace は彼の著書「確率の解析理論」(1812) の第 1 巻で微分方程式の解法にこの変換を用いた。この変換の大きな特徴は、 t 領域での微分・積分が s 領域での s の掛け算・割り算に対応するという事実である。この性質ゆえ、ラプラス変換は微分方程式を解くための道具として使われ、また、後の章で導入する伝達関数の理論的基礎を与える。本章では、本講義に必要なラプラス変換と逆ラプラス変換を解説し、続く章の準備とする。

5.1 ラプラス変換の定義

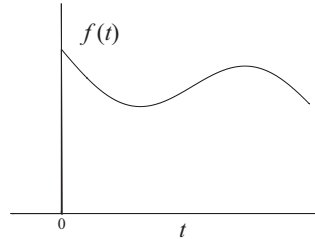


図 5.1: 関数 $f(t)$

$t < 0$ で零の値をとる区分的に連続な関数 $f(t)$ を考えよう (図 5.1)。 $f(t)$ のラプラス変換は次のように定義される。

[ラプラス変換の定義] 関数 $f(t)$ ($f(t) = 0, t < 0$) に対して次のラプラス積分

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

がある $s = s_0$ に対して収束するとき、 s を一般の複素数とした $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という。

次の記号も使う。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

代表的な関数のラプラス変換を例題で見ている。以下では、 s_0 を s で置き換える過程を省略している。

例題 5.1 次の関数 (図 5.2) のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = e^{\alpha t}, t \geq 0 \quad (5.1)$$

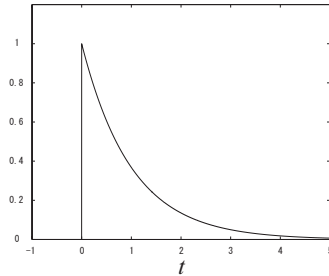


図 5.2: 関数 $f(t) = e^{\alpha t}, t \geq 0$

[解]

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{\alpha-s} = \frac{1}{s-\alpha} \end{aligned} \quad (5.2)$$

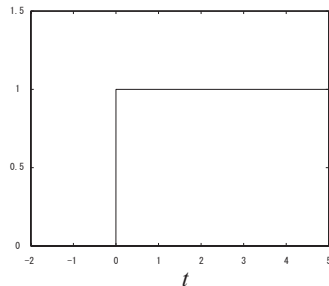


図 5.3: 単位ステップ関数 $\mathbf{1}(t)$

この結果を利用して、単位ステップ関数 (図 5.3)

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

のラプラス変換を求めることができる。すなわち、単位ステップ関数は、(5.1) 式で $\alpha = 0$ とおいて得られるので、(5.2) 式で $\alpha = 0$ とおくと、 $\mathbf{1}(t)$ のラプラス変換が

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

と求まる。

例題 5.2 次の関数のラプラス変換を求めよ.

$$f(t) = \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0$$

[解] オイラーの公式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

より $\sin \omega_0 t$ は

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

と表される. (5.2) 式を適用して上式右辺のラプラス変換を計算すると

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

を得る.

5.2 推移定理

常微分方程式の解として, ある関数に指数関数 $e^{s_0 t}$ を掛けた形の関数がよく現れる. t 領域で $e^{s_0 t}$ を掛けるという演算は, s 領域では単に s を $s - s_0$ でおきかえる演算に対応する.

[s 領域における推移定理]

$$f_1(t) = f(t)e^{s_0 t}, \quad t \geq 0$$

のラプラス変換は次式となる.

$$F_1(s) = F(s - s_0) \quad (5.4)$$

[証明]

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-s_0)t} dt = F(s - s_0) \quad \blacksquare$$

例題 5.3 次の関数 (図 5.4) のラプラス変換を求めよ.

$$f_1(t) = e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0$$

[解] $\sin \omega_0 t$ のラプラス変換は (5.3) 式で与えられる. よって, (5.3) 式に s 領域における推移定理を適用して

$$F_1(s) = \frac{\omega_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$$

を得る.

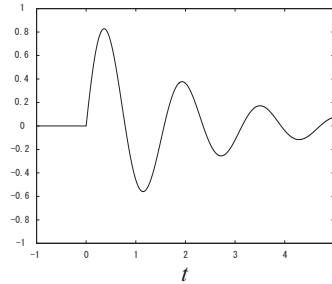


図 5.4: 関数 $f(t) = e^{-0.5t} \sin 4t, t \geq 0$

また, $f(t)$ を時間 τ だけ遅らせる操作 (図 5.5) は, s 領域では, $F(s)$ に $e^{-s\tau}$ を掛ける演算になる.

[t 領域における推移定理]

$$f_2(t) = f(t - \tau), \quad \tau \geq 0$$

のラプラス変換は

$$F_2(s) = \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt = F(s) e^{-s\tau}$$

である.

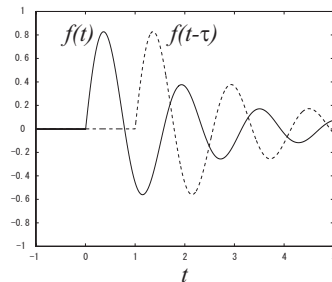


図 5.5: $f(t)$ と $f(t - \tau)$

[証明] $t - \tau = \rho$ と変数変換すると, これに対応して, ラプラス積分の t と dt が

$$t = \rho + \tau, \quad dt = d\rho$$

となり, 積分の下限と上限が

$$t = 0 \rightarrow \rho = -\tau, \quad t = \infty \rightarrow \rho = \infty$$

と変換される. これらから, $F_2(s)$ は次のように計算される.

$$F_2(s) = \int_{-\tau}^{\infty} f(\rho) e^{-s(\rho+\tau)} d\rho = \int_0^{\infty} f(\rho) e^{-s\rho} d\rho e^{-s\tau} = F(s) e^{-s\tau}$$

■

例題 5.4 パルス関数 $\Delta(t)$ (図 5.6)

$$\Delta(t) = a(1(t) - 1(t - \tau))$$

をラプラス変換せよ.

[解] t 領域における推移定理を利用すれば

$$F(s) = a \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\tau} \right) = \frac{a}{s} (1 - e^{-s\tau}) \quad (5.5)$$

と求まる.

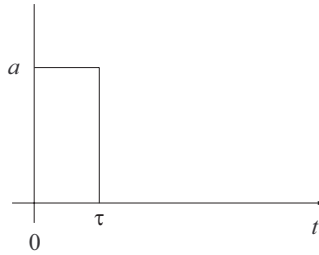


図 5.6: パルス関数 $\Delta(t)$

$\Delta(t)$ と時間軸との間の面積を 1 にするために $a = 1/\tau$ とおき, さらに, $\tau \rightarrow 0$ とすると, $\Delta(t)$ は単位インパルス関数 $\delta(t)$ となる (図 5.7). よって, $\delta(t)$ のラプラス変換は (5.5) 式で $a = 1/\tau$ とし, $\tau \rightarrow 0$ とすることによって

$$F(s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{s\tau} (1 - e^{-s\tau}) = 1$$

と計算される.

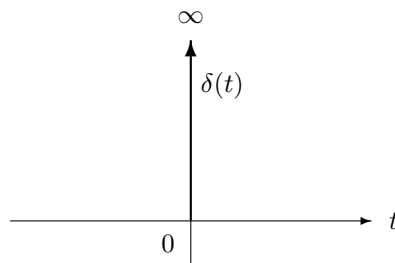


図 5.7: 単位インパルス関数

5.3 微分・積分

$f(t)$ の t に関する微分・積分は, $F(s)$ の s に関する代数演算になる.

[微分のラプラス変換]

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \mathbf{1}(t) \right] = sF(s) - f(0) \quad (5.6)$$

[証明] 部分積分を用いて証明できる.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\mathbf{1}(t)\right] &= \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})dt \\ &= \lim_{t\rightarrow\infty} f(t)e^{-st} - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)\end{aligned}\quad \blacksquare$$

(5.6) 式を繰り返し用いることにより, 2回微分, 3回微分, ... に対する公式を求めることができる. すなわち, $df(t)/dt$ のラプラス変換を $F_1(s)$ とすると, 微分のラプラス変換の公式を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\mathbf{1}(t)\right] &= sF_1(s) - f^{(1)}(0) = s(sF(s) - f(0)) - f^{(1)}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)\end{aligned}$$

を得る. 同様に, $d^2f(t)/dt^2$ のラプラス変換を $F_2(s)$ とおき, 微分のラプラス変換の公式を適用することによって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^3f(t)}{dt^3}\mathbf{1}(t)\right] &= sF_2(s) - f^{(2)}(0) \\ &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf^{(1)}(0) - f^{(2)}(0)\end{aligned}$$

を得る.

例題 5.5 $f(t) = \sin \omega t$ とする. (5.3) 式から, $f(t)\mathbf{1}(t)$ のラプラス変換は次式で与えられる.

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

このことを利用して, $\dot{f}(t)\mathbf{1}(t) = \omega \cos \omega t \cdot \mathbf{1}(t)$ のラプラス変換を求めよ.

[解] (5.6) 式から

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\mathbf{1}(t)\right] = sF(s) - f(0) = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2}$$

を得る.

例題 5.6 $f(t) = t$ とする. $f(t)\mathbf{1}(t)$ のラプラス変換を求めよ.

[解]

$$\dot{f}(t)\mathbf{1}(t) = \mathbf{1}(t)$$

上式をラプラス変換すると

$$sF(s) - f(0) = \frac{1}{s}, \quad f(0) = 0$$

となる. これを $F(s)$ について解けば

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

を得る.

同様に, $t^2\mathbf{1}(t)$, $t^3\mathbf{1}(t)$, ... のラプラス変換を逐次求めていくことができる.
積分のラプラス変換は次のとおりである.

[積分のラプラス変換]

$$f^{(-1)}(t) = \int f(t)dt = f^{(-1)}(0) + \int_0^t f(\tau)d\tau$$

と記す.

$$\mathcal{L} \left[\int f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \quad (5.7)$$

[証明]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int f(t)dt \right] &= \int_0^\infty \left(\int f(t)dt \right) e^{-st} dt \\ &= f^{(-1)}(t) \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f^{(-1)}(t)e^{-st}}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} + \frac{1}{s} F(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \end{aligned}$$

代表的な関数のラプラス変換を表 5.1 に示す. ■

5.4 逆ラプラス変換

$F(s)$ に対応する時間関数 $f(t)$ を求める演算を逆ラプラス変換という. 逆ラプラス変換は次の複素積分で記述される.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{ts} ds$$

ここで, c は $\operatorname{Re} s > c$ で $f(t)$ のラプラス積分が収束するような実数である. しかしながら, 通常扱う $F(s)$ は有理関数 (s の多項式を s の多項式で割ったもの) なので, $F(s)$ を部分分数展開して得られた各項を, ラプラス変換表を利用して, 時間関数に変換するという方法がよく使われる.

例題 5.7

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

を逆ラプラス変換せよ.

[解] $F(s)$ は

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} \quad (5.8)$$

表 5.1: ラプラス変換表

$f(t)\mathbf{1}(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n \mathbf{1}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at} \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at} \mathbf{1}(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega_0 t \mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t \mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t \mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t \mathbf{1}(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

と部分分数展開できる。 K_1 を求めるため、上式に s を掛ける。

$$sF(s) = K_1 + \frac{sK_2}{s+1}$$

さらに、 $s=0$ とおけば右辺第2項は0となり

$$K_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=0} = 1$$

を得る。 K_2 を求めるため、(5.8) 式に $s+1$ を掛ける。

$$(s+1)F(s) = \frac{(s+1)K_1}{s} + K_2$$

さらに、 $s=-1$ とおけば右辺第1項は0となり

$$K_2 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{1}{s} \Big|_{s=-1} = -1$$

を得る。よって、 $F(s)$ は

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

と部分分数展開された。ラプラス変換表を利用して、各項を逆ラプラス変換すれば

$$f(t) = (1 - e^{-t}) \mathbf{1}(t)$$

を得る。

例題 5.8

$$F(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

を逆ラプラス変換せよ.

[解] $F(s)$ は

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

と部分分数展開される. 展開係数は以下のように計算できる.

$$K_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{2s+1}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{-1}{(-1)(1)} = 1$$

$$K_3 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{2s+1}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{-3}{(-2)(-1)} = -\frac{3}{2}$$

よって

$$F(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

となり, ラプラス変換表から

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \right) \mathbf{1}(t)$$

を得る.

例題 5.9

$$F(s) = \frac{1}{(2s+1)(5s+1)}$$

を逆ラプラス変換せよ.

[解] $F(s)$ は次のように展開される.

$$F(s) = \frac{K_1}{2s+1} + \frac{K_2}{5s+1}$$

展開係数は

$$K_1 = (2s+1)F(s)|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5s+1} \Big|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$K_2 = (5s+1)F(s)|_{s=-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2s+1} \Big|_{s=-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

よって

$$F(s) = -\frac{2}{3} \frac{1}{2s+1} + \frac{5}{3} \frac{1}{5s+1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+0.5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+0.2}$$

ラプラス変換表から

$$f(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-0.5t} + \frac{1}{3}e^{-0.2t} \right) \mathbf{1}(t)$$

となる.

例題 5.10

$$F(s) = \frac{2s+3}{s+1}$$

を逆ラプラス変換せよ。

[解] $F(s)$ を次のように変形する

$$F(s) = \frac{2(s+1)+1}{s+1} = 2 + \frac{1}{s+1}$$

これにラプラス変換表を適用して

$$f(t) = 2\delta(t) + e^{-t}\mathbf{1}(t)$$

例題 5.11

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s+1)^2}$$

を逆ラプラス変換せよ。

[解] $F(s)$ は

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+1)^2}$$

と展開できる。 K_2 を求めるため、上式に $(s+1)^2$ を掛ける。

$$(s+1)^2 F(s) = (s+1)K_1 + K_2 \tag{5.9}$$

この式で、 $s = -1$ とおくと右辺第1項は0となり

$$K_2 = (s+1)^2 F(s) \Big|_{s=-1} = 3s+2 \Big|_{s=-1} = -1$$

を得る。次に、 K_1 を求めるため、(5.9)式を s で微分する。

$$\frac{d}{ds} \{(s+1)^2 F(s)\} = K_1$$

すなわち

$$K_1 = \frac{d}{ds}(3s+2) = 3$$

よって

$$F(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

これを逆ラプラス変換して

$$f(t) = (3e^{-t} - te^{-t})\mathbf{1}(t)$$

5.5 ラプラス変換による微分方程式の解法

元々、ラプラス変換は微分方程式を解くために開発されたものである。時間微分が s 領域では s の代数演算になることをすでに見た。この性質のため、微分方程式のラプラス変換が s に関する代数方程式となり、微分方程式の求解が代数方程式の求解に簡単化される。元の微分方程式の解は、変換された代数方程式の解を逆ラプラス変換することによって得られる ((5.10) 参照)。 s 領域解を経るこの方法は、遠回りのように見えるが、多くの場合、解への近道となる。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{微分方程式} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & s \text{ の代数方程式} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 t \text{ 領域解} & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & s \text{ 領域解}
 \end{array} \tag{5.10}$$

いくつかの微分方程式をラプラス変換を用いて解いてみよう。

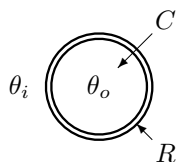


図 5.8: 熱系

例題 5.12 図 5.8 の熱系を考える。容器の熱容量を C ，外部の温度を θ_i ，内部の温度を θ_o とする。 R は壁面の伝熱に関する係数を表す。熱系の微分方程式は次式で与えられる。

$$C\dot{\theta}_o(t) = \frac{1}{R}(\theta_i(t) - \theta_o(t)) \tag{5.11}$$

物理パラメータ C , R は

$$C = 1, R = 1$$

とし、初期値および入力を

$$\theta_o(0) = 0, \theta_i(t) = \mathbf{1}(t)$$

とする。このとき、微分方程式 (5.11) の解 $\theta_o(t)$ を求めよ。

[解] (5.11) 式は

$$\dot{\theta}_o(t) = \mathbf{1}(t) - \theta_o(t)$$

すなわち

$$\dot{\theta}_o(t) + \theta_o(t) = \mathbf{1}(t)$$

となる。この式をラプラス変換すると

$$s\Theta_o(s) - \theta_o(0) + \Theta_o(s) = \frac{1}{s}$$

これから

$$(s+1)\Theta_o(s) = \theta_o(0) + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

よって

$$\Theta_o(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

これを逆ラプラス変換して

$$\theta_o(t) = (1 - e^{-t}) \mathbf{1}(t)$$

を得る. 図 5.9 に θ_i, θ_o のグラフを示す.

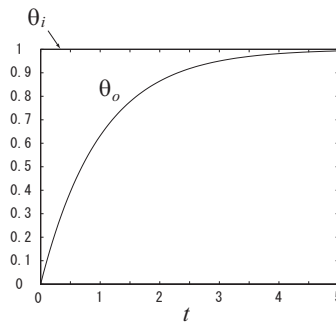


図 5.9: 熱系 ($C = 1, R = 1, \theta_o(0) = 0$) : $\theta_i(t) = \mathbf{1}(t)$ に対する $\theta_o(t)$

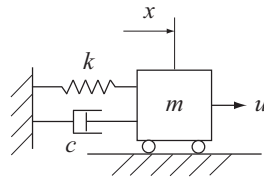


図 5.10: 1 自由度振動系

例題 5.13 1 自由度振動系 (図 5.10) の運動を表す微分方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

の解を求めよ. ただし, 物理パラメータを $m = 1, c = 0, k = 1$, 初期値を $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$, 入力を $u(t) = \mathbf{1}(t)$ とする.

[解] 微分方程式は

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \mathbf{1}(t)$$

となり, これをラプラス変換すると

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + X(s) = \frac{1}{s}$$

初期条件を代入して整理すると

$$(s^2 + 1)X(s) = \frac{1}{s}$$

すなわち

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 1}$$

分子の恒等式から

$$K_1(s^2 + 1) + (K_2s + K_3)s = 1$$

すなわち

$$(K_1 + K_2)s^2 + K_3s + K_1 = 1$$

両辺の係数の比較から

$$K_1 = 1, K_2 = -1, K_3 = 0$$

がわかる。結局、 $X(s)$ は

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

と部分分数展開され、これを逆ラプラス変換して

$$x(t) = (1 - \cos t)\mathbf{1}(t)$$

を得る。 $x(t)$ のグラフを図 5.11 に示す。

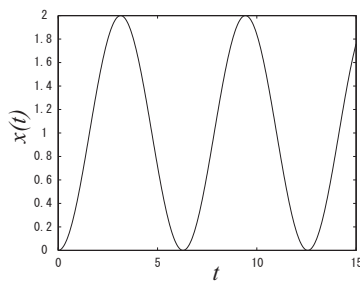


図 5.11: 1 自由度振動系の解 ($m = 1, c = 0, k = 1, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, u(t) = \mathbf{1}(t)$)

例題 5.14 1 自由度振動系

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

の解を求めよ。ただし、物理パラメータは

$$m = 1, c = 1, k = 1$$

とし、初期値として

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

を考える。また、入力は 0 とする。

$$u(t) = 0$$

[解] 微分方程式は

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0$$

である。これをラプラス変換すると

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s) = 0$$

すなわち

$$(s^2 + s + 1)X(s) = sx(0) + \dot{x}(0) + x(0) = s + 1$$

$X(s)$ について解き、ラプラス変換表を適用できるように変形する。

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{(s+0.5)+0.5}{(s+0.5)^2+0.75} \\ &= \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.75} + \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} \cdot \frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2+0.75} \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換すると

$$x(t) = e^{-0.5t} \left(\cos \sqrt{0.75} t + \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} \sin \sqrt{0.75} t \right) \mathbf{1}(t)$$

または

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \mathbf{1}(t)$$

$x(t)$ のグラフを図 5.12 に示す。

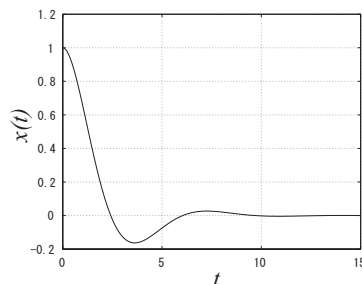


図 5.12: 1 自由度振動系の解 ($m = 1, c = 1, k = 1, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, u(t) = 0$)

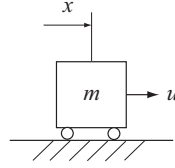


図 5.13: 慣性系

例題 5.15 慣性系 (図 5.13) の運動方程式

$$m\ddot{x}(t) = u(t)$$

の解を求めよ。ただし, $m = 1$ とし, 初期値と入力はそれぞれ

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

$$u(t) = \sin \omega t, \quad t \geq 0$$

とする。

[解] 運動方程式は

$$\ddot{x}(t) = \sin \omega t \mathbf{1}(t)$$

である。これをラプラス変換すると

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

初期値を代入して, $X(s)$ について解き, さらに部分分数展開する。

$$X(s) = \frac{\omega}{s^2(s^2 + \omega^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3 s + K_4}{s^2 + \omega^2}$$

分子の恒等式から

$$K_1 s(s^2 + \omega^2) + K_2(s^2 + \omega^2) + (K_3 s + K_4)s^2 = \omega$$

すなわち

$$(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + K_1\omega^2 s + K_2\omega^2 = \omega$$

これから

$$K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{1}{\omega}, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = -\frac{1}{\omega}$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

これを逆ラプラス変換すると

$$x(t) = \left(\frac{1}{\omega} t - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right) \mathbf{1}(t)$$

を得る。 $x(t)$ のグラフを図 5.14 に示す。

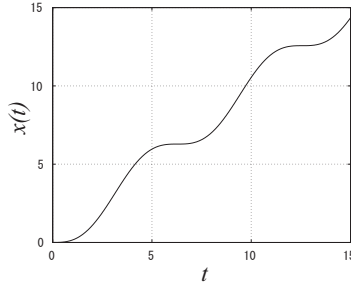


図 5.14: 慣性系の解 ($m = 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $u(t) = \sin t$)

例題 5.16 熱系

$$C\dot{\theta}_o(t) = \frac{1}{R}(\theta_i(t) - \theta_o(t)) \quad (5.12)$$

について, 次の条件に対する解を求めよ.

$$C = 1, R = 1$$

$$\theta_o(0) = 0, \theta_i(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \tau)$$

[解] 微分方程式は

$$\dot{\theta}_o(t) + \theta_o(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \tau)$$

となる. これをラプラス変換すると

$$s\Theta_o(s) - \theta_o(0) + \Theta_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-\tau s}$$

これを $\Theta_o(s)$ について解けば

$$\Theta_o(s) = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+1)}e^{-\tau s}$$

となる. 上式を

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

に注意して逆ラプラス変換すると

$$\theta_o(t) = (1 - e^{-t})\mathbf{1}(t) - (1 - e^{-(t-\tau)})\mathbf{1}(t - \tau)$$

を得る. 入力関数のグラフを図 5.15 に示す. 図 5.16 には, $\mathbf{1}(t)$ が入力されたときの θ_o (実線) と $\mathbf{1}(t - \tau)$ が入力されたときの θ_o (破線) を示している. 解 (図 5.17) は前者から後者を引くことによって得られる.

線形微分方程式 (線形とは, 変数間に和と係数倍以外の演算を含まないことを意味する) の解に対して, 表 5.2 に示すように重ね合わせの原理が成り立つ. 入力が三つ以上ある場合も同様にこの原理が成立する. すなわち, 初期値や入力に対して個々に求めた解を重ね合わせることによって, 初期値や入力を与えたときの解を求めることができる. 重ね合わせの原理は, 微分方程式の解を求めるときにしばしば利用される.

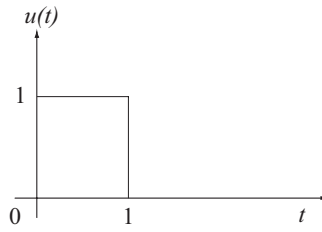


図 5.15: 入力 (パルス関数) $u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$

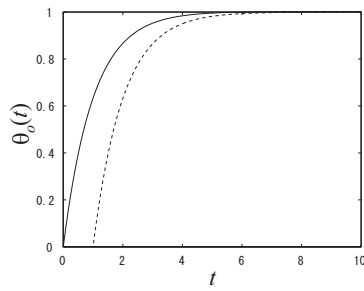


図 5.16: 熱系の解その 1 ($C = 1, R = 1, \theta_o(0) = 0, u(t) = \mathbf{1}(t), u(t) = \mathbf{1}(t - 1)$)

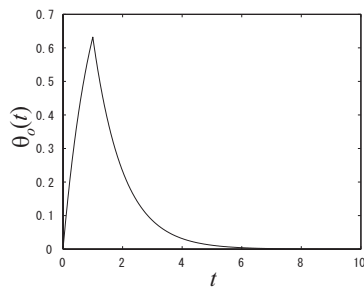


図 5.17: 熱系の解その 2 ($C = 1, R = 1, \theta_o(0) = 0, u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$)

表 5.2: 重ね合わせの原理

初期値に対する解	$y_0(t)$
入力 $u_1(t)$ に対する解	$y_1(t)$
入力 $u_2(t)$ に対する解	$y_2(t)$
上記すべてがある場合の解	$y_0(t) + y_1(t) + y_2(t)$

5.6 問題

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

$$(1) f(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) \mathbf{1}(t)$$

$$(2) f(t) = e^{at} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) \mathbf{1}(t)$$

$$(3) f(t) = \sin(\omega t + \phi) \mathbf{1}(t)$$

$$(4) f(t) = e^{at} \sin(\omega t + \phi) \mathbf{1}(t)$$

2. 次の関数のグラフを描き, そのラプラス変換を求めよ.

$$(1) f(t) = (t - 1) \mathbf{1}(t)$$

$$(2) f(t) = (t - 1) \mathbf{1}(t - 1)$$

$$(3) f(t) = \mathbf{1}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{1}(t - 1) - \frac{1}{2} \mathbf{1}(t - 2)$$

3. CR 回路系の微分方程式

$$\dot{e}_o(t) + \frac{1}{CR} e_o(t) = \dot{e}_i(t)$$

の解 $e_o(t)$ を求めよ. パラメータ値, 初期値, 入力は次のとおりとする.

$$CR = 1, \quad e_o(0) = 0, \quad e_i(t) = e^{-t} \mathbf{1}(t)$$

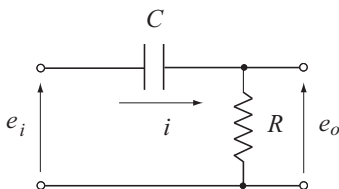


図 5.18: 問題 3 : CR 回路系

4. 問題 3 の CR 回路系で

$$e_i(t) = \sin \omega t \cdot \mathbf{1}(t)$$

とした場合の解を求めよ。その他の条件は問題3と同じとする。

5. 1自由度振動系の微分方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

の解を求めよ。パラメータ値，初期値，入力は次のとおりである。

$$m = 1, \quad c = 0.1, \quad k = 1$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

6. 問題5の1自由度振動系で

$$m = 1, \quad c = 3, \quad k = 2$$

$$x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

の場合の解を求めよ。

第6章 微分方程式と伝達関数

これまでに扱った微分方程式から、動的システムの数学モデルを表す微分方程式の一般的表現を求め、さらに、伝達関数という新しい概念を導入する。伝達関数とは、時間微分を s の掛け算に対応させるという規則のもとで、動的システムの入出力関係を表す数学モデルである。特に、複数のシステムで構成される結合系の数学モデルを求めるときに威力を発揮する。微分方程式と伝達関数は動的システムのモデルとして等価なもので、一方から他方を求めることができる。伝達関数の有用性はモデリングに留まらず、周波数領域における制御系の解析・設計の基礎となっていることにも及ぶ。

6.1 微分方程式の一般形

これまでに扱った動的システムとそれらの微分方程式を表 6.1 (1 次系)、表 6.2 (2 次系) に示す。

表 6.1: 1 次系の微分方程式

水槽系	$C\dot{h}(t) = q(t)$
熱系	$C\dot{\theta}_1(t) = \frac{1}{R}(\theta_0(t) - \theta_1(t))$
RC 回路系	$\dot{v}_o(t) = \frac{1}{RC}(v_i(t) - v_o(t))$
CR 回路系	$\dot{e}_o(t) + \frac{1}{CR}e_o = \dot{e}_i$
ばね-ダンパー系	$c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$

一般に、入力を $u(t)$ 、出力を $y(t)$ とすると、1 次系の一般的表現は次式となる。

$$a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

同様に、2 次系の一般的表現は次式である。

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

また、静的システムを 0 次系と呼べば、0 次系の一般的表現は次式である。

$$a_0y(t) = b_0u(t)$$

表 6.2: 2 次系の微分方程式

慣性系	$m\ddot{x}(t) = u(t)$
減衰のある 1 自由度振動系	$m\ddot{x}(t) + c\dot{x} + kx(t) = u(t)$
RLC 回路系	$LC\ddot{e}_o(t) + RC\dot{e}_o(t) + e_o(t) = e_i(t)$
質量-ダンパー-ばね系	$m\ddot{x}_1(t) = \frac{m}{k}\ddot{u}(t) + \frac{m}{c}\dot{u}(t) + u(t)$
LCR 回路系	$\frac{L}{R}\ddot{e}_o(t) + \dot{e}_o(t) + \frac{1}{CR}e_o(t) = \dot{e}_i(t)$

これらの式では、 $y(t)$ の最高階の係数を常に 1 にすることができる。よって、0 から 2 次系の微分方程式の一般的表現は次のようになる。

0 次系（静的システム）の一般的表現

$$y(t) = b_0 u(t) \quad (6.1)$$

1 次系の一般的表現

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (6.2)$$

2 次系の一般的表現

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (6.3)$$

6.2 伝達関数の定義

次に、上記の微分方程式をブロック線図で表すことを考える。0 次系の場合、対応するブロック線図は図 6.1 のようになる。ブロック線図の一般的ルールは次のとおりである。

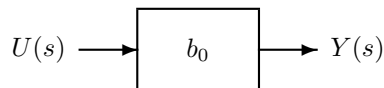


図 6.1: 0 次系のブロック線図

1. 信号を矢印で表す。
2. 信号を大文字で表す。

3. ブロックは入力と出力を持つ.
4. 入力にブロックの内容が掛けられて出力となる.

1次系をブロック線図で表すため, (6.2) 式を次のように変換する.

$$sY(s) + a_0Y(s) = b_1sU(s) + b_0U(s) \quad (6.4)$$

すなわち,

$$(s + a_0)Y(s) = (b_1s + b_0)U(s)$$

これを $Y(s)$ について解いて

$$Y(s) = \frac{b_1s + b_0}{s + a_0} U(s) \quad (6.5)$$

を得る. ここで, 用いた変換のルールは次のとおりである.

1. 変数を大文字にする.
2. d/dt の演算を s を掛ける演算で置き換える.

この変換は, 微分方程式を初期条件がすべて $\mathbf{0}$ という条件でラプラス変換する変換であることに注意する. (6.5) 式のブロック線図は図 6.2 となる.

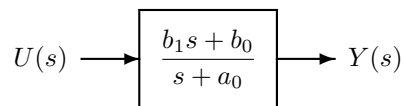


図 6.2: 1次系のブロック線図

同様に, 2次系の微分方程式 (6.3) 式を変換すると

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_2s^2U(s) + b_1sU(s) + b_0U(s)$$

となる. これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} U(s) \quad (6.6)$$

を得る. 対応するブロック線図は図 6.3 である.

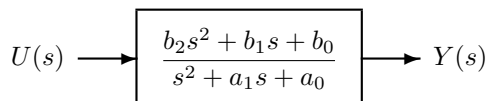


図 6.3: 2次系のブロック線図

ブロックの内容を伝達関数という。すなわち，図 6.3 の場合，伝達関数は

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

である。一般的な伝達関数 $G(s)$ を持つブロック線図を図 6.4 に示す。

ブロック線図から元の微分方程式を求めるには，以上の逆を行えばよい。

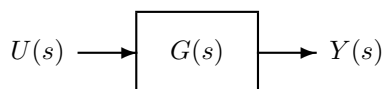


図 6.4: ブロック線図

伝達関数の定義 システムの伝達関数は，すべての初期値を 0 としたときの，システムの入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ のラプラス変換の比，すなわち

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

で定義される。

例題 6.1 水槽系

$$C\dot{h}(t) = q(t) \tag{6.7}$$

の伝達関数を求めよ。ただし，入力を $q(t)$ ，出力を $h(t)$ とする。

[解] (6.7) 式を初期値 0 のもとでラプラス変換すると

$$CsH(s) = Q(s)$$

よって，伝達関数は

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Cs}$$

である。

例題 6.2 熱系

$$C\dot{\theta}_1(t) = \frac{1}{R}(\theta_0(t) - \theta_1(t)) \tag{6.8}$$

の伝達関数を求めよ。ただし，入力を $\theta_0(t)$ ，出力を $\theta_1(t)$ とする。

[解] (6.8) 式を変換すると

$$Cs\Theta_1(s) = \frac{1}{R}(\Theta_0(s) - \Theta_1(s))$$

すなわち

$$CRs\Theta_1(s) + \Theta_1(s) = \Theta_0(s)$$

よって、伝達関数は

$$\frac{\Theta_1(s)}{\Theta_0(s)} = \frac{1}{CRs + 1}$$

例題 6.3 慣性系

$$m\ddot{x}(t) = u(t) \tag{6.9}$$

の伝達関数を求めよ。ただし、入力を $u(t)$ 、出力を $x(t)$ とする。

[解] (6.9) 式を変換すると

$$ms^2X(s) = U(s)$$

よって、伝達関数は

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2}$$

例題 6.4 減衰のある 1 自由度振動系

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \tag{6.10}$$

の伝達関数を求めよ。ただし、入力を $u(t)$ 、出力を $x(t)$ とする。

[解] (6.10) 式を変換すると

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = U(s)$$

よって、伝達関数は

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

例題 6.5 伝達関数

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s + 5}{s^2 + 2s + 3} \tag{6.11}$$

に対する微分方程式を求めよ。

[解] (6.11) 式から

$$(s^2 + 2s + 3)Y(s) = (4s + 5)U(s)$$

これから

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 4\dot{u} + 5u(t)$$

を得る。

6.3 系の結合と伝達関数

系1の出力が系2の入力となる結合系の微分方程式は、たとえば、次のような連立微分方程式となる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) + y_1(t) &= 2\dot{u}(t) + u(t) \\ \dot{y}_2(t) + 3y_2(t) &= 4\dot{y}_1 + 5y_1(t) \end{aligned}$$

これらから、入力 $u(t)$ と出力 $y_2(t)$ の微分方程式を求めるには他の変数 y_1, \dot{y}_1 を消去する必要がある。さらに、三つ以上の系の結合についても同様に連立微分方程式から入出力関係を表す微分方程式を求めることができるが、消去すべき変数の数が増大し、計算も煩雑となる。一方、以下に示すように、伝達関数を利用すれば、結合系の入出力関係を容易に求めることができる。

系1と系2の伝達関数をそれぞれ $G_1(s), G_2(s)$ としよう。すなわち

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}$$

これから、 $U(s)$ から $Y_2(s)$ の伝達関数 $G(s)$ は $G_1(s)$ と $G_2(s)$ の積として計算できることがわかる。

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \times \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (6.12)$$

以上から、図6.6は図6.7に置き換えることができる。また、(6.12)式から、 $u(t)$ と $y_2(t)$ の微分方程式を求めることもできる。

三つ以上の系の結合についても同じ原理が適用できる。たとえば、三つの系の結合では

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}, \quad G_3(s) = \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)}$$

なので、 $U(s)$ から $Y_3(s)$ までの伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{Y_3(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \times \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \times \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

と計算できる。

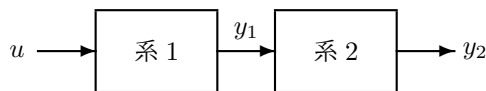


図 6.5: 二つの系の結合（直列結合）

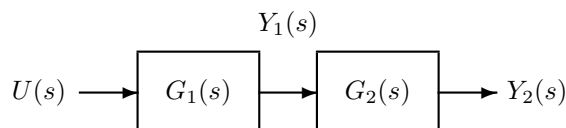


図 6.6: 結合系のブロック線図

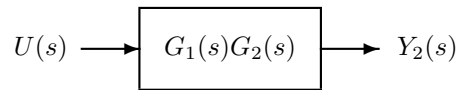


図 6.7: 結合系のブロック線図の等価変換

例題 6.6 次の結合系の入力 $u(t)$ と出力 $y_2(t)$ に関する微分方程式を求めよ。

$$\dot{y}_1(t) + y_1(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

$$\dot{y}_2(t) + 3y_2(t) = 4\dot{y}_1 + 5y_1(t)$$

[解] 伝達関数を求めるため、すべての初期値を 0 としてラプラス変換すると

$$sY_1(s) + Y_1(s) = 2sU(s) + U(s)$$

$$sY_2(s) + 3Y_2(s) = 4sY_1(s) + 5Y_1(s)$$

これから、各伝達関数は

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{2s+1}{s+1}, \quad \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{4s+5}{s+3}$$

よって、 $U(s)$ から $Y_2(s)$ までの伝達関数は

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \times \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{2s+1}{s+1} \times \frac{4s+5}{s+3} = \frac{8s^2 + 14s + 5}{s^2 + 4s + 3}$$

上式から

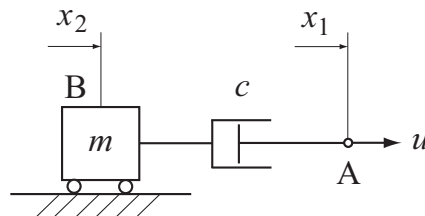
$$(s^2 + 4s + 3)Y_2(s) = (8s^2 + 14s + 5)U(s)$$

これを微分方程式に直すと

$$\ddot{y}_2(t) + 4\dot{y}_2(t) + 3y_2(t) = 8\ddot{u}(t) + 14\dot{u}(t) + 5u(t)$$

次の例題で示すように伝達関数法はモデリング時にも利用できる。

例題 6.7

図 6.8: 質量-ダンパー系 (自由). 入力: $u(t)$, 出力: $x_1(t)$

質量-ダンパー系 (図 6.8) の入力 $u(t)$ と出力 $x_1(t)$ に関する微分方程式を求めよ。

[解] A 点における力のつりあいから

$$u - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \tag{6.13}$$

B点における力のつりあいから

$$c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - m\ddot{x}_2 = 0 \quad (6.14)$$

を得る. (6.13), (6.14) 式を変換すると

$$U(s) - cs(X_1(s) - X_2(s)) = 0 \quad (6.15)$$

$$cs(X_1(s) - X_2(s)) - ms^2X_2(s) = 0 \quad (6.16)$$

を得る. (6.15), (6.16) 式から

$$ms^2X_2(s) = U(s), \quad X_2(s) = \frac{U(s)}{ms^2}$$

これを (6.15) 式に代入すると

$$U(s) - cs \left(X_1(s) - \frac{U(s)}{ms^2} \right) = 0$$

上式に ms/c を掛けて整理すると

$$ms^2X_1(s) = \frac{m}{c}sU(s) + U(s)$$

これを微分方程式に直すと

$$m\ddot{x}_1(t) = \frac{m}{c}\dot{u}(t) + u(t)$$

6.4 問題

1. 次の微分方程式の伝達関数を求めよ.

(1) ばね-ダンパー系 (直列結合) 入力: $u(t)$, 出力: $x_1(t)$

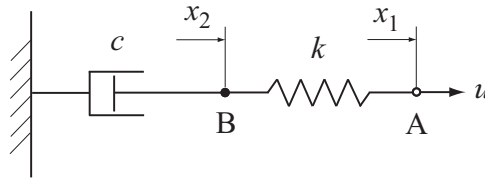


図 6.9: ばね-ダンパー系 (直列結合). 入力: $u(t)$, 出力: $x_1(t)$

$$k\dot{x}_1(t) = \dot{u}(t) + \frac{k}{c}u(t)$$

(2) 質量-ダンパー-ばね系 (自由) 入力: $u(t)$, 出力: $x_1(t)$

$$m\ddot{x}_1(t) = \frac{m}{k}\ddot{u}(t) + \frac{m}{c}\dot{u}(t) + u(t)$$

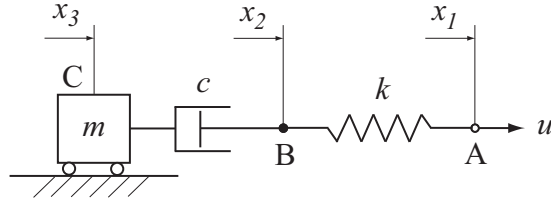


図 6.10: 質量-ダンパー-ばね系 (自由). 入力: $u(t)$, 出力: $x_1(t)$

2. 次の伝達関数が表す微分方程式を求めよ.

$$(1) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s+1}{s+3} \quad (2) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

3. 次の結合系に対する入力と出力の微分方程式を求めよ.

(1) 入力: $u(t)$, 出力: $y_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + 5y_1(t) = 2\dot{u}(t) + u(t) \\ \dot{y}_2(t) + 3y_2(t) + y_2(t) = \dot{y}_1 + 5y_1(t) \end{cases}$$

(2) 入力: $u(t)$, 出力: $y_3(t)$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + y_1(t) = u(t) \\ \dot{y}_2(t) + y_2(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_3(t) + y_3(t) = y_2(t) \end{cases}$$

(3) 入力: $u(t)$, 出力: $y_3(t)$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + y_1(t) = 2\dot{u}(t) + u(t) \\ 2\dot{y}_2(t) + y_2(t) = 4\dot{y}_1(t) + 3y_1(t) \\ 4\dot{y}_3(t) + 3y_3(t) = y_2(t) \end{cases}$$

第7章 ブロック線図と等価変換

複数のシステム間の信号の流れを図式的に表すツールとしてブロック線図がある。結合されたシステム全体の入出力関係を表す伝達関数を求める問題は、代数的に解くこともできるが、ブロック線図を用いればより簡単に解が得られる。ここでは、ブロック線図の構成要素と基本的な等価変換を説明し、いくつかのブロック線図の等価変換を求める。

7.1 ブロック線図の構成要素

図 7.1 にブロック線図の構成要素を示す。信号は矢印で表し、適当な場所に $X(s)$ などの記号を記す。システムはブロックで表し、ブロックの中に伝達関数を書く。二つの信号間の加算、減算は加え合せ点 \circ で表す。このとき、加算か減算かを示す $+$ または $-$ の記号を近くに書く。同じ信号を別のところで使いたい場合、引き出し点によって信号を複製できる。

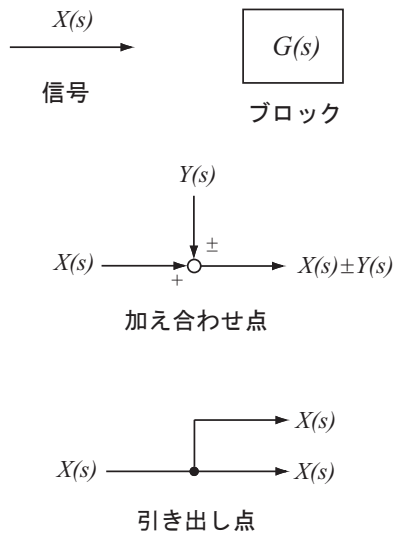


図 7.1: ブロック線図の構成要素

7.2 等価変換

基本的な等価変換は次の三つである。

1. 直列結合

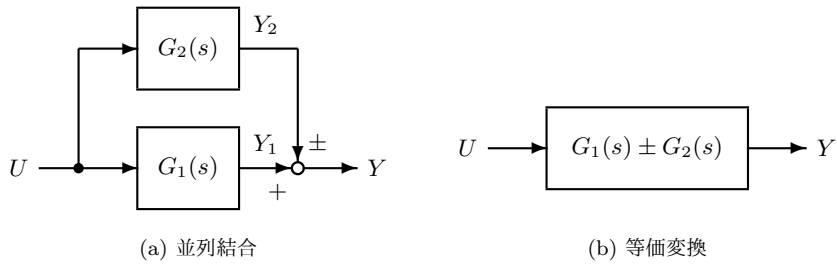


図 7.3: 並列結合の等価変換

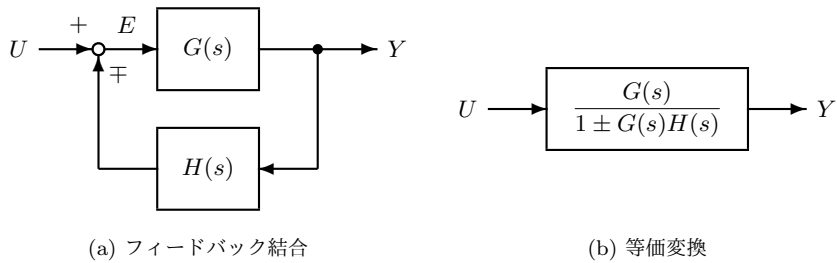


図 7.4: フィードバック結合の等価変換

- 隣り合う加え合わせ点は交換可能である。
- 隣り合う引き出し点は交換可能である。
- 隣り合う加え合わせ点と引き出し点は交換できない。

例題 7.1

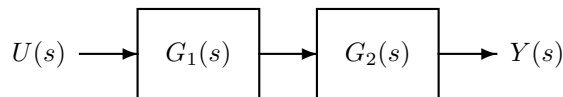


図 7.5: 例題 7.1 のブロック線図

図 7.5 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。ただし

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{2s+1}{s+2}$$

とする。

[解]

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{s+1} \times \frac{2s+1}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

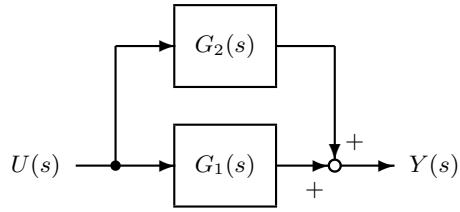


図 7.6: 例題 7.2 のブロック線図

例題 7.2

図 7.6 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。ただし

$$G_1(s) = 1, \quad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

とする。

[解]

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$$

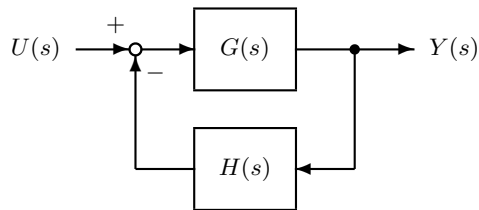
例題 7.3

図 7.7: 例題 7.3 のブロック線図

図 7.7 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。ただし

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \quad H(s) = s+1$$

とする。

[解]

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{s+1}{s(s+2)}} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

例題 7.4 図 7.8 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。ただし

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

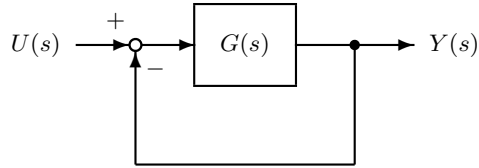


図 7.8: 例題 7.4 のブロック線図

とする.

[解] この場合, $H(s) = 1$ である. よって

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$

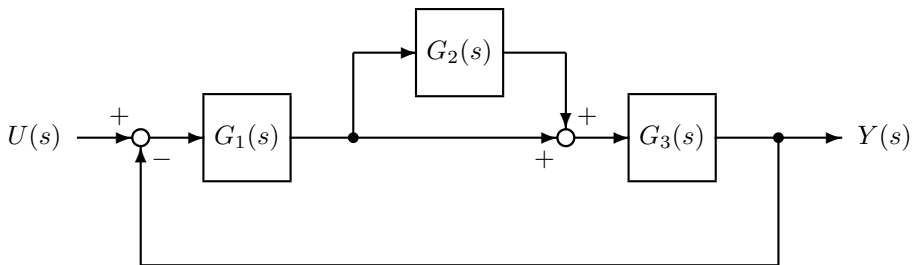


図 7.9: 例題 7.5 のブロック線図

例題 7.5 図 7.9 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ.

[解] 等価変換 1, 2 ののち

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_3(s)(1 + G_2(s))}{1 + G_1(s)G_3(s)(1 + G_2(s))}$$

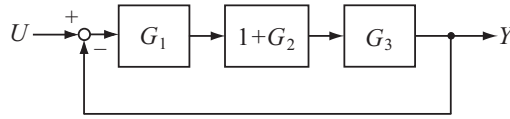
を得る.

例題 7.6 図 7.11 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ.

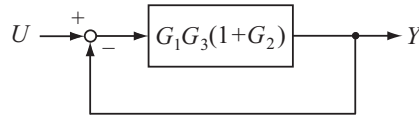
[解] 図 7.12 の等価変換 1, 2, 3 と進み

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)}}{1 + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)}} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

を得る.



等価変換1



等価変換2

図 7.10: ブロック線図の等価変換

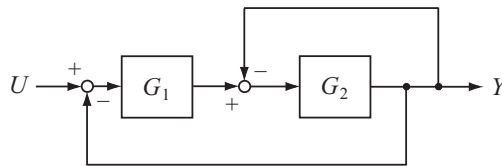
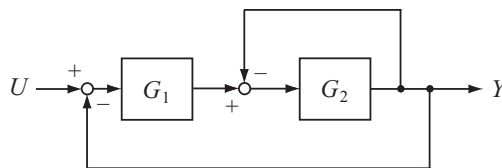
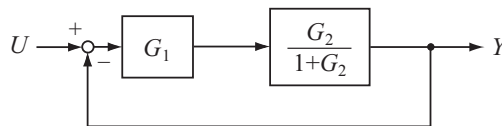


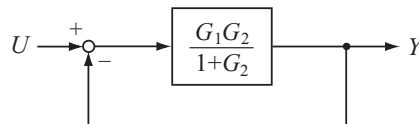
図 7.11: 例題 7.6 のブロック線図



等価変換1



等価変換2



等価変換3

図 7.12: 例題 7.6 のブロック線図の等価変換

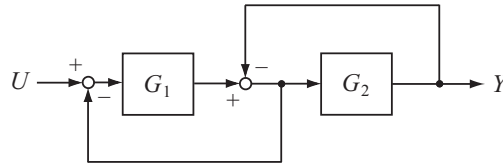


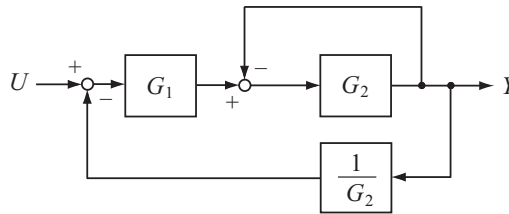
図 7.13: 例題 7.7 のブロック線図

例題 7.7 図 7.13 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ.

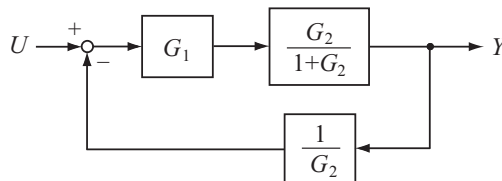
[解] 図 7.14 の等価変換 1, 2, 3 と進み

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)}}{1 + \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(1+G_2(s))}} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)+G_2(s)}$$

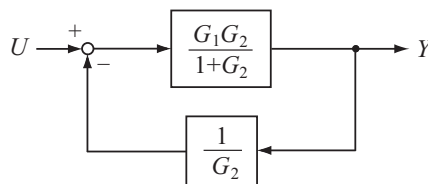
を得る.



等価変換1



等価変換2



等価変換3

図 7.14: 例題 7.7 のブロック線図の等価変換

例題 7.8 図 7.15 のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ.

[解] 図 7.16 の等価変換 1, 2, 3 と進み

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(1+G_1(s))G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

を得る.

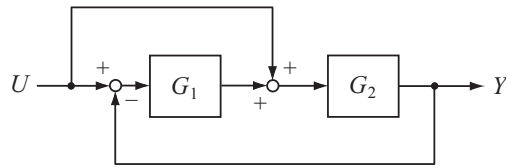
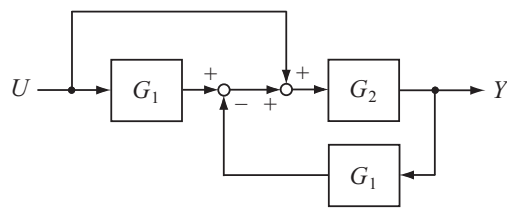
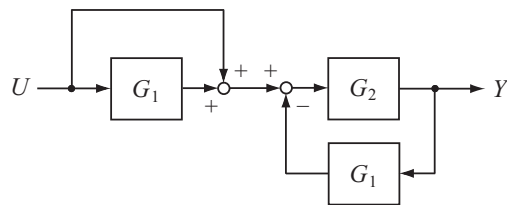


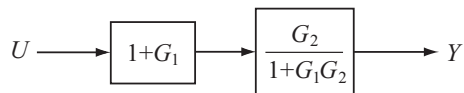
図 7.15: 例題 7.8 のブロック線図



等価変換1



等価変換2



等価変換3

図 7.16: 例題 7.8 のブロック線図の等価変換

7.3 問題

1. 以下のブロック線図の $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。

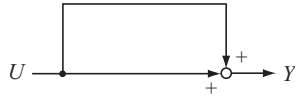


図 7.17: (1) のブロック線図

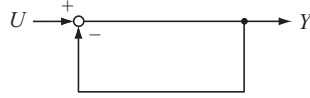


図 7.18: (2) のブロック線図

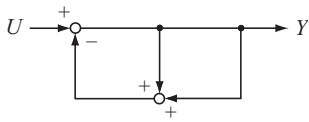


図 7.19: (3) のブロック線図

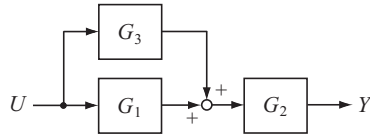


図 7.20: (4) のブロック線図

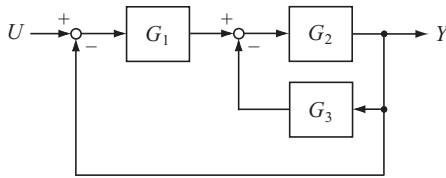


図 7.21: (5) のブロック線図

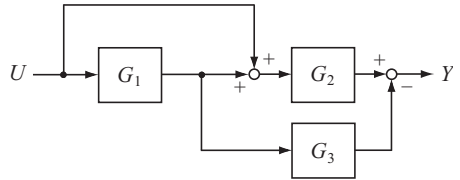


図 7.22: (6) のブロック線図

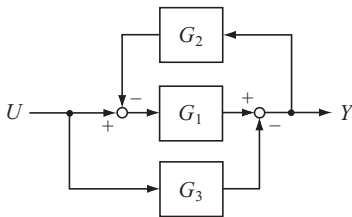


図 7.23: (7) のブロック線図

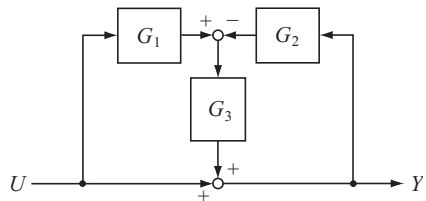


図 7.24: (8) のブロック線図

第8章 ブロック線図のモデリングへの応用

回路系は抵抗，コンデンサ，コイルのインピーダンス（広義の抵抗）の伝達関数を用いて，比較的簡単に，ブロック線図に置き換えることができる．よって，回路系から得られたブロック線図を等価変換すれば，回路系の入出力関係を表す伝達関数を求めることができる．この方法はインピーダンス法と呼ばれ，キルヒホッフの法則から回路系の方程式を求めて伝達関数を計算する方法に比べ計算が簡単になる．インピーダンス法は力学系にも適用できるが，特に，回路系に適している．

8.1 インピーダンス法による回路系のモデリング

ブロック線図による回路系のモデリング法を紹介しよう．

抵抗，コンデンサ，コイルの入出力関係と伝達関数を表 8.1 に示す．

表 8.1: 抵抗，コンデンサ，コイルの入出力関係と伝達関数

要素	入出力関係 (t 領域)	入出力関係 (s 領域)	伝達関数 $\frac{V(s)}{I(s)}$
抵抗	$v(t) = Ri(t)$	$V(s) = RI(s)$	R
コンデンサ	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$	$\frac{1}{Cs}$
コイル	$v(t) = L\dot{i}(t)$	$V(s) = LsI(s)$	Ls

$I(s)$ を入力， $V(s)$ を出力とする伝達関数，すなわち， R ， $1/Cs$ ， Ls を各要素のインピーダンスという（図 8.1）．伝達関数を計算する際，以下に注意する．

1. 要素の直列結合のインピーダンスは各インピーダンスの和である．

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

2. 要素の並列結合のインピーダンスの逆数は各インピーダンスの逆数の和である．

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

インピーダンスの逆数をアドミッタンスという．

例題 8.1 図 8.2 の要素のインピーダンスを求めよ．

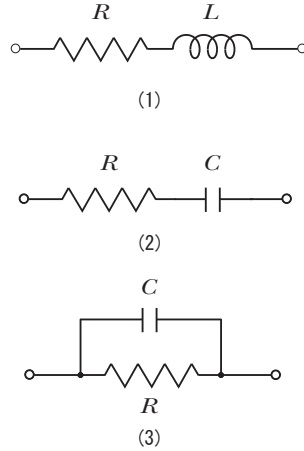
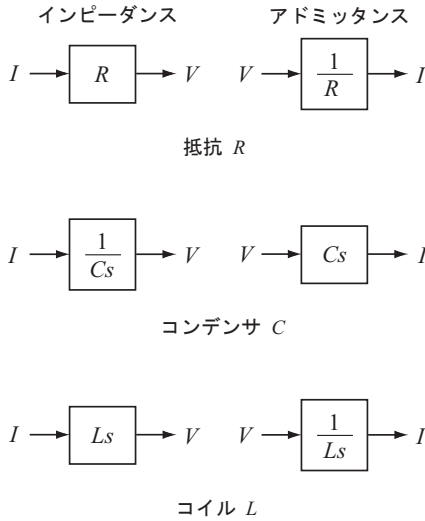


図 8.1: 抵抗, コンデンサ, コイルの伝達関数表示

図 8.2: 例題 8.1 の要素

[解] (1), (2) には直列結合の公式を, (3) には並列結合の公式を用いる.

$$(1) R + Ls \quad (2) R + \frac{1}{Cs} \quad (3) \frac{1}{\frac{1}{R} + Cs} = \frac{R}{1 + CRs}$$

例題 8.2 図 8.3 の RC 回路系の伝達関数を求めよ. 入力は $e_i(t)$, 出力は $e_o(t)$ とする.

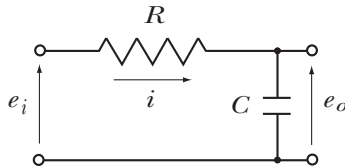


図 8.3: RC 回路系

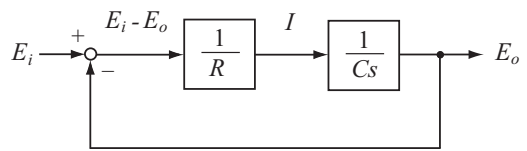


図 8.4: RC 回路系のブロック線図

[解] 図 8.3 の回路に対応するブロック線図を図 8.4 に示す. 回路からブロック線図を作る方法は次のようである. まず, 抵抗 R の入力を電位差 $E_i - E_o$, 出力を電流 I とみなすと, 抵抗部の伝達関数は $1/R$ となる. 次に, 抵抗からの出力 I がコンデンサ C の入力となり, 電圧 E_o が出力されると考える. このとき, コンデンサ部の伝達関数は $1/Cs$ となる. さらに, コンデンサの出力 E_o は信号 $E_i - E_o$ を作るために入力側にフィードバックされる. 以上でブロック線図が完成する. このブロック線図を等価変換して

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{CRs}} = \frac{1}{CRs + 1}$$

を得る. もちろん, これから, 回路系の微分方程式も書ける. 上式を変形すると

$$(CRs + 1)E_o(s) = E_i(s)$$

すなわち

$$CR\dot{e}_o(t) + e_o(t) = e_i(t)$$

となる.

例題 8.3 図 8.5 の回路系の伝達関数を求めよ. 入力は $e_i(t)$, 出力は $e_o(t)$ とする.

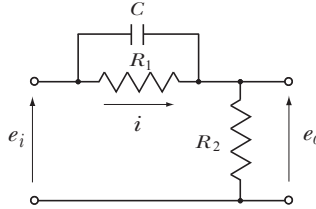


図 8.5: 例題 8.3 の回路系

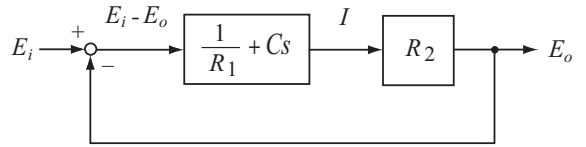


図 8.6: 図 8.5 の回路系に対する
ブロック線図

[解] R_1 と C は並列結合なので, インピーダンスの逆数は, 各インピーダンスの逆数の和となる.

$$\frac{1}{R_1} + Cs$$

よって, 図 8.5 の回路から図 8.6 のブロック線図を得る. これを等価変換して

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 \left(\frac{1}{R_1} + Cs \right)}{1 + R_2 \left(\frac{1}{R_1} + Cs \right)} = \frac{R_1 R_2 Cs + R_2}{R_1 R_2 Cs + R_1 + R_2}$$

例題 8.4 図 8.7 の RLC 回路系の伝達関数を求めよ. 入力は $e_i(t)$, 出力は $e_o(t)$ とする.

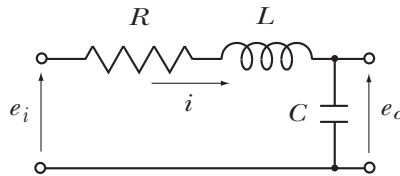


図 8.7: RLC 回路系

[解] R と L は直列結合なので, インピーダンスは各インピーダンスの和となる.

$$R + Ls$$

よって, 図 8.7 の回路から図 8.8 のブロック線図を得る. これを等価変換して

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1 + \frac{R + Ls}{LCs^2 + RCs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

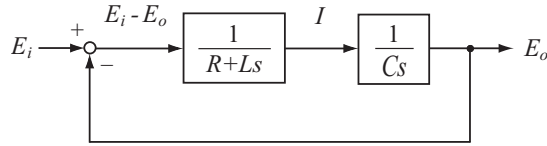


図 8.8: 図 8.7 の回路系に対するブロック線図

例題 8.5 図 8.9 の回路系の伝達関数を求めよ。入力は $e_i(t)$, 出力は $e_o(t)$ とする。

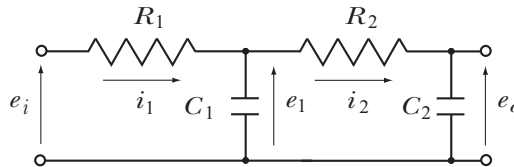


図 8.9: 例題 8.5 の回路系

[解] 回路系に対するブロック線図として図 8.10 を得る。これを等価変換 1, 2 と変換し、結局

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{R_1 C_2 s}} \\ &= \frac{1}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

例題 8.6 図 8.11 の回路系の伝達関数を求めよ。入力は $e_i(t)$, 出力は $e_o(t)$ とする。

[解] 図 8.11 の回路系に対するブロック線図として図 8.12 を得る。これを図 8.13, 8.14 と等価変換して

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_2 (C_1 + C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_2 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + 1}$$

を得る。

8.2 問題

- 次の回路系 (1), (2), (3) の伝達関数をインピーダンス法で求めよ。入力は $e_i(t)$, 出力は $e_o(t)$ とする。
- 図 8.14 のブロック線図を等価変換して $E_i(s)$ から $E_o(s)$ までの伝達関数を求めよ。

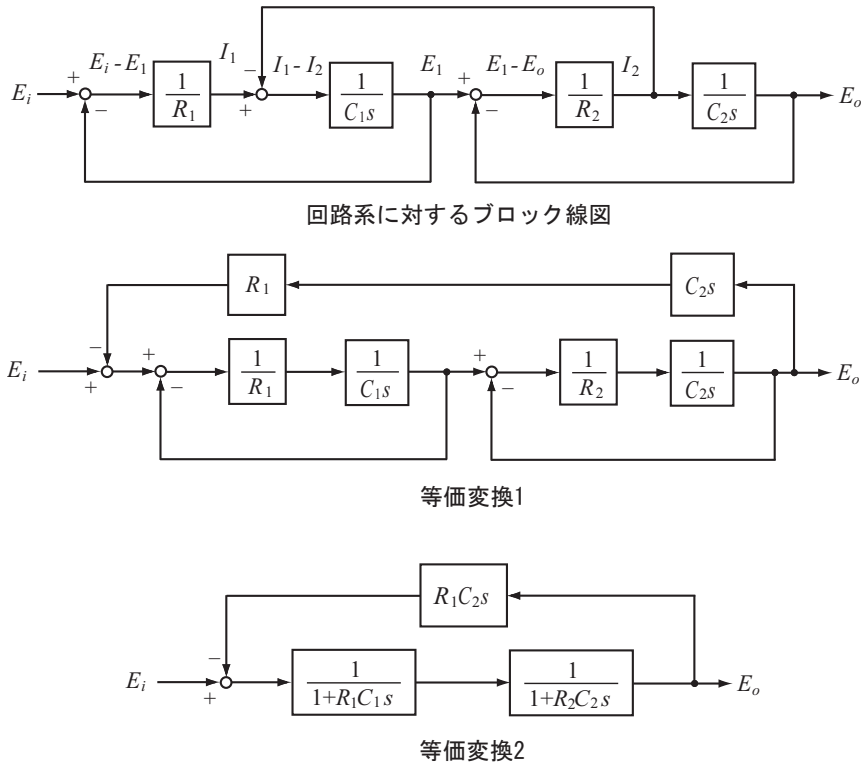


図 8.10: 図 8.9 の回路系に対するブロック線図と等価変換

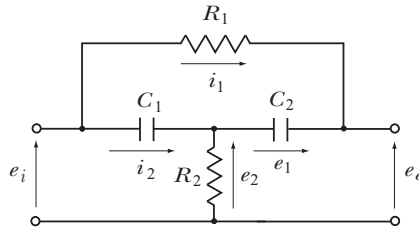


図 8.11: 例題 8.6 の回路系

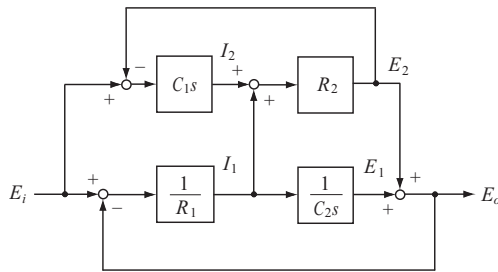
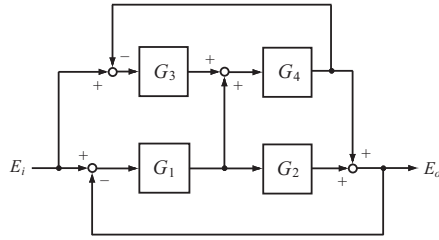
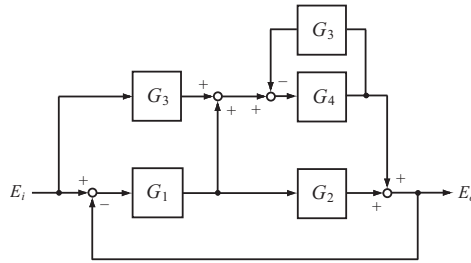


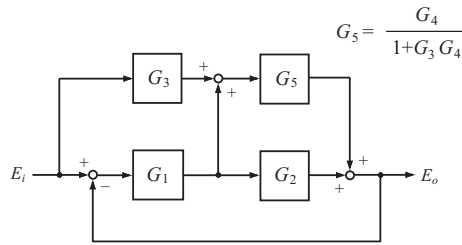
図 8.12: 図 8.11 の回路系に対するブロック線図



回路のブロック線図



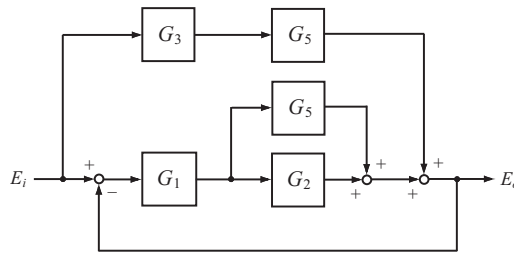
等価変換1



$$G_5 = \frac{G_4}{1 + G_3 G_4}$$

等価変換2

図 8.13: ブロック線図の等価変換



等価変換3

図 8.14: ブロック線図の等価変換

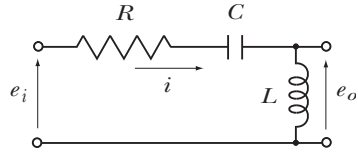


図 8.15: (1) RCL 回路系

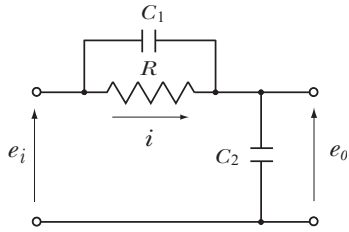


図 8.16: (2) 回路系

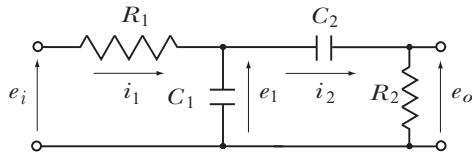


図 8.17: (3) 回路系

第9章 安定性と安定判別法

システムの安定性とは、有限振幅の入力をシステムに与え続けたとき、出力も有限振幅となる性質のことである。逆に、システムの出力振幅が無限大に発散するとき、システムは不安定であるという。通常、制御系では、出力をある範囲に収めたいという要求があるので、安定性は制御系にとって必須の条件となる。本章では、システムの安定性を定義し、3次系までのシステムに対して安定性を判別するための条件式を導出する。

9.1 安定性の定義

システムの出力を応答という。安定性は、有限な入力を与え続けても、応答が有限に留まるという時間領域の性質として定義されるが、安定判別の条件は、伝達関数 $G(s)$ の分母多項式の零点（極という）に関する条件として与えられる。

システムの伝達関数を $G(s)$ とし、 $G(s)$ の分母の次数は分子の次数より大きいかまたは等しい ($G(s)$ はプロパーという) とする。このとき、システムの安定性は次のように定義される。

[安定性の定義] 任意の有界な入力 $u(t)$ ($|u(t)| < \infty$) に対する応答 $y(t)$ が有界 ($|y(t)| < \infty$) となるとき、 $G(s)$ は安定という (図 9.1)。ただし、すべての初期値を 0 とする。

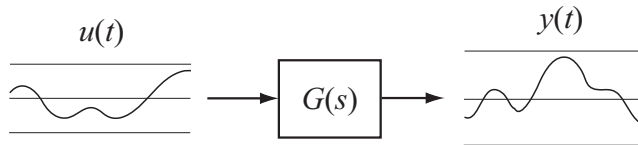


図 9.1: 安定性の定義

いま、伝達関数 $G(s)$ のシステムを考えよう。伝達関数の定義から、すべての初期値を 0 とした場合の入力と出力のラプラス変換の比が伝達関数である。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

これから

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

となり、上式を逆ラプラス変換すれば応答 $y(t)$ が得られる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \tag{9.1}$$

すべての初期値を 0 としたこの応答を強制応答という。

特に、単位ステップ関数 $u(t) = \mathbf{1}(t)$ ($U(s) = 1/s$) に対する強制応答をステップ応答という。ステップ応答と安定性との間に次の関係があることが知られている。

[安定性条件] $G(s)$ が安定であるための必要十分条件は、ステップ応答 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$ が一定値に収束することである。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K_0 \quad (9.2)$$

いま、 $G(s)$ として具体的に

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

を考える。 p_1, p_2 は $G(s)$ の極である。 z_1 は $G(s)$ の零点という。また、 $G(s)$ の分母多項式 $A(s)$ を 0 として得られる方程式を特性方程式という。

$$\text{特性方程式: } A(s) = 0$$

特性方程式の根（解）を特性根という。したがって、特性根は $G(s)$ の極である。

(9.2) 式の条件を検証しよう。 $G(s)$ の極 p_1, p_2 に 0 が含まれず、 $p_1 \neq p_2$ のとき $Y(s) = G(s)/s$ は次のように部分分数展開される。

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2}$$

これを逆ラプラス変換すれば

$$y(t) = (K_0 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}) \mathbf{1}(t)$$

これから、 $y(t)$ が一定値に収束する条件として

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, 2$$

を得る。この条件は、 p_1, p_2 が実数の場合明らかである。 p_1, p_2 が複素数の場合

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

とおけば

$$e^{p_1 t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

と表されるので、やはり、 $\operatorname{Re} p_i = \sigma < 0$ のとき

$$e^{p_i t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad i = 1, 2$$

となることがわかる。

次に、 $G(s)$ が重複極 $p_1 = p_2$ を持つ場合を考える。この場合、 $Y(s) = G(s)/s$ は

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{(s - p_1)^2}$$

と展開され, $y(t)$ は

$$y(t) = (K_0 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t}) \mathbf{1}(t)$$

となる. $t e^{p_1 t}$ という関数の収束性が問題となるが, この関数も $\operatorname{Re} p_1 < 0$ のとき 0 に収束する. このことは, 次の例題から理解できる.

例題 9.1 極限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t}$$

を求めよ.

[解]

$$t e^{-t} = \frac{t}{e^t} = \frac{t}{1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \dots}$$

分子・分母を t で割り, $t \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1/t + 1 + t/2! + t^2/3! + \dots} = 0$$

$G(s)$ の極に 0 が含まれる場合, $Y(s) = G(s)/s$ の部分分数展開に K_1/s^2 や K_2/s^3 (0 の重複極の場合) が現れ, これらの逆ラプラス変換がそれぞれ $K_1 t \mathbf{1}(t)$, $K_2 t^2/2 \mathbf{1}(t)$ であることから, ステップ応答が一定値に収束しないことがわかる.

以上から安定性の条件として次を得る.

[安定性条件] $G(s)$ が安定であるための必要十分条件は, $G(s)$ の極の実部がすべて負であることである.

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad \forall i \tag{9.3}$$

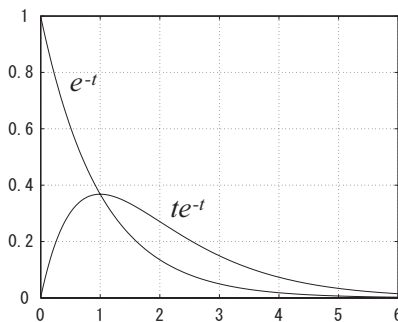


図 9.2: e^{-t} と $t e^{-t}$ のグラフ

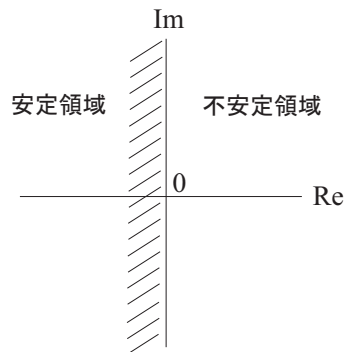


図 9.3: 複素平面における極の安定領域と不安定領域

複素平面における極の安定領域 (実部が負の領域) と不安定領域 (実部が非負の領域) を図 9.3 に示す. 伝達関数 $G(s)$ のすべての極 p_i が虚軸を除く左半平面に存在するときシステムは安定である.

9.2 安定判別法

特性方程式の係数から，(9.3) 式の条件を判定することを考える．以下で，一般性を失うことなく，特性方程式の最高次の係数は 1 とする．

a. 1 次系の安定性条件

特性方程式は

$$s + a_0 = 0$$

であり，特性根を γ とすると

$$s + a_0 = s - \gamma$$

から

$$a_0 = -\gamma \tag{9.4}$$

を得る．1 次系の安定性条件は

$$\gamma < 0$$

であり，これは，(9.4) 式から次式に等しい．

$$a_0 > 0 \tag{9.5}$$

b. 2 次系の安定性条件

特性方程式は

$$s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

である．まず，根が二つの実数 γ_1, γ_2 の場合

$$s^2 + a_1s + a_0 = (s - \gamma_1)(s - \gamma_2) = s^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)s + \gamma_1\gamma_2$$

から根と係数の関係

$$a_1 = -(\gamma_1 + \gamma_2), \quad a_0 = \gamma_1\gamma_2$$

を得る．したがって，安定性条件

$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 < 0$$

が成立する条件は

$$a_1 > 0, \quad a_0 > 0 \tag{9.6}$$

である．

次に，根が共役複素数 $\alpha \pm j\beta$ の場合

$$s^2 + a_1s + a_0 = (s - \alpha - j\beta)(s - \alpha + j\beta) = s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2$$

から根と係数の関係

$$a_1 = -2\alpha, \quad a_0 = \alpha^2 + \beta^2$$

を得る. 上式から, 安定性条件

$$\alpha < 0$$

が成立する条件は, やはり

$$a_1 > 0, \quad a_0 > 0 \tag{9.7}$$

となる.

c. 3次系の安定性条件

特性方程式は

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

である. まず, 特性方程式が三つの実根 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を持つ場合

$$\begin{aligned} s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 &= (s - \gamma_1)(s - \gamma_2)(s - \gamma_3) \\ &= s^3 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)s^2 + (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)s - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{aligned}$$

から根と係数の関係

$$a_2 = -(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad a_1 = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3, \quad a_0 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

を得る. また, 次の関係に注意する.

$$a_1a_2 - a_0 = -(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} &= -(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_1^2) \\ &= -(\gamma_2 + \gamma_3)(a_1 + \gamma_1^2) \end{aligned} \tag{9.9}$$

(9.8) 式は γ の添え字 1, 2, 3 について交換可能である. それゆえ, (9.9) 式で γ の添え字を $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ と置き換えれば

$$a_1a_2 - a_0 = -(\gamma_3 + \gamma_1)(a_1 + \gamma_2^2) \tag{9.10}$$

を得, さらに, (9.9) 式で γ の添え字を $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$ と置き換えれば

$$a_1a_2 - a_0 = -(\gamma_1 + \gamma_2)(a_1 + \gamma_3^2) \tag{9.11}$$

を得る. 安定性条件

$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 < 0, \quad \gamma_3 < 0 \tag{9.12}$$

が成立するための必要十分条件は

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_1a_2 - a_0 > 0 \tag{9.13}$$

である。以下にこれを示そう。必要性 ((9.12) \rightarrow (9.13)) は容易にわかる。十分性 ((9.13) \rightarrow (9.12)) を示す。

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 = -(\gamma_2 + \gamma_3)(a_1 + \gamma_1^2) > 0$$

から

$$\gamma_2 + \gamma_3 < 0$$

また, $a_0 = -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 > 0$ を考慮すると

$$\gamma_1 a_1 = \gamma_1(\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3) = \gamma_1^2(\gamma_2 + \gamma_3) + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 < 0$$

となる。したがって, $\gamma_1 < 0$ が結論される。他の添え字 2, 3 についても同様に示せる。

次に, 根が 1 組の共役複素数と実数 $\alpha \pm j\beta, \gamma$ の場合

$$\begin{aligned} s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 &= (s - \alpha - j\beta)(s - \alpha + j\beta)(s - \gamma) \\ &= s^3 - (2\alpha + \gamma)s^2 + (2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2)s - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma \end{aligned}$$

から根と係数の関係

$$a_2 = -(2\alpha + \gamma), \quad a_1 = 2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2, \quad a_0 = -(\alpha^2 + \beta^2)\gamma$$

を得る。また, 次の関係に注意する。

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 &= -(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2)(2\alpha + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2)\gamma \\ &= -2\alpha(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &= -2\alpha \{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2\} \end{aligned} \tag{9.14}$$

以上から, この場合も安定性条件

$$\alpha < 0, \quad \gamma < 0$$

が成り立つための必要十分条件は

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 > 0 \tag{9.15}$$

となることがわかる。

上で得られた安定性条件をまとめておく。

[安定性条件]

1 次系

$$\text{特性方程式} \quad s + a_0 = 0$$

$$\text{安定性条件} \quad a_0 > 0$$

2 次系

$$\text{特性方程式} \quad s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

$$\text{安定性条件} \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$$

3 次系

$$\text{特性方程式} \quad s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

$$\text{安定性条件} \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2a_1 - a_0 > 0$$

安定性条件を求めるとき、根と係数との関係を用いる上記の方法が適用できるのは、原理的には4次系までである。一般的な n 次系に対する安定性条件を求める問題は、異なるアプローチによって解かれる（ラウス (1877), フルビッツ (1895)）。

例題 9.2 次の伝達関数を持つ系の安定性を判別せよ。

$$(1) G(s) = \frac{1}{s-1} \quad (2) G(s) = \frac{5}{s^2+s+1}$$

$$(3) G(s) = \frac{2s+1}{2s^3+2s^2+4s+6}$$

[解] 特性方程式は分母多項式を 0 とおくことによって得られる。また、特性方程式の最高次の係数は 1 にしておく。

$$(1) \text{ 不安定.} \quad (2) \text{ 安定.}$$

(3) 特性方程式は $s^3 + s^2 + 2s + 3 = 0$ である。よって、 $a_2a_1 - a_0 = 1 \times 2 - 3 = -1 < 0$ なので不安定。

実際、極を求めると以下のようなになる。

$$(1) p_1 = 1$$

$$(2) p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) p_{1,2} = 0.13784 \pm 1.52731j, \quad p_3 = -1.27568$$

4 次以上の系にも適用できる安定判別法として、ラウス・フルビッツの方法があるが、その説明は省略する。

9.3 問題

1. 次式を証明せよ.

$$(1) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = 0 \quad (2) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(-1+2j)t} = 0$$

2. 次の特性方程式を持つ系の安定性を判別せよ.

$$(1) s + 2 = 0 \quad (2) -2s^2 - 4s - 3 = 0$$

$$(3) 2s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0$$

第10章 フィードバック制御系の設計

本章では、回転系の制御系設計問題を考える。具体的には、回転系の角速度または角度を一定値に制御するための制御系を設計する。代表的な補償器であるP（比例）補償器またはPI（比例+積分）補償器を用いてフィードバック系を構成し、これらの制御系の安定性条件を求める。また、ラプラス変換の最終値定理を用いて、制御系の定常偏差（十分時間が経過したときの出力と目標値との偏差）を計算し、制御系の定常特性を評価する。さらに、制御系のステップ応答を求めて過渡特性の評価を行う。

10.1 回転系の角速度制御

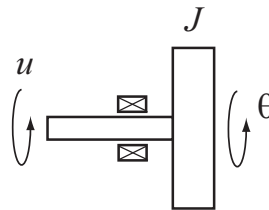


図 10.1: 回転系

図 10.1 の回転系を考える。 θ は軸の回転角、 u は軸に作用するトルク、 J は回転体の慣性モーメントである。目的は、角速度 $\omega = \dot{\theta}$ を一定の目標値にできるだけ近づけるように制御することである。

回転系の運動方程式は

$$J\ddot{\theta}(t) = u(t)$$

となる。この式を角速度 $\omega = \dot{\theta}$ を用いて書くと

$$J\dot{\omega}(t) = u(t)$$

を得る。よって、 $u(t)$ から $\omega(t)$ までの伝達関数は

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js}$$

となる。

いま、 $\omega(t)$ を目標値に制御するために、図 10.2 のフィードバック系を構成する。 $r(t)$ は目標角速度である。同図から、 $u(t)$ は次式で与えられる。

$$u(t) = K(r(t) - \omega(t)) \tag{10.1}$$

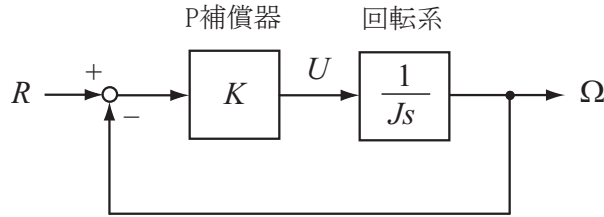


図 10.2: 制御系のブロック線図

すなわち、目標角速度と回転系の角速度との差に比例したトルクを回転系に加えるという制御系である。この制御系を **P** 制御系という (P は Proportional の頭文字)。

$r(t)$ から $\omega(t)$ までの伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Js}}{1 + \frac{K}{Js}} = \frac{K}{Js + K}$$

したがって、特性方程式と安定性条件は

$$\text{特性方程式} \quad Js + K = 0$$

$$\text{安定性条件} \quad K > 0$$

となる。

$r(t) = \mathbf{1}(t)$ のラプラス変換は $R(s) = 1/s$ なので、ステップ応答は次式で計算できる。

$$\omega(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]$$

また、ステップ応答を調べることによって、安定性の他に、**過渡特性** (応答が定常状態 ($t \rightarrow \infty$) における状態) になるまでの特性: 速い, 遅い, 振動的, 非振動的など) も知ることができる。

図 10.2 のフィードバック系のステップ応答を計算してみよう。まず、伝達関数 $G(s)$ を次のように表す。

$$G(s) = \frac{K}{Js + K} = \frac{1}{\frac{J}{K}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T = \frac{J}{K}$$

ステップ応答の s 領域表現は

$$\Omega(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{Ts + 1} \quad (10.2)$$

展開係数を求めると

$$K_1 = \left. \frac{1}{Ts + 1} \right|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = \left. \frac{1}{s} \right|_{s=-1/T} = -T$$

よって

$$\Omega(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

これを逆ラプラス変換して

$$\omega(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) \mathbf{1}(t) \quad (10.3)$$

を得る.

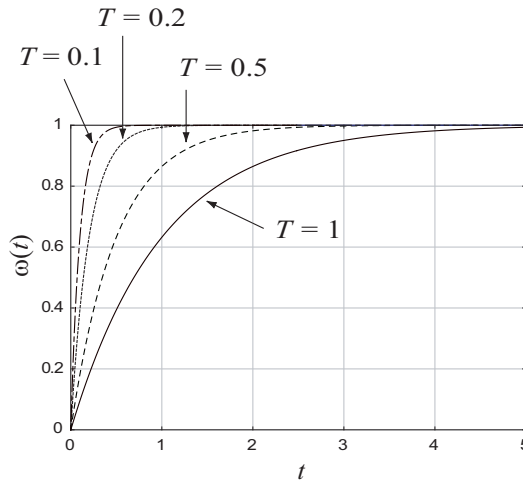


図 10.3: 制御系のステップ応答 ($T = 1, 0.5, 0.2, 0.1$)

図 10.3 に, $T = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ ($J = 1$ のとき, それぞれ, $K = 1, 2, 5, 10$) に対するフィードバック系のステップ応答を示す. いずれの場合も十分時間が経過したとき, 出力 $\omega(t)$ が目標値 $r = 1$ に収束しており, 定常特性は良いといえる. また, T を小さくするほど, すなわち, K を大きくするほど目標値へ速く収束している. すなわち, K を大きくすれば過渡特性が改善される.

上述の制御を行う入力トルク $u(t)$ を見てみよう. (10.1), (10.3) 式から, $u(t)$ は

$$\begin{aligned} u(t) &= K(r(t) - \omega(t)) = K\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)\right) \mathbf{1}(t) \\ &= Ke^{-\frac{1}{T}t} \mathbf{1}(t) = \frac{J}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \mathbf{1}(t) \end{aligned}$$

と求まる. $J = 1$ としたときの図 10.3 に対応する $u(t)$ を図 10.4 に示す.

ここで, 系の定常特性を調べるために便利なラプラス変換の最終値の定理を紹介する.

[最終値の定理] 時間関数 $f(t)$ の最終値 $f(\infty)$ が存在するとき次式で $F(s)$ から $f(\infty)$ を計算できる.

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

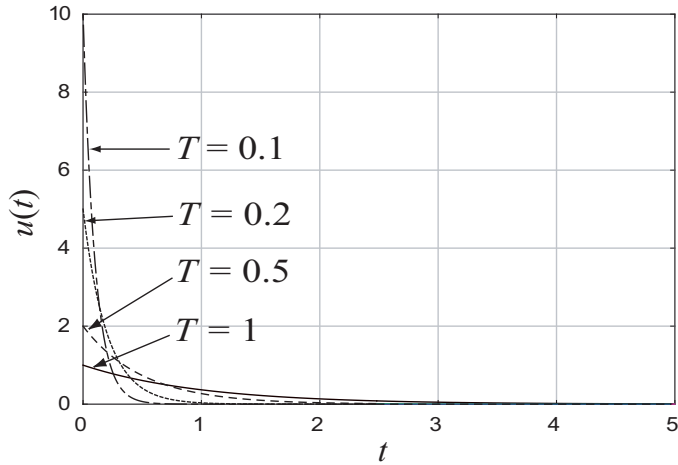


図 10.4: 入力トルク $u(t)$ ($T = 1, 0.5, 0.2, 0.1$)

この定理を利用して、ステップ応答の最終値を求めると

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(Ts + 1)} = 1$$

となり、目標値に一致することが確認できる。

10.2 粘性摩擦がある回転系の角速度制御

10.2.1 P 制御

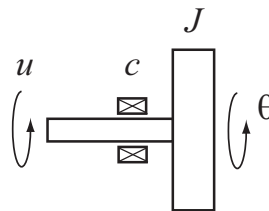


図 10.5: 粘性摩擦がある回転系

今度は、軸受に粘性摩擦がある回転系（図 10.5）を考えよう。図において c は軸の粘性減衰係数を表す。制御の目的は、前節と同様に、回転速度の定値制御である。系の運動方程式は次のとおりである。

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) = u(t) \quad (10.4)$$

または

$$J\dot{\omega}(t) + c\omega(t) = u(t)$$

よって, $u(t)$ から $\omega(t)$ までの伝達関数は

$$G_p(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js + c}$$

となる.

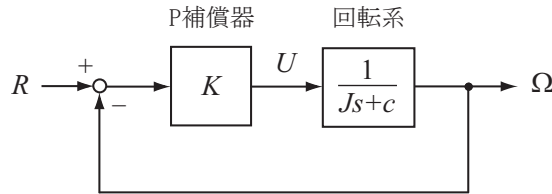


図 10.6: 制御系のブロック線図

この回転系に対して P 制御系を構成する (図 10.6). 制御系の伝達関数は

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Js+c}}{1 + \frac{K}{Js+c}} = \frac{K}{Js+c+K} \quad (10.5)$$

$$= \frac{1}{\frac{J}{K}s + \frac{c+K}{K}} = \frac{K}{c+K} \frac{1}{T_1s+1} \quad (10.6)$$

ただし

$$T_1 = \frac{K}{c+K} \frac{J}{K} = \frac{J}{c+K}$$

(10.5) 式から, 特性方程式と安定性条件として

$$\text{特性方程式} \quad Js + c + K = 0$$

$$\text{安定性条件} \quad c + K > 0$$

を得る. また, ステップ入力 $r(t) = \mathbf{1}(t)$ ($R(s) = 1/s$) に対して

$$\Omega(s) = G(s)R(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K}{c+K} \frac{1}{s(T_1s+1)} \quad (10.7)$$

から, 出力 $\omega(t)$ の最終値が

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{c+K} \frac{1}{s(T_1s+1)} = \frac{K}{c+K} < 1$$

と計算される. したがって, この場合, 角速度は目標値に至らず, 定常偏差 ($t \rightarrow \infty$ における目標値と出力との差)

$$r - \omega(\infty) = 1 - \frac{K}{c+K} = \frac{c}{c+K}$$

が残る. ステップ応答は (10.7) 式を逆ラプラス変換することによって

$$\omega(t) = \frac{K}{c+K} \left(1 - e^{-\frac{1}{T_1}t}\right) \mathbf{1}(t)$$

と求まる． $u(t)$ の具体的表現を知りたい場合（実際の制御では具体的表現は不要であるが）

$$u(t) = K(r(t) - \omega(t))$$

から求めることもできるが，直接計算するには， $r(t)$ から $u(t)$ までの伝達関数

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 + \frac{K}{Js + c}} = \frac{K(Js + c)}{Js + c + K}$$

を用いて

$$U(s) = \frac{K(Js + c)}{s(Js + c + K)}$$

と求め，これを逆ラプラス変換すればよい．また， $U(s)$ から最終値の定理により $u(\infty)$ を計算することもできる．

$$u(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) = \frac{Kc}{c + K}$$

制御系のステップ応答と対応する入力トルクを図 10.7, 10.8 にそれぞれ示す．

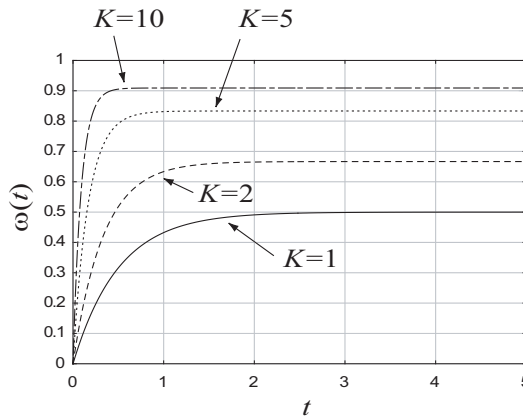


図 10.7: 制御系のステップ応答 ($J = 1, c = 1, K = 1, 2, 5, 10$)

10.2.2 PI 制御

10.2.1 と同じ制御対象に対するフィードバック系の補償器として，比例 (Proportional) + 積分 (Integral) 機能を持つ要素を考えよう．フィードバック系のブロック線図を図 10.9 に示す． $r(t)$ から $\omega(t)$ までの伝達関数は

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1 s + K_0}{Js^2 + cs}}{1 + \frac{K_1 s + K_0}{Js^2 + cs}} = \frac{K_1 s + K_0}{Js^2 + (c + K_1)s + K_0}$$

となり，特性方程式と安定性条件は

$$\text{特性方程式 } Js^2 + (c + K_1)s + K_0 = 0$$

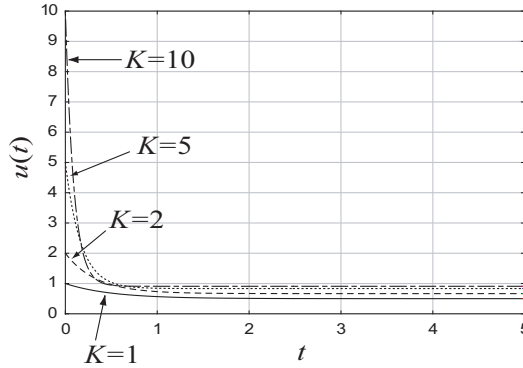


図 10.8: 入力トルク $u(t)$ ($J = 1, c = 1, K = 1, 2, 5, 10$)

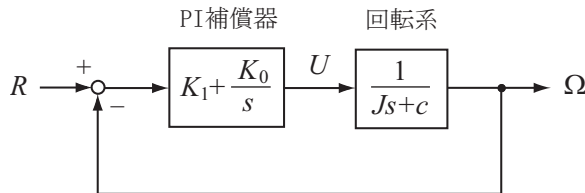


図 10.9: 制御系のブロック線図

安定性条件 $c + K_1 > 0, K_0 > 0$

となる. また, 最終値の定理から, ステップ入力 $r(t) = 1(t)$ に対する $\omega(t)$ の最終値は

$$\begin{aligned} \omega(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_1 s + K_0}{Js^2 + (c + K_1)s + K_0} \times \frac{1}{s} = 1 \end{aligned}$$

と求まり, 定常偏差が 0 になることがわかる.

一方, $r(t)$ から $u(t)$ までの伝達関数は

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1 s + K_0}{s}}{1 + \frac{K_1 s + K_0}{Js^2 + cs}} = \frac{(K_1 s + K_0)(Js + c)}{Js^2 + (c + K_1)s + K_0}$$

また, これから, $u(t)$ の最終値

$$u(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(K_1 s + K_0)(Js + c)}{Js^2 + (c + K_1)s + K_0} \times \frac{1}{s} = c$$

もわかる. 図 10.10 に, $J = 1, c = 1, K_0 = 2, K_1 = 1$ に対する $\omega(t)$ と $u(t)$ のステップ応答を示す.

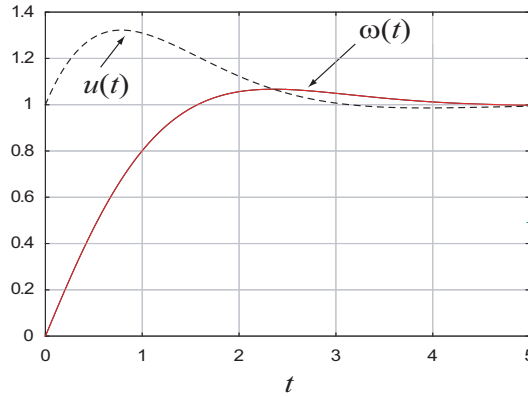


図 10.10: 制御系のステップ応答 ($J = 1, c = 1, K_0 = 2, K_1 = 1$)

10.3 粘性摩擦がある回転系の角度制御

(10.4) 式から、入力トルク $u(t)$ から回転角 $\theta(t)$ までの伝達関数は

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2 + cs}$$

である．この系に対して PI 制御系（図 10.11）を構成しよう．制御の目的は、 $\theta(t)$ を目標信号 $r(t)$ に追従させることである．

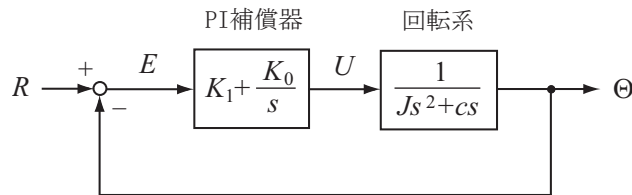


図 10.11: 制御系のブロック線図

$r(t)$ から $\theta(t)$ までの伝達関数を計算すると

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1s + K_0}{s(Js^2 + cs)}}{1 + \frac{K_1s + K_0}{s(Js^2 + cs)}} = \frac{K_1s + K_0}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0}$$

したがって、特性方程式と安定性条件は

特性方程式 $s^3 + \frac{c}{J}s^2 + \frac{K_1}{J}s + \frac{K_0}{J} = 0$

安定性条件 $K_1 > 0, K_0 > 0, cK_1 - JK_0 > 0$

となる．

$J = 1, c = 1$ に対して安定性条件を満たす補償器のパラメータとして

$$K_0 = 1, K_1 = 2$$

$$K_0 = 1, \quad K_1 = 5$$

を与えた場合の制御系のステップ応答を図 10.12, 図 10.13 にそれぞれ示す.

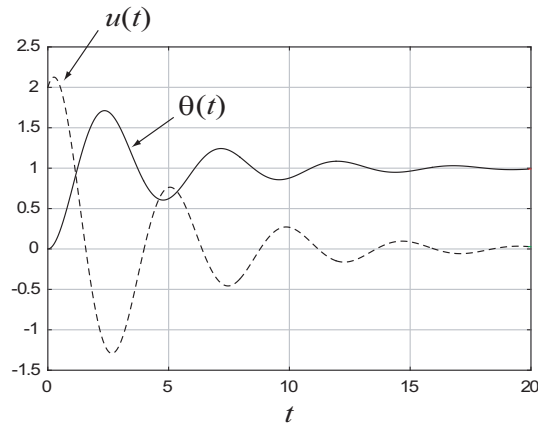


図 10.12: 制御系のステップ応答 ($J = 1, c = 1, K_0 = 1, K_1 = 2$)

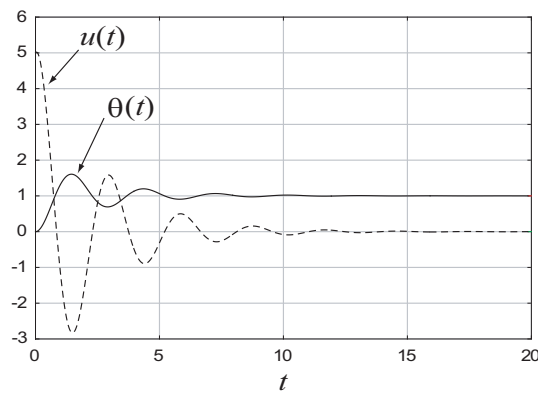


図 10.13: 制御系のステップ応答 ($J = 1, c = 1, K_0 = 1, K_1 = 5$)

10.4 問題

- 図 10.11 の制御系において, $r(t)$ から $e(t) = r(t) - \theta(t)$ までの伝達関数を求めよ.
- 図 10.11 の制御系は安定とする. この制御系について, 以下の $r(t)$ に対する定常偏差 $e(\infty)$ を求めよ.

$$(a) \quad r(t) = \mathbf{1}(t) \quad (b) \quad r(t) = t\mathbf{1}(t) \quad (c) \quad r(t) = t^2\mathbf{1}(t)$$

- 図 10.14 の PID 制御系 (D は微分 (Derivative) を意味する) について以下の問いに答えよ.

- (1) $r(t)$ から $\theta(t)$ までの伝達関数を求めよ.

- (2) 特性方程式と安定性条件を示せ.
- (3) $r(t)$ から $u(t)$ までの伝達関数を求めよ.
- (4) $r(t)$ から $e(t)$ までの伝達関数を求めよ.
- (5) 制御系は安定とする. このとき, 以下の $r(t)$ に対する定常偏差 $e(\infty)$ を求めよ.
- (a) $r(t) = \mathbf{1}(t)$ (b) $r(t) = t\mathbf{1}(t)$ (c) $r(t) = t^2\mathbf{1}(t)$

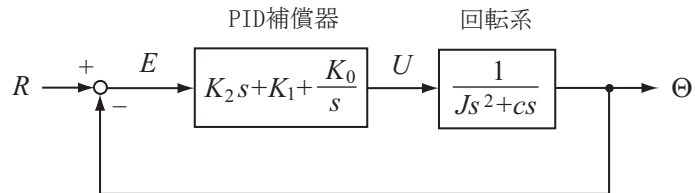


図 10.14: 制御系のブロック線図

第11章 状態方程式とその解

動的システムの表現として伝達関数を紹介したが、もう一つの等価な表現として状態方程式がある。状態方程式とは、システムの数学モデルである微分方程式を連立の1階微分方程式で表したものである。伝達関数がシステムの応答を解析的に求めるのに適した表現である一方、状態方程式はシステムの応答を数値的に求めるのに適した表現である。本章では、計算機を用いるシミュレーション（システムの応答を数学モデルから求めること）の基礎となる事柄を説明する。すなわち、伝達関数を状態方程式に変換する方法、状態方程式を解く際に必要となる初期状態の計算法、状態方程式の解に基づいて状態方程式を離散化する方法、結合系の各要素が状態方程式で表されている場合に系全体の状態方程式を求める方法を説明する。そして、いくつかの制御系のシミュレーションを行う Octave プログラムとそれらの実行結果を紹介する。

11.1 伝達関数と状態方程式

伝達関数と状態方程式は等価なものであり、一方から他方を求めることができる。以下では、伝達関数から状態方程式を求める方法を説明する。

プロパーな伝達関数（分子の次数 \leq 分母の次数）

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (11.1)$$

に対応する微分方程式を求めたい場合、(11.1) 式を変形した式

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)U(s)$$

から直ちに

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

と求まる。(11.1) 式は、また、次のような連立の一階微分方程式に変換することもできる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t) + \beta_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha_{21}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t) + \beta_2u(t) \\ y(t) &= \gamma_1x_1(t) + \gamma_2x_2(t) + du(t) \end{aligned}$$

または、これを行列形式で表せば

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

ただし

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(t)$ を状態, 式 (11.2) を状態方程式という ((11.2a) 式を状態方程式, (11.2b) 式を出力方程式ということもある)。

例題 11.1 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

[解]

$$\frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + a_0} \tag{11.3}$$

とおく. このとき

$$Y(s) = b_0 Y_0(s)$$

すなわち

$$y(t) = b_0 y_0(t) \tag{11.4}$$

の関係がある. (11.3) 式から

$$(s + a_0)Y_0(s) = U(s)$$

これを微分方程式に直すと

$$\dot{y}_0(t) + a_0 y_0(t) = u(t)$$

すなわち

$$\dot{y}_0(t) = -a_0 y_0(t) + u(t) \tag{11.5}$$

を得る. ここで

$$x(t) = y_0(t)$$

とおくと, (11.4), (11.5) 式から, 状態方程式として

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a_0 x(t) + u(t) \\ y(t) &= b_0 x(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る.

例題 11.2 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} + d$$

[解]

$$\frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + a_0}$$

とおくと

$$Y(s) = b_0 Y_0(s) + dU(s)$$

すなわち

$$y(t) = b_0 y_0(t) + du(t)$$

となる。状態を

$$x(t) = y_0(t)$$

とおき、例題 11.1 の結果を使うと

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a_0 x(t) + u(t) \\ y(t) &= b_0 x(t) + du(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る。

例題 11.3 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

[解]

$$\frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

とおくと

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y_0(s) = U(s)$$

$$Y(s) = b_1 s Y_0(s) + b_0 Y_0(s)$$

となり、これらを時間領域で表せば

$$\ddot{y}_0(t) + a_1 \dot{y}_0(t) + a_0 y_0(t) = u(t) \tag{11.6}$$

$$y(t) = b_1 \dot{y}_0(t) + b_0 y_0(t) \tag{11.7}$$

を得る。状態を

$$x_1(t) = y_0(t), \quad x_2(t) = \dot{y}_0(t)$$

と定義すれば、(11.6) 式から

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}_0(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

また, (11.7) 式から

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t)$$

さらに, これらを行列表現すれば

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

を得る.

例題 11.4 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} + d$$

[解]

$$\frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

とおくと

$$Y(s) = b_0 Y_0(s) + b_1 s Y_0(s) + d U(s)$$

すなわち

$$y(t) = b_0 y_0(t) + b_1 \dot{y}_0(t) + d u(t)$$

となる. 状態を

$$x_1(t) = y_0(t), \quad x_2(t) = \dot{y}_0(t)$$

と定義し, 例題 11.3 の結果を使えば

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + d u(t)$$

を得る. 1 次系, 2 次系の結果と 3 次系の状態方程式表現を以下に示す. ここで示す伝達関数の形を基本形と呼ぶ.

[伝達関数と状態方程式]

1 次系

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} + d$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a_0x(t) + u(t) \\ y(t) &= b_0x(t) + du(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

2 次系

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} + d$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

3 次系

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} + d$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

例題 11.5 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s + 2}$$

[解] 伝達関数を

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s + 2} = \frac{2(s + 2) - 1}{s + 2} = 2 - \frac{1}{s + 2}$$

と変形し, (11.8) 式を用いると, 状態方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) + u(t) \\ y(t) &= -x(t) + 2u(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る.

例題 11.6 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s + 4}{s^2 + s + 2}$$

[解] (11.9) 式から

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

例題 11.7 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

[解] 伝達関数を基本形に変換する.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{(s^2 + 2s + 1) - 2s}{s^2 + 2s + 1} = 1 - \frac{2s}{s^2 + 2s + 1}$$

この式と (11.9) 式から

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u(t) \end{aligned} \right\}$$

11.2 初期状態の計算法

状態方程式の解を求める際に、初期状態を知る必要がある。ここでは、 $y(0)$, $u(0)$ などの元の微分方程式に対する初期条件から初期状態 $\mathbf{x}(0)$ を計算する方法を説明する。

1 次系の場合、与えられる初期条件は、 $y(0)$, $(u(0))$ である。(11.8b) 式で $t = 0$ とおき、整理すると

$$b_0 x(0) = y(0) - du(0)$$

これを $x(0)$ について解いて

$$x(0) = \frac{y(0) - du(0)}{b_0}$$

を得る。

2 次系の場合、与えられる初期条件は、 $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $(u(0)$, $\dot{u}(0))$ である。(11.9) 式から

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t) \\ \dot{y}(t) &= \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) + d\dot{u}(t) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)) + d\dot{u}(t) \\ &= \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}\mathbf{b}u(t) + d\dot{u}(t) \end{aligned}$$

これら 2 式を整理して、 $t = 0$ とおくと

$$\begin{cases} \mathbf{c}\mathbf{x}(0) &= y(0) - du(0) \\ \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) &= \dot{y}(0) - \mathbf{c}\mathbf{b}u(0) - d\dot{u}(0) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} y(0) - du(0) \\ \dot{y}(0) - \mathbf{c}b u(0) - d\dot{u}(0) \end{bmatrix}$$

この線形方程式を解いて $\mathbf{x}(0)$ が得られる。1~3 次系に対する初期状態の計算法を以下にまとめておく。

[初期状態 $\mathbf{x}(0)$ の方程式]

1 次系

$$b_0 x(0) = y(0) - du(0) \quad (11.11)$$

2 次系

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} y(0) - du(0) \\ \dot{y}(0) - \mathbf{c}b u(0) - d\dot{u}(0) \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

3 次系

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} y(0) - du(0) \\ \dot{y}(0) - \mathbf{c}b u(0) - d\dot{u}(0) \\ \ddot{y}(0) - \mathbf{c}A b u(0) - \mathbf{c}b \dot{u}(0) - d\ddot{u}(0) \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

例題 11.8 次の微分方程式に対する状態方程式と初期状態を求めよ。

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{u}(t) + 3u(t)$$

$$y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 4, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

[解] まず, $u(t)$ から $y(t)$ までの伝達関数は

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 1}$$

である。これから状態方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る。すなわち

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

である。また

$$u(0) = 1$$

に注意する。以上から

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(0) - du(0) \\ \dot{y}(0) - \mathbf{c}bu(0) - d\dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

がわかり、 $\mathbf{x}(0)$ の方程式は

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となる。これを解くと

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

を得る。

11.3 状態方程式の解

もっとも簡単な 1 次系の状態方程式の解法を詳しく説明する。2 次以上の系の状態方程式解は、1 次系の解法でスカラー計算を行列計算とすれば得られる。

11.3.1 1 次系の解

まず

$$\dot{x}(t) = ax(t) \tag{11.14}$$

の解は

$$x(t) = e^{at}x(0) \tag{11.15}$$

で与えられる。このことは、(11.15) 式を t で微分すれば

$$\dot{x}(t) = ae^{at}x(0) = ax(t)$$

となり、(11.14) 式を満たすことからわかる。この結果を利用して

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \tag{11.16}$$

の解を求めよう。すなわち、(11.16) 式の解を

$$x(t) = e^{at}v(t) \tag{11.17}$$

と仮定し、これが (11.16) 式を満たすように $v(t)$ を決める。(11.17) 式を微分し、(11.16) 式を用いると

$$\dot{x}(t) = ae^{at}v(t) + e^{at}\dot{v}(t) = ax(t) + bu(t)$$

これから

$$e^{at}\dot{v}(t) = bu(t)$$

すなわち

$$\dot{v}(t) = e^{-at}bu(t)$$

を得る. 上式を 0 から t で積分すれば, $v(t)$ が得られる.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

また, $v(0)$ は (11.17) 式で $t=0$ とおくことにより

$$v(0) = x(0)$$

となる. $v(t)$ の表現を (11.17) 式に代入すれば, 解が³

$$x(t) = e^{at} \left(x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \right) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \quad (11.18)$$

と得られる. また, $x(t)$ がわかれば, 出力を

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

で計算できる.

もちろん, $x(t)$ はラプラス変換によって求めることもできる. (11.16) 式をラプラス変換すれば

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

これから

$$X(s) = \frac{1}{s-a}x(0) + \frac{1}{s-a}bU(s)$$

これを逆ラプラス変換すれば $x(t)$ が得られる.

11.3.2 2次以上の系の解

2次以上の系

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (11.19)$$

に対する解は, (11.18) 式を行列形式に拡張した次式で与えられる.

[状態方程式の解]

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau \quad (11.20)$$

ここで、 e^{At} は行列指数関数と呼ばれ、次式で定義される。

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \quad (11.21)$$

ただし、 I は A と同じサイズの単位行列である。実際、(11.21) 式から

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = A e^{At}$$

となり、また、行列の積の微分について

$$\frac{d}{dt} (M(t)N(t)) = \dot{M}(t)N(t) + M(t)\dot{N}(t)$$

が成立することに注意すれば、1 次系の解とほぼ同様に (11.20) 式を導ける。

1 次系と同様に、 $\mathbf{x}(t)$ もラプラス変換によって計算できる。実際、(11.19) 式を要素毎にラプラス変換すると

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s)$$

すなわち

$$(sI - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{b}U(s)$$

となり、これから

$$\mathbf{X}(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s) \quad (11.22)$$

を得る。これを要素毎に逆ラプラス変換すれば $\mathbf{x}(t)$ を計算できる。また、(11.20) 式と (11.22) 式の比較から

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - \mathbf{A})^{-1}] \quad (11.23)$$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1} [(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s)] \quad (11.24)$$

もわかる。 e^{At} が必要な場合、(11.23) 式を用いればよい。

$\mathbf{x}(t)$ を得た場合、出力は

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t)$$

で計算できる。

例題 11.9 次の \mathbf{A} に対する行列指数関数 e^{At} を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

[解] (11.23) 式を用いる。

$$sI - \mathbf{A} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

この行列を要素毎逆ラプラス変換すれば

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

を得る.

11.4 状態方程式の離散化

ここでは、計算機を利用して系の応答を求めるための離散化状態方程式を導く。離散化状態方程式とは、本来連続的に変化する t に対する状態方程式の解 $\mathbf{x}(t)$ をあるきざみ幅 Δt (サンプリング周期という) で離散的に変化する時間

$$0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$$

に対して近似的に求める式である。離散化状態方程式は、状態方程式の解の表現 (11.20) 式を用いて求める。近似は、入力 $u(t)$ を階段状の関数

$$u(i\Delta t), \quad i\Delta t \leq t < (i+1)\Delta t$$

とすることから生じる (図 11.1)。ただし、 $u(t)$ がステップ関数の場合など、近似なく離散化できる場合があることに注意する。

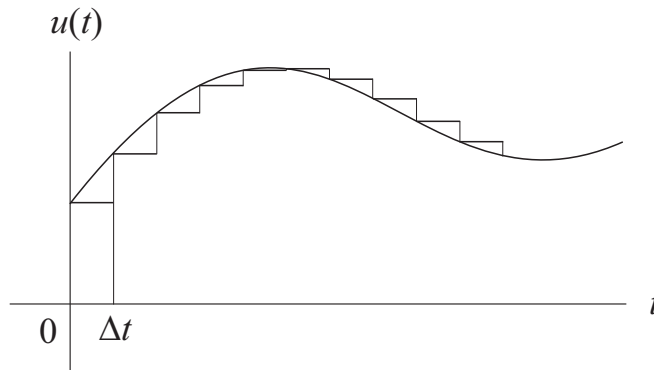


図 11.1: $u(t)$ の離散化

$\mathbf{x}(i\Delta t)$, $u(i\Delta t)$ をそれぞれ \mathbf{x}_i , u_i で表す。また、同様に、 $y(i\Delta t)$ を y_i で表す。 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ である。 \mathbf{x}_1 は (11.20) 式から

$$\mathbf{x}_1 = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_0 + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} \mathbf{b} d\tau u_0$$

また、 \mathbf{x}_2 は、 \mathbf{x}_1 を初期値と考えれば

$$\mathbf{x}_2 = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_1 + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} \mathbf{b} d\tau u_1$$

と計算でき、一般に、 \mathbf{x}_{i+1} は、 \mathbf{x}_i を初期値と考えて

$$\mathbf{x}_{i+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_i + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)} \mathbf{b} d\tau u_i$$

で計算できる。 $T = \Delta t$ と表し

$$\mathbf{A}_T = e^{AT}, \quad \mathbf{b}_T = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \mathbf{b} d\tau$$

とおけば、離散化状態方程式が以下のとおり得られる。

[離散化状態方程式の解]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{A}_T \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_T u_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ y_i &= \mathbf{c} \mathbf{x}_i + d u_i \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

ただし

$$\mathbf{A}_T = e^{AT}, \quad \mathbf{b}_T = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \mathbf{b} d\tau$$

(11.23), (11.24) 式から、 \mathbf{A}_T と \mathbf{b}_T は次式計算できる。

$$\mathbf{A}_T = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] (T) \quad (11.26)$$

$$\mathbf{b}_T = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \frac{1}{s} \right] (T) \quad (11.27)$$

(11.25) 式は計算機プログラムに適した形をしている。

例題 11.10 次の \mathbf{A} , \mathbf{b} に対する離散化状態方程式の係数行列 \mathbf{A}_T , \mathbf{b}_T を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解]

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

これを逆ラプラス変換して

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2(e^{-T} - e^{-2T}) & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix}$$

を得る。また

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

を逆ラプラス変換して

$$\mathbf{b}_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}$$

を得る.

例題 11.11 Octave を用いて次の状態方程式を離散化せよ. ただし, サンプルング周期は $T = 0.2$ とする.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

[解]

```
$ octave
```

```
octave:1> A = [0 1;-2 -3];
octave:2> b = [0;1];
octave:3> c = [1 0];
octave:4> d = 0;
octave:5> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:6> T = 0.2;
octave:7> c2d(sys,T);
octave:8> AT = ans.a
AT =
```

```
0.96714 0.14841
-0.29682 0.52191
```

```
octave:9> bT = ans.b
bT =
```

```
0.016429
0.148411
```

よって, 離散化状態方程式は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \begin{bmatrix} 0.96714 & 0.14841 \\ -0.29682 & 0.52191 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0.016429 \\ 0.148411 \end{bmatrix} u_i \\ y_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i \end{aligned} \right\}$$

例題 11.12 Octave を用いて, 例題 11.11 の応答を求めよ. ただし, 初期状態と入力

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

とする.

[解]

```
octave:10> x = [0;0];
octave:11> xx = [];
octave:12> u = 1;
octave:13> for i=0:50
> xx = [xx x];
> x = AT*x + bT*u;
> end
octave:14> y = c*xx;
octave:15> t = 0:50;
octave:16> grid('on')
octave:17> plot(t*T,y)
```

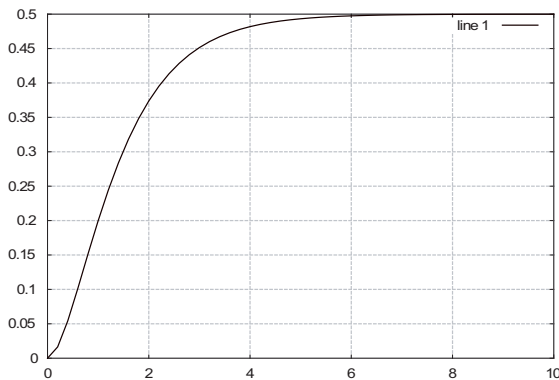


図 11.2: 例題 11.12 の応答

例題 11.13 Octave を用いて, 例題 11.8 で考えた次の微分方程式に対する初期状態と離散化状態方程式を計算し, 応答を求めよ. ただし, サンプルング周期は $T = 0.2$ とする.

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{u}(t) + 3u(t)$$

$$y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 4, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

[解] 状態方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

であり, 初期状態に関する方程式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} y(0) - du(0) \\ \dot{y}(0) - \mathbf{cb}u(0) - d\dot{u}(0) \end{bmatrix}$$

である. また, $u(0) = 1$ に注意する.

```
$ octave
octave:1> A = [0 1;-1 -2];
octave:2> b = [0;1];
octave:3> c = [3 2];
octave:4> d = 0;
octave:5> T = 0.2;
octave:6> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:7> c2d(sys,T);
octave:8> AT = ans.a
AT =

    0.98248    0.16375
   -0.16375    0.65498

octave:9> bT = ans.b
bT =

    0.017523
    0.163746

octave:10> y0 = -1;
octave:11> ydot0 = 4;
octave:12> u0 = 1;
octave:13> P = [c;c*A]
P =

    3    2
   -2   -1

octave:14> q = [y0;ydot0-c*b*u0]
q =

   -1
    2

octave:15> x0 = inv(P)*q
x0 =

   -3.0000
    4.0000

octave:16> x = x0;
```

```

octave:17> xx = [];
octave:18> u = 1;
octave:19> for i=0:50
> xx = [xx x];
> x = AT*x + bT*u;
> end
octave:20> y = c*xx;
octave:21> t = 0:50;
octave:22> grid('on')
octave:23> plot(t*T,y)

```

よって，離散化状態方程式は次式となる．

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \begin{bmatrix} 0.98248 & 0.16375 \\ -0.16375 & 0.65498 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0.017523 \\ 0.163746 \end{bmatrix} u_i \\ y_i &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i \end{aligned} \right\}$$

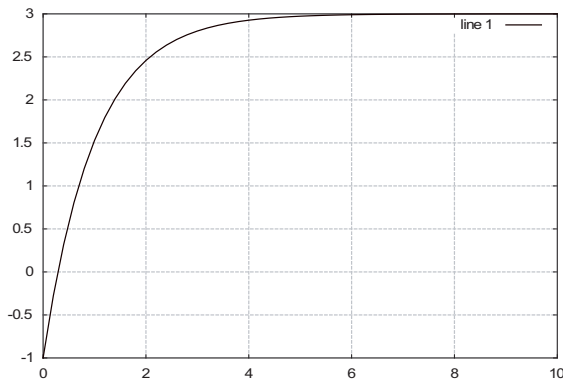


図 11.3: 例題 11.13 の応答

11.5 結合系の状態方程式

結合系のブロック線図の各伝達関数を状態方程式で表し，それらを統合して全体のブロック線図の状態方程式を求めることができる．この方法によれば，各ブロックの出力も計算できるので，そのような信号を求めたいとき便利である．

a. 直列結合系

図 11.4 の直列結合系に対する状態方程式表現を求めよう． $G_1(s)$ が

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u(t) \\ y_1(t) &= \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + d_1 u(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.28)$$

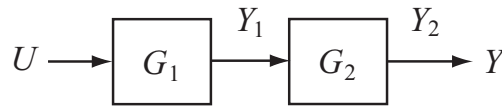


図 11.4: 直列結合系

$G_2(s)$ が

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 y_1(t) \\ y_2(t) &= \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2(t) + d_2 y_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

と状態方程式表現されているとする. (11.28) 式の $y_1(t)$ を (11.29) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 (\mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + d_1 u(t)) \\ &= \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + d_1 \mathbf{b}_2 u(t) \end{aligned} \quad (11.30)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2(t) + d_2 (\mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + d_1 u(t)) \\ &= d_2 \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2(t) + d_1 d_2 u(t) \end{aligned} \quad (11.31)$$

となる. 系全体の状態を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

と定義し, (11.28), (11.30), (11.31) 式をまとめると結合系の状態方程式として次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ d_1 \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} d_2 \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + d_1 d_2 u(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

なお, $y_1(t)$ は次式で計算できる.

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + d_1 u(t)$$

例題 11.14 図 11.5 の直列結合系の状態方程式を求めよ.

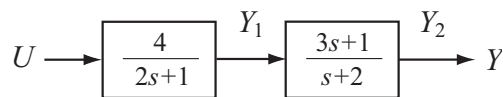


図 11.5: 例題 11.14 の直列結合系

[解]

$$G_1(s) = \frac{4}{2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{3s+1}{s+2}$$

の場合である。各伝達関数を基本形に変換する。

$$G_1(s) = \frac{2}{s + \frac{1}{2}}, \quad G_2(s) = \frac{3(s+2) - 5}{s+2} = 3 - \frac{5}{s+2}$$

これらから、 $G_1(s), G_2(s)$ に対する状態方程式は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{2}x_1(t) + u(t) \\ y_1(t) &= 2x_1(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + y_1(t) \\ y_2(t) &= -5x_2(t) + 3y_1(t) \end{aligned} \right\}$$

となる。結合系の状態を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

とすると、(11.32) 式から、結合系の状態方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る。ちなみに、 $y_1(t)$ は

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

で計算できる。

b. 並列結合系

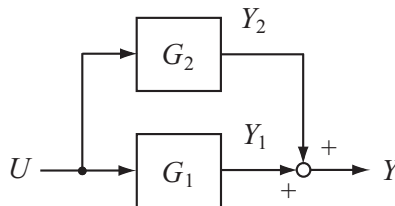


図 11.6: 並列結合系

図 11.6 の並列結合系を考える。 $G_1(s), G_2(s)$ の状態方程式表現を、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1 u(t) \\ y_1(t) &= \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1(t) + d_1 u(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2 u(t) \\ y_2(t) &= \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2(t) + d_2 u(t) \end{aligned} \right\}$$

とする。このとき、出力 $y(t)$ は

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2 + (d_1 + d_2)u(t)$$

と表される。以上から、結合系の状態方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + (d_1 + d_2)u(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

となる。

例題 11.15 図 11.7 の並列結合系の状態方程式を求めよ。

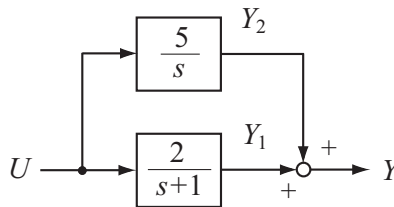


図 11.7: 例題 11.15 の並列結合系

[解]

$$G_1(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{5}{s}$$

である。各状態方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u \\ y_1(t) &= 2x_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ y_2(t) &= 5x_2(t) \end{aligned} \right\}$$

よって、(11.33) 式から、結合系の状態方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る。

c. フィードバック結合系

図 11.8 の単一フィードバック結合系を考える。この場合、新たな状態の追加はない。フィードバック結合系の状態方程式は、 $G(s)$ の状態方程式表現と $e(t) = u(t) - y(t)$ の関係から得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}e(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + de(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

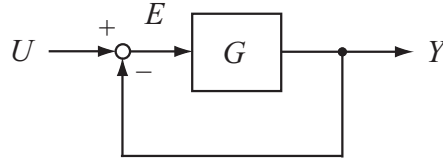


図 11.8: フィードバック結合系

$$e(t) = u(t) - y(t) = u(t) - \mathbf{c}\mathbf{x}(t) - de(t) \quad (11.35)$$

(11.35) 式から

$$(1+d)e(t) = -\mathbf{c}\mathbf{x}(t) + u(t)$$

すなわち

$$e(t) = \frac{1}{1+d}(-\mathbf{c}\mathbf{x}(t) + u(t)) \quad (11.36)$$

を得る. ここで

$$1+d \neq 0 \quad (11.37)$$

を仮定している. (11.36) 式を (11.34) 式に代入して

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\frac{1}{1+d}(-\mathbf{c}\mathbf{x}(t) + u(t)) \\ &= \left(\mathbf{A} - \frac{1}{1+d}\mathbf{b}\mathbf{c}\right)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{1+d}\mathbf{b}u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \frac{d}{1+d}(-\mathbf{c}\mathbf{x}(t) + u(t)) \\ &= \left(\mathbf{c} - \frac{d}{1+d}\mathbf{c}\right)\mathbf{x}(t) + \frac{d}{1+d}u(t) \\ &= \frac{1}{1+d}\mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \frac{d}{1+d}u(t) \end{aligned}$$

すなわち, フィードバック結合系の状態方程式は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left(\mathbf{A} - \frac{1}{1+d}\mathbf{b}\mathbf{c}\right)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{1+d}\mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \frac{1}{1+d}\mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \frac{d}{1+d}u(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

例題 11.16 図 11.9 のフィードバック結合系の状態方程式を求めよ.

[解] $G(s) = (3s+2)/s^2$ の状態方程式の係数行列は次のとおりである.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [2 \quad 3], \quad d = 0$$

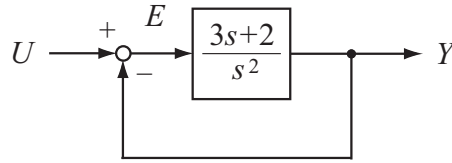


図 11.9: 例題 11.16 のフィードバック結合系

(11.38) 式から，結合系のシステム行列が

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \frac{1}{1+d} \mathbf{bc} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と計算され，結合系が

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

と得られる。

例題 11.17 図 11.10 の PI 制御系に対する状態方程式を求め， $\omega(t)$ のステップ応答を Octave で計算せよ。ただし，制御系のパラメータは

$$J = 1, \quad c = 1, \quad K_0 = 2, \quad K_1 = 1$$

とし，離散化のサンプリング周期は $T = 0.1$ とする。

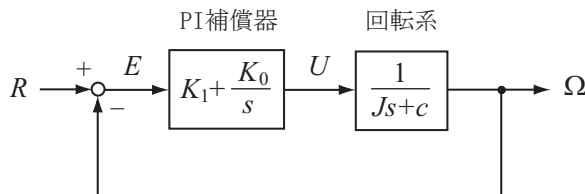


図 11.10: PI 制御系のブロック線図

[解法 1] $r(t)$ から $\omega(t)$ までの伝達関数 $G(s)$ に対応する状態方程式を求める方法を説明する。

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{K_1 s + K_0}{J s^2 + (c + K_1) s + K_0} = \frac{\frac{K_1}{J} s + \frac{K_0}{J}}{s^2 + \frac{c + K_1}{J} s + \frac{K_0}{J}}$$

を状態方程式に直すと次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_0}{J} & -\frac{c+K_1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ \omega(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_0}{J} & \frac{K_1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

ステップ応答は $r(t) = \mathbf{1}(t)$ としたときの強制応答なので, 初期状態は $\mathbf{0}$ とおく. 以下に, 制御系のステップ応答を計算するための Octave プログラムと出力結果を示す.

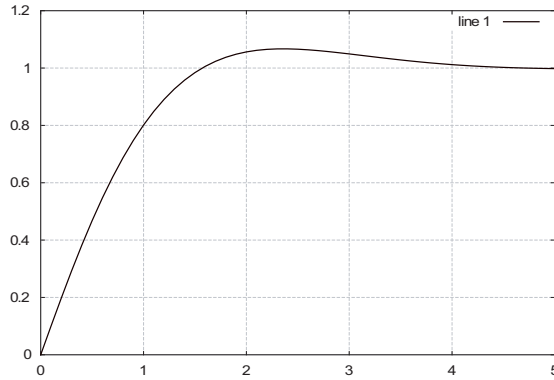
```
$ octave
octave:1> J = 1; c = 1; K0 = 2; K1 = 1;
octave:2> A = [0 1; -K0/J -(c+K1)/J];
octave:3> b = [0;1];
octave:4> c = [K0/J K1/J];
octave:5> d = 0;
octave:6> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:7> T = 0.1;
octave:8> c2d(sys,T);
octave:9> AT = ans.a
AT =

    0.990650    0.090333
   -0.180666    0.809984

octave:10> bT = ans.b
bT =

    0.0046750
    0.0903330

octave:11> x = [0;0];
octave:12> xx = [];
octave:13> r = 1;
octave:14> for i=0:50;
> xx = [xx x];
> x = AT*x + bT*r;
> end
octave:15> w = c*xx;
octave:16> t = 0:50;
octave:17> grid('on')
octave:18> plot(t*T,w)
octave:19> quit
```

図 11.11: 例題 11.17 (解法 1) : $\omega(t)$ のステップ応答

[解法 2] 今度は、結合系として状態方程式を求める。この方法によれば、 $u(t)$ の応答も計算できる。

$$G_1(s) = K_1 + \frac{K_0}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{Js + c} = \frac{\frac{1}{J}}{s + \frac{c}{J}}$$

とすると、これらの状態方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= e(t) \\ u(t) &= K_0 x_1(t) + K_1 e(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -\frac{c}{J} x_2(t) + u(t) \\ \omega(t) &= \frac{1}{J} x_2(t) \end{aligned} \right\}$$

となる。(11.32) 式から、 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ の直列結合系の状態方程式として

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_0 & -\frac{c}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \end{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.39)$$

を得る。 $u(t)$ は次式で表される。

$$u(t) = \begin{bmatrix} K_0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + K_1 e(t) \quad (11.40)$$

(11.39) 式を基に、フィードバック結合系の状態方程式を求めると次のようになる。(11.38) 式から、まず、結合系のシステム行列が

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_0 & -\frac{c}{J} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ K_0 & -\frac{c + K_1}{J} \end{bmatrix}$$

と計算され, これを用いて

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ K_0 & -\frac{c+K_1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \end{bmatrix} r(t) \\ \omega(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る. (11.40) 式から, $u(t)$ の計算式を求めると

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} K_0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + K_1(r(t) - \omega(t)) \\ &= \begin{bmatrix} K_0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + K_1 r(t) - K_1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} K_0 & -\frac{K_1}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + K_1 r(t) \end{aligned}$$

となる. 以下に, ステップ応答計算のための Octave プログラムと出力結果を示す.

```
$ octave
octave:1> J = 1; c = 1; K0 = 2; K1 = 1;
octave:2> A = [0 -1/J;K0 -(c+K1)/J];
octave:3> b = [1;K1];
octave:4> c = [0 1/J];
octave:5> d = 0;
octave:6> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:7> T = 0.1;
octave:8> c2d(sys,T);
octave:9> AT = ans.a
AT =

    0.990650   -0.090333
    0.180666    0.809984

octave:10> bT = ans.b
bT =

    0.095008
    0.099683

octave:11> x = [0;0];
octave:12> xx = [];
octave:13> r = 1;
octave:14> for i=0:50
> xx = [xx x];
```

```

> x = AT*x + bT*r;
> end
octave:15> w = c*xx;
octave:16> u = [K0 -K1/J]*xx + K1*r;
octave:17> t = 0:50;
octave:18> grid('on')
octave:19> plot(t*T,w,t*T,u)
octave:20> quit
    
```

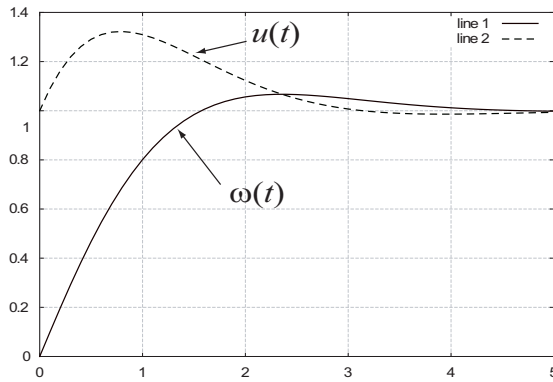


図 11.12: 例題 11.17 (解法 2) : $\omega(t)$ と $u(t)$ のステップ応答

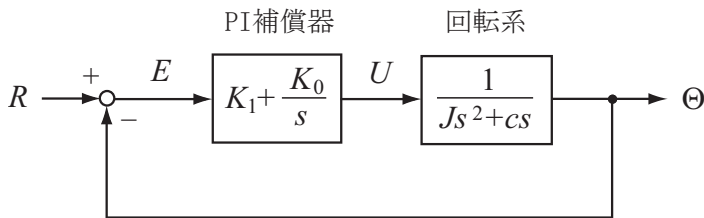


図 11.13: PI 制御系のブロック線図

例題 11.18 Octave を用いて、図 11.13 の PI 制御系の $u(t)$ と $\theta(t)$ のステップ応答を求めよ。ただし、制御対象と補償器のパラメータは

$$J = 1, c = 1, K_0 = 1, K_1 = 2$$

とし、サンプリング時間は $T = 0.2$ とする。

[解]

$$G_1(s) = K_1 + \frac{K_0}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{Js^2 + cs} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{J}s}$$

とおくと、これらに対する状態方程式は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= e(t) \\ u(t) &= K_0 x_1(t) + K_1 e(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{J} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \end{aligned} \right\}$$

となる。(11.32) 式から、 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ の直列結合系の状態方程式として

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0 & 0 & -\frac{c}{J} \end{array} \right] \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ K_1 \end{bmatrix} e(t) \\ \theta(t) &= \left[0 \mid \frac{1}{J} \quad 0 \right] \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

を得る。ただし

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

$u(t)$ は次式で表される。

$$u(t) = \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + K_1 e(t) \quad (11.42)$$

(11.41) 式を基に、フィードバック結合系の状態方程式を求めると次のようになる。(11.38) 式から、まず、結合系のシステム行列が

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0 & 0 & -\frac{c}{J} \end{array} \right] - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0 & -\frac{K_1}{J} & -\frac{c}{J} \end{array} \right]$$

と計算され、これを用いて

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left[\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0 & -\frac{K_1}{J} & -\frac{c}{J} \end{array} \right] \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ K_1 \end{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) &= \left[0 \mid \frac{1}{J} \quad 0 \right] \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

を得る. (11.42) 式から, $u(t)$ の計算式を求めると

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + K_1(r(t) - \theta(t)) \\ &= \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + K_1 r(t) - K_1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} K_0 & -\frac{K_1}{J} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + K_1 r(t) \end{aligned}$$

となる. 以下に, ステップ応答計算のための Octave プログラムと出力結果を示す.

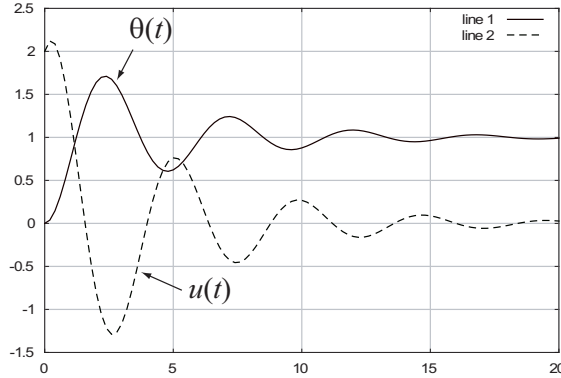
```
octave:1> J = 1; c = 1; K0 = 1; K1 = 2;
octave:2> A = [0 -1/J 0;0 0 1;K0 -K1/J -c/J];
octave:3> b = [1;0;K1];
octave:4> c = [0 1/J 0];
octave:5> d = 0;
octave:6> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:7> T = 0.2;
octave:8> c2d(sys,T);
octave:9> AT = ans.a
AT =
```

```
0.998736 -0.197408 -0.018605
0.018605 0.961525 0.178802
0.178802 -0.376210 0.782723
```

```
octave:10> bT = ans.b
bT =
```

```
0.197408
0.038475
0.376210
```

```
octave:11> x = [0;0;0];
octave:12> xx = [];
octave:13> r = 1;
octave:14> for i=0:100
> xx = [xx x];
> x = AT*x + bT*r;
> end
octave:15> theta = c*xx;
octave:16> u = [K0 -K1/J 0]*xx + K1*r;
octave:17> t = 0:100;
octave:18> grid('on')
octave:19> plot(t*T,theta,t*T,u)
```

図 11.14: $\theta(t)$ と $u(t)$ のステップ応答

11.6 問題

1. 次の伝達関数に対する状態方程式を求めよ.

$$(1) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{2s+1} \quad (2) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$(3) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2}{s^2+4s+5} \quad (4) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6s^2+4s+3}{s^3+2s^2+3s+1}$$

2. 1 自由度振動系 (回転系) (図 11.15) の運動方程式

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = u(t)$$

に対する状態方程式と初期状態を求めよ. ただし

$$J = 1, \quad c = 1, \quad k = 5$$

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

とする.

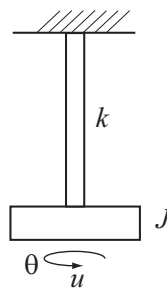


図 11.15: 1 自由度振動系 (回転系)

3. RCL 回路系 (図 11.16) の微分方程式

$$\ddot{e}_o(t) + \frac{R}{L}\dot{e}_o(t) + \frac{1}{CL}e_o(t) = \ddot{e}_i(t)$$

に対する状態方程式と初期状態を求めよ。ただし

$$\frac{R}{L} = 1, \quad \frac{1}{CL} = 1$$

$$e_o(0) = -2, \quad \dot{e}_o(0) = 1, \quad e_i(t) = \sin 2t \cdot \mathbf{1}(t)$$

とする。

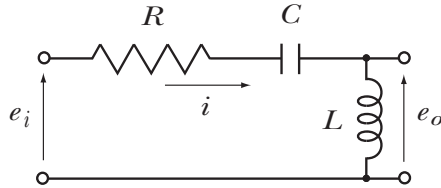


図 11.16: RCL 回路系

4. Octave を用いて, 1 自由度振動系 (回転系) (図 11.17)

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = u(t)$$

$$J = 1, \quad c = 1, \quad k = 5$$

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad u(t) = \mathbf{1}(t)$$

の応答を求めよ。ただし, 離散化におけるサンプリング周期は $T = 0.1$ とする。

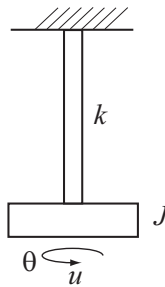


図 11.17: 1 自由度振動系 (回転系)

5. Octave を用いて, RCL 回路系 (図 11.18)

$$\ddot{e}_o(t) + \frac{R}{L}\dot{e}_o(t) + \frac{1}{CL}e_o(t) = \ddot{e}_i(t)$$

$$\frac{R}{L} = 1, \quad \frac{1}{CL} = 1$$

$$e_o(0) = -2, \quad \dot{e}_o(0) = 1, \quad e_i(t) = \sin 2t \cdot \mathbf{1}(t)$$

の応答を求めよ。ただし, 離散化におけるサンプリング周期は $T = 0.05$ とする。

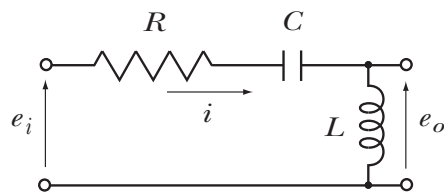


図 11.18: RCL 回路系

第12章 フィードバック制御系の設計例

本章では、台車系実験装置を用いたフィードバック制御実験を紹介する．具体的には、台車系の位置を目標値に近づける制御系を設計し、マイコンボード Arduino Due を用いたフィードバック制御実験の結果を示す．代表的な補償器である P（比例）補償器または PI（比例+積分）補償器を用いてフィードバック系を構成し、これらの制御系の応答をシミュレーション結果と比較する．また、良好な過渡特性と定常特性が得られる内部モデル制御（Internal Model Control, IMC）法による制御結果も示す．

12.1 台車系の位置制御

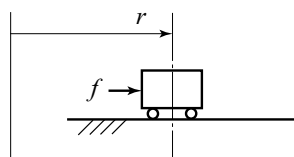


図 12.1: 台車系

Fig.12.1 の台車系の運動方程式は次式である．

$$\dot{r}(t) = ku(t), \quad k = 0.59 \quad (12.1)$$

r は基準点から測定した台車の位置である．台車系は駆動力 f を用いて速度フィードバック補償されている． u は補償後の入力信号である．(12.1) 式から、 $u(s)$ から $r(s)$ までの伝達関数は次式となる．

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{k}{s} \quad (12.2)$$

問題は、台車を目標位置 r_f まで移動し、そこで系を漸近安定化させる制御則を求めることである．

12.2 P 制御

図 12.2 の P 制御系において、 r_f から r までの伝達関数は次式である．

$$\frac{r(s)}{r_f(s)} = \frac{Kk}{s + Kk} \quad (12.3)$$

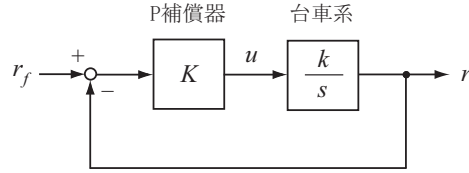


図 12.2: P 制御系のブロック線図

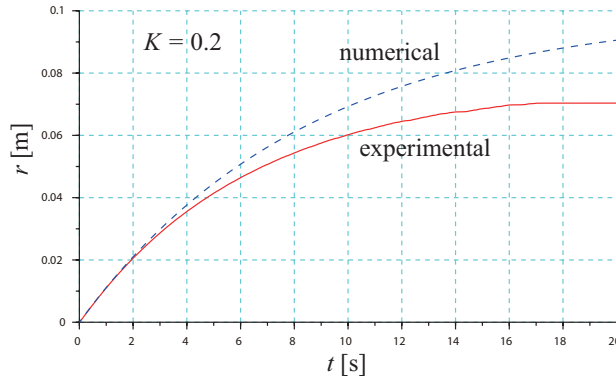


図 12.3: P 制御系の応答 $r(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K = 0.2$, 極 $-Kk = -0.118$

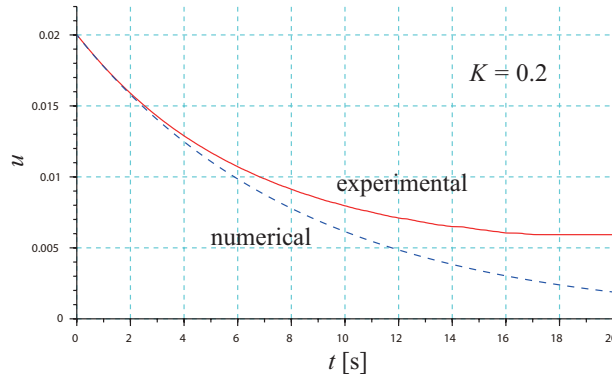


図 12.4: P 制御系の応答 $u(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K = 0.2$, 極 $-Kk = -0.118$

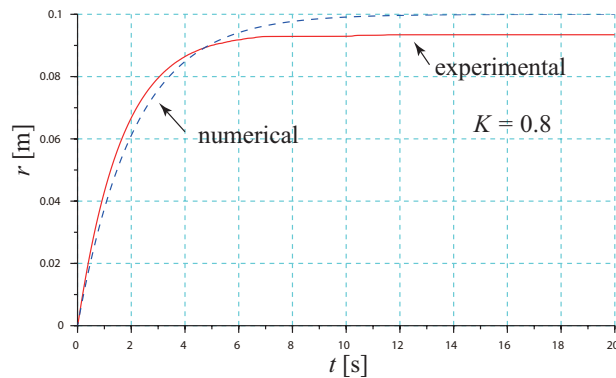


図 12.5: P 制御系の応答 $r(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K = 0.8$, 極 $-Kk = -0.472$

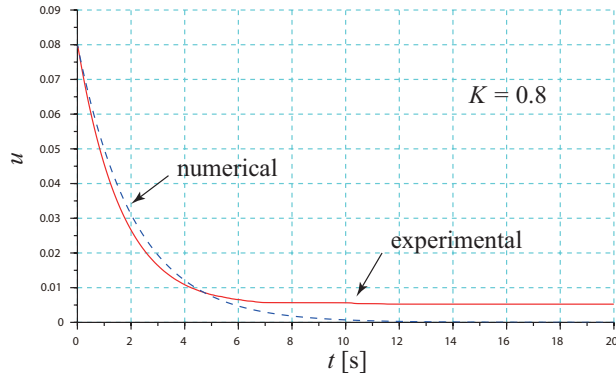


図 12.6: P 制御系の応答 $u(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K = 0.8$, 極 $-Kk = -0.472$

P 制御のための Arduino Due コード

```
// daisha_P.ino 2019.1.27
// TG321B-SV-50-HB 24V
#include <DueTimer.h>
#include <math.h>

const int quad_A = 2;
const int quad_B = 13;
const unsigned int mask_quad_A = digitalPinToBitMask(quad_A);
const unsigned int mask_quad_B = digitalPinToBitMask(quad_B);

#define speed_pin 4 // 速度指令電圧の出力ピン (PWM)
#define direction_pin 22 // 方向指令電圧の出力ピン (PWM)
#define DATA_NUM_MAX 1000 // 実験データの記録長
#define DATA_SAMP 20 // DATA_SAMP サンプル毎に実験データを記録
#define Comp 0.
#define Fv 50. // 駆動系の速度フィードバック補償のゲイン
#define Conv 0.0032227 // 整数 (0~1023) →電圧 (0~3.3V) 変換係数 3.3/1024
#define CONV 77.5757 // 電圧 (0~3.3V) →整数 (0~255) 変換係数 256/3.3
#define C_r 0.00000140743350881 // %pi*Dp/50/(500*4) Dp=44.8mm
#define Vmax 3.3
#define umax 3.3
#define vmax 0.02
#define rf 0.1
#define K 0.8
#define k 0.59
#define T 0.5
#define A 0.
#define B 0.59
```

```

#define Tf 0.2

volatile int counter1=0,datanum=0;
volatile double t = 0.,u1=0.; // 時間 [s]
volatile double dt = 0.001; // サンプリング周期 [s]
volatile double exp_data[5][1002];
volatile double x_r=0.,r=0.;
volatile double zy[1002],xc=0.,xf=0.;
volatile int32_t pulseCount;
volatile int32_t pulseCount0;

double sgn(double zz)
{
    double x = 1.;
    if (zz < 0) x = -1.;
    if (zz ==0) x = 0.;
    return(x);
}

double sat(double zz, double aa) // 飽和関数の定義
{
    double x;
    x = zz;
    if(fabs(x) > aa) x = aa*sgn(x);
    return(x);
}

/*****
    割り込み関数（ここに制御則を記述する）
*****/
void control()
{
    int V_sat,i,j;
    double ur_v,v_sat;
    double zr,dr,r_dot;
    double y,u1,u,u_delay;
    double dxc,dxf,yc,uc;
    pulseCount = REG_TCO_CV0;

    zr=r;
    r = -C_r*(pulseCount-pulseCount0); //カウント値を変位 [m] に変換
    r_dot=(r-zr)/dt; // 差分近似

```



```

u=K*(rf-r); // P control
ur_v=Fv*(u-r_dot);
v_sat=sat(fabs(ur_v)+Comp,Vmax);
V_sat=(int)(CONV*v_sat);
if(ur_v>0.0) //方向指令電圧を direction_pin へ出力
{
    digitalWrite(direction_pin, LOW);
}
else{
    digitalWrite(direction_pin, HIGH);
}
analogWrite(speed_pin, V_sat);

if(counter1==DATA_SAMP){ // 指定サンプリング毎に実験結果を記録
    if(datanum<DATA_NUM_MAX){
        exp_data[0][datanum]=y;
        exp_data[1][datanum]=r_dot;
        exp_data[2][datanum]=u;
        exp_data[3][datanum]=ur_v;
        exp_data[4][datanum]=v_sat;
    } datanum++;
    counter1=0;
}
++counter1;
t += dt; //時間を進める
}
// 電源起動時とリセットの時だけのみ処理される関数 (初期化と設定処理)
void setup() {
    int i;

    // activate peripheral functions for quad pins
    REG_PIOB_PDR = mask_quad_A; // activate peripheral function
    REG_PIOB_ABSR |= mask_quad_A; // choose peripheral option B
    REG_PIOB_PDR = mask_quad_B; // activate peripheral function
    REG_PIOB_ABSR |= mask_quad_B; // choose peripheral option B

    // activate clock for TCO
    REG_PMC_PCER0 = (1<<27);
    // select XCO as clock source and set capture mode
    REG_TCO_CMRO = 5;
    // activate quadrature encoder and position measure mode, no filters
    REG_TCO_BMR = (1<<9)|(1<<8)|(1<<12);

```

```

// enable the clock (CLKEN=1) and reset the counter (SWTRG=1)
// SWTRG = 1 necessary to start the clock!!
REG_TCO_CCRO = 5;

pinMode(direction_pin, OUTPUT); // direction_pin ピンを出力に設定

Serial.begin(115200);
//Serial.println("start=1");
analogWrite(speed_pin, 0);
}
// 繰り返し実行される処理の関数 (メインの処理)
void loop() {
  int i;
  double t1;

  if ( Serial.available() > 0 ) {
    String str = Serial.readStringUntil('\r');
    if ( str == "1" ) {
      Timer3.attachInterrupt(control).start(1000);

      pulseCount0 = REG_TCO_CVO;

      while(1){
        if(datanum>=DATA_NUM_MAX){
          Timer3.stop(); // 制御停止
          break;
        }
      }
      analogWrite(speed_pin, 0); // モータの停止
//PC へシリアル通信で値を送る
exp_data[0][DATA_NUM_MAX]=exp_data[0][DATA_NUM_MAX-1];
for(i=0;i<DATA_NUM_MAX;++i){
  t1=DATA_SAMP*dt*(i+1);
  Serial.print(t1,6);
  Serial.print(",");
  Serial.print(exp_data[0][i],6);
  Serial.print(",");
  Serial.print(exp_data[1][i],6);
  Serial.print(",");
  Serial.print(exp_data[2][i],6);
  Serial.print(",");
  Serial.print(exp_data[3][i],6);

```

```

Serial.print(",");
Serial.println(exp_data[4][i],6);
}
}
}
}
}
}

```

12.3 PI 制御

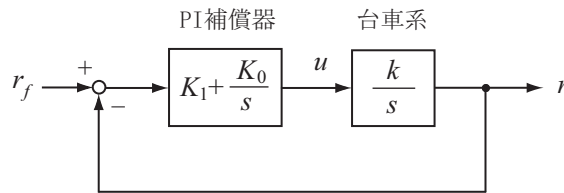


図 12.7: PI 制御系のブロック線図

図 12.7 の PI 制御系において, r_f から r までの伝達関数は次式である.

$$\frac{r(s)}{r_f(s)} = \frac{(K_1 s + K_0)k}{s^2 + K_1 k s + K_0 k} \quad (12.4)$$

PI 補償器は Skogestad の SIMC 法¹ (設計パラメータ τ_c [s]) によって設計した.

$$K_0 = 0.106, \quad K_1 = 0.847, \quad \tau_c = 2s \quad (12.5)$$

$$K_0 = 0.424, \quad K_1 = 1.695, \quad \tau_c = 1s \quad (12.6)$$

$$K_0 = 0.865, \quad K_1 = 2.421, \quad \tau_c = 0.7s \quad (12.7)$$

PI 制御のための Arduino Due コード

```

void control()
{
int V_sat,i,j;
double ur_v,v_sat;
double zr,dr,r_dot;
double y,ul,u,u_delay;

```

¹S.Skogestad: Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning, Journal of Process Control, **13**, pp.291-309, 2003.

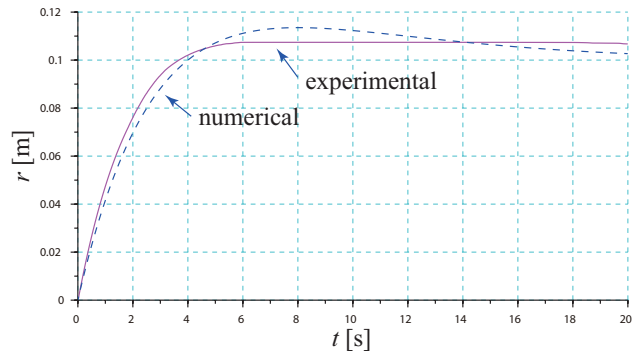


図 12.8: PI 制御系の応答 $r(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K_0 = 0.106$, $K_1 = 0.847$, 極 -0.25 , -0.25

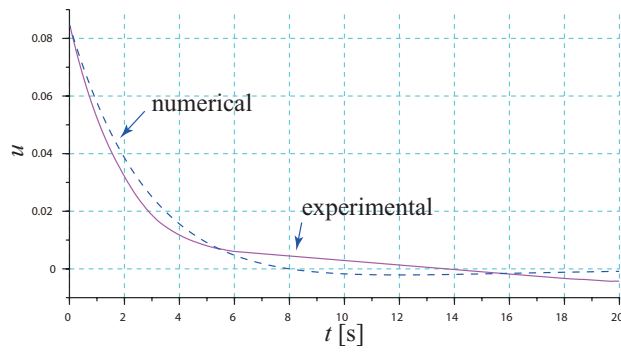


図 12.9: PI 制御系の応答 $u(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K_0 = 0.106$, $K_1 = 0.847$, 極 -0.25 , -0.25

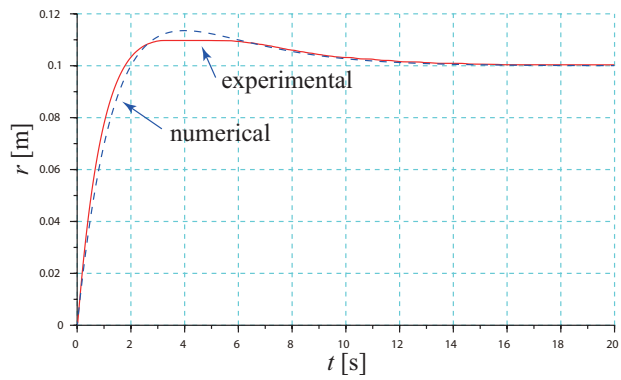


図 12.10: PI 制御系の応答 $r(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K_0 = 0.424$, $K_1 = 1.685$, 極 -0.5 , -0.5

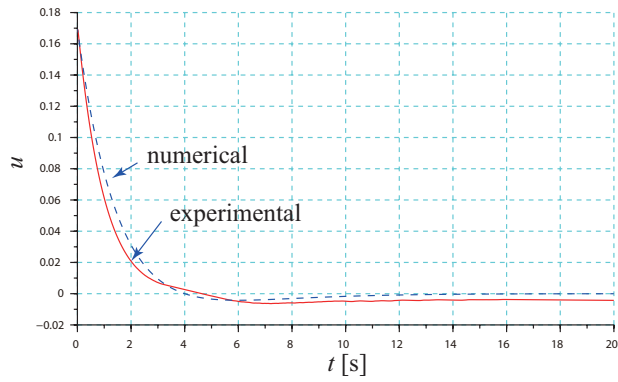


図 12.11: PI 制御系の応答 $u(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K_0 = 0.424$, $K_1 = 1.685$, 極 -0.5 , -0.5

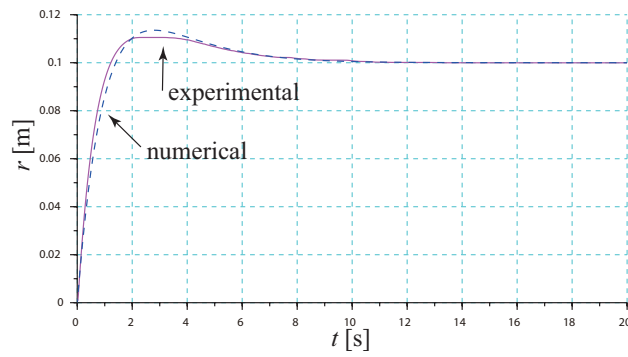


図 12.12: PI 制御系の応答 $r(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K_0 = 0.865$, $K_1 = 2.421$, 極 -0.714 , -0.714

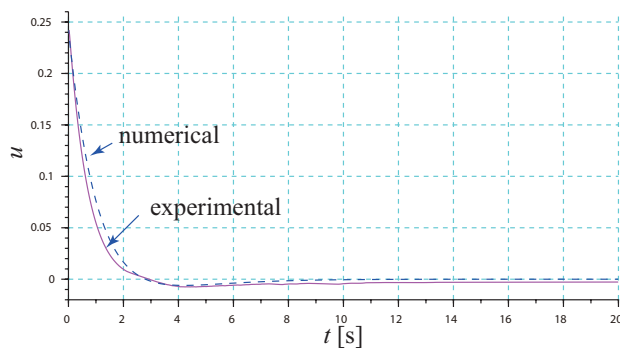


図 12.13: PI 制御系の応答 $u(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $K_0 = 0.865$, $K_1 = 2.421$, 極 -0.714 , -0.714

```

double dxc,dxf,yc,uc;
pulseCount = REG_TCO_CV0;

zr=r;
r = -C_r*(pulseCount-pulseCount0); //カウント値を変位 [m] に変換
r_dot=(r-zr)/dt; // 差分近似
y=r;
// Skogestad's PI controller
ul=Cc*xc+Dc*(rf-y);
u=sat(ul,umax);
dxc=Ac*xc+Bc*(rf-y);
xc+=dxc*dt;
ur_v=Fv*(u-r_dot);
v_sat=sat(fabs(ur_v)+Comp,Vmax);
V_sat=(int)(CONV*v_sat);
if(ur_v>0.0) //方向指令電圧を direction_pin へ出力
{
    digitalWrite(direction_pin, LOW);
}
else{
    digitalWrite(direction_pin, HIGH);
}
analogWrite(speed_pin, V_sat);

```

12.4 IMC 制御

内部モデル制御 (IMC) 法²によって制御系を設計する。
まず、制御対象を P 補償器によって安定化する。

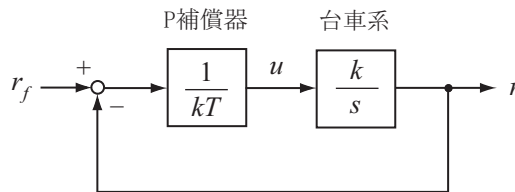


図 12.14: P 制御系のブロック線図

この制御系の伝達関数は次式となる。

$$\frac{r(s)}{r_f(s)} = P(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (12.8)$$

²M.Morari and E.Zafriou: Robust process control, Prentice-Hall Inc., 1998.

上記の制御則は積分特性を持たないため、外乱や状態推定誤差によって台車の位置 r に偏差が発生する可能性がある。一方、飽和制御と積分器の組み合わせでリセットウィンドアップが生じることが知られている。この問題点を改善するため、IMC 構造を導入してコントローラに積分特性を持たせる方法を採用する。

図 12.15 の IMC 制御系を構成する。 P_M は P のモデルであり、 $C_0(s)$ は安定な伝達関数(フィルタ)である。平衡点近くでコントローラ C が積分特性を持つように、 $C_0(0) = 1$ とする。実際、このとき、 $P_M(0) = 1$ から

$$C_0(0)P_M(0) = 1 \tag{12.9}$$

となり、コントローラは積分特性を持つ。 $C_0(s)$ は次式とした。

$$C_0(s) = \frac{1}{T_f s + 1}, \quad T_f = 0.2 \text{ s} \tag{12.10}$$

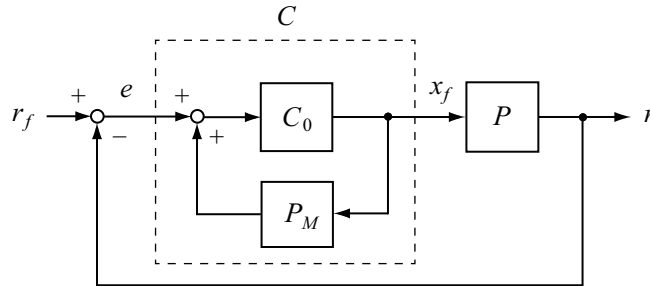


図 12.15: IMC 制御系のブロック線図

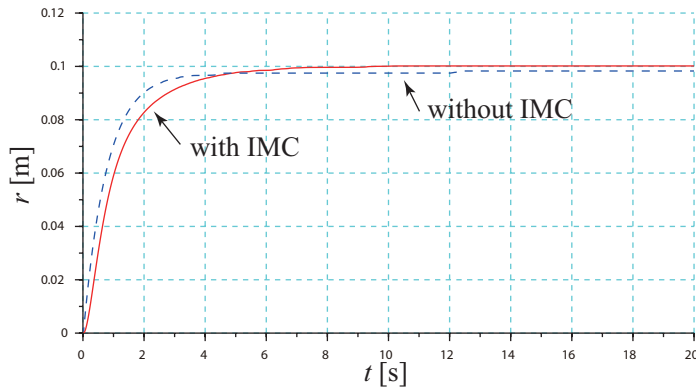


図 12.16: IMC 制御系の応答 $r(t)$: $r_f = 0.1\text{m}$, $T = 1\text{s}$, 極 -1

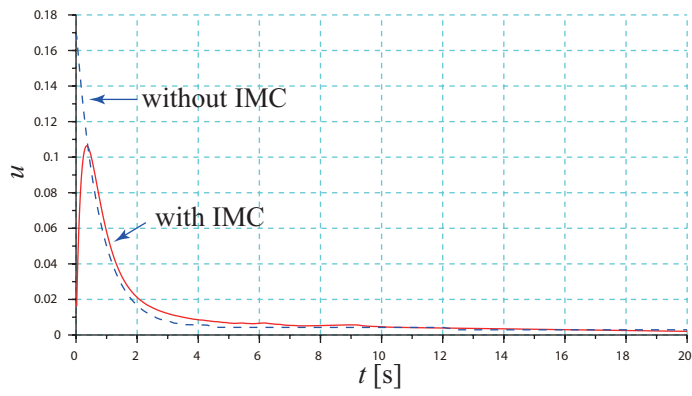


図 12.17: IMC 制御系の応答 $u(t)$: $r_f = 0.1m$, $T = 1s$, 極 -1

付録 A 問題の解答

A.1 第1章

1. 制御系において出力が希望の状態になるようにあらかじめプログラムされた入力を制御系に与えるという制御方式である。制御器の構造が簡単なので安価に制御系を構成できるという利点があるが、モデル誤差、外乱、ノイズなどには対処できない。
2. 自転車を運転する。お湯と水の蛇口を調節してシャワーの温度を適温にする。歩行する。ボールを投げる。ねじを適切な力で締める。ブランコをこぐ。等々。

A.2 第2章

- 1.(1) k_1 と k_2 の等価ばね定数（並列結合）は $k_{12} = k_1 + k_2$ である。そして、 k_{12} と k_3 の等価ばね定数（直列結合）は

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_3}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3}} = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

である。数学モデルは次式である。

$$x = \frac{1}{k_e} u$$

- 1.(2) k_2 と k_3 の等価ばね定数（直列結合）は

$$k_{23} = \frac{1}{\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

k_{23} と k_1 の等価ばね定数（並列結合）は

$$k_e = k_1 + k_{23} = k_1 + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

である。数学モデルは次式である。

$$x = \frac{1}{k_e} u$$

- 2.(1) R_1 と R_2 の合成抵抗（直列結合）は、 $R_{12} = R_1 + R_2$ である。 R_3 と R_4 の合成抵抗（並列結合）は

$$R_{34} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

である。例題 2.6 の結果から、数学モデルは次式となる。

$$e_o = \frac{R_{34}}{R_{12} + R_{34}} e_i = \frac{\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} e_i = \frac{R_3 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4} e_i$$

2.(2) R_1 と R_2 の合成抵抗（並列結合）は

$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

R_3 と R_4 の合成抵抗（直列結合）は $R_{34} = R_3 + R_4$ である。例題 2.6 の結果から、数学モデルは次式となる。

$$e_o = \frac{R_{34}}{R_{12} + R_{34}} e_i = \frac{R_3 + R_4}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} e_i = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e_i$$

A.3 第 3 章

1. コンデンサ両端の電圧を v とする。電圧に関して次式が成り立つ。

$$e_i = v + e_o \tag{A.1}$$

$$e_o = Ri \quad \text{すなわち} \quad i = \frac{1}{R} e_o$$

$$v = \frac{1}{C} \int idt \quad \text{から} \quad \dot{v} = \frac{1}{C} i = \frac{1}{CR} e_o \tag{A.2}$$

(A.1) 式を t で微分して (A.2) 式を用いると

$$\dot{e}_i = \dot{v} + \dot{e}_o = \frac{1}{CR} e_o + \dot{e}_o$$

すなわち

$$\dot{e}_o + \frac{1}{CR} e_o = \dot{e}_i$$

2. 各ダンパーの相対変位を x_1, x_2 とすると

$$x = x_1 + x_2$$

すなわち

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \tag{A.3}$$

力のつりあいから

$$c_1 \dot{x}_1 = u, \quad c_2 \dot{x}_2 = u$$

よって

$$\dot{x}_1 = \frac{u}{c_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{u}{c_2} \tag{A.4}$$

(A.4) 式を (A.3) 式に代入すると

$$\dot{x} = \frac{u}{c_1} + \frac{u}{c_2} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) u = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} u$$

すなわち

$$\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \dot{x} = u$$

3. A点における力のつりあいから

$$u - c_1 \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = 0$$

すなわち

$$(c_1 + c_2) \dot{x} = u$$

4. A点における力のつりあいから

$$u - kx - c\dot{x} = 0$$

すなわち

$$c\dot{x} + kx = u$$

を得る.

A.4 第4章

1. A点における力のつりあいから

$$u - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \tag{A.5}$$

B点における力のつりあいから

$$c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - m\ddot{x}_2 = 0 \tag{A.6}$$

を得る. (A.5) から

$$c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = u \tag{A.7}$$

また, 上式から

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \frac{u}{c}$$

これを t で微分して

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - \frac{\dot{u}}{c} \tag{A.8}$$

(A.7), (A.8) 式を (A.6) 式に代入すると

$$u - m \left(\ddot{x}_1 - \frac{\dot{u}}{c} \right) = 0$$

すなわち

$$m\ddot{x}_1 = \frac{m}{c}\dot{u} + u$$

2. A 点における力のつりあいから

$$u - k(x_1 - x_2) = 0 \tag{A.9}$$

B 点における力のつりあいから

$$k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0 \tag{A.10}$$

C 点における力のつりあいから

$$c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - m\ddot{x}_3 = 0 \tag{A.11}$$

(A.9) 式から

$$k(x_1 - x_2) = u \tag{A.12}$$

また, これから

$$x_2 = x_1 - \frac{u}{k}$$

さらに t で微分して

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \frac{\dot{u}}{k} \tag{A.13}$$

(A.10), (A.12) 式から

$$c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = u \tag{A.14}$$

また, 上式から

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 - \frac{u}{c}$$

これに, (A.13) 式を用いて \dot{x}_2 を消去する.

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_1 - \frac{\dot{u}}{k} - \frac{u}{c}$$

さらに, t で微分して

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_1 - \frac{\ddot{u}}{k} - \frac{\dot{u}}{c} \tag{A.15}$$

(A.15), (A.14) 式を (A.11) 式に代入すると

$$u - m \left(\ddot{x}_1 - \frac{\ddot{u}}{k} - \frac{\dot{u}}{c} \right) = 0$$

すなわち

$$m\ddot{x}_1 = \frac{m}{k}\ddot{u} + \frac{m}{c}\dot{u} + u$$

3. R, C での電圧降下をそれぞれ v_1, v_2 として電圧の平衡式を立てると

$$v_1 + v_2 + e_o = e_i \quad (\text{A.16})$$

また, 次の関係に注意する.

$$v_1 = Ri \quad (\text{A.17})$$

$$v_2 = \frac{1}{C} \int idt \quad (\text{A.18})$$

$$e_o = Li, \quad \dot{i} = \frac{1}{L}e_o \quad (\text{A.19})$$

(A.19) 式を t で微分して

$$\ddot{i} = \frac{1}{L}\dot{e}_o \quad (\text{A.20})$$

(A.17), (A.18) 式を (A.16) 式に代入すると

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt + e_o = e_i$$

これを t で 2 回微分して

$$R\ddot{i} + \frac{1}{C}\dot{i} + \ddot{e}_o = \ddot{e}_i$$

上式に (A.19), (A.20) 式を用いると

$$\frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{CL}e_o + \ddot{e}_o = \ddot{e}_i$$

すなわち

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{CL}e_o = \ddot{e}_i$$

4. L, C での電圧降下をそれぞれ v_1, v_2 として電圧の平衡式を立てると

$$v_1 + v_2 + e_o = e_i \quad (\text{A.21})$$

また, 以下の関係に注意する.

$$v_1 = Li$$

$$v_2 = \frac{1}{C} \int idt$$

$$e_o = Ri$$

$$i = \frac{e_o}{R}, \quad \dot{i} = \frac{\dot{e}_o}{R}, \quad \ddot{i} = \frac{\ddot{e}_o}{R} \quad (\text{A.22})$$

以上から

$$L\dot{i} + \frac{1}{C}i + \dot{e}_o = e_i$$

これを t で微分すると

$$L\ddot{i} + \frac{1}{C}\dot{i} + \dot{e}_o = \dot{e}_i$$

となり, (A.22) を用いると

$$\frac{L}{R}\ddot{e}_o + \frac{1}{CR}e_o + \dot{e}_o = \dot{e}_i$$

すなわち

$$\frac{L}{R}\ddot{e}_o + \dot{e}_o + \frac{1}{CR}e_o = \dot{e}_i$$

A.5 第5章

1. (1) ラプラス変換表から

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4}$$

(2) (1) の解と推移定理から

$$F(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-a)^3} + \frac{1}{(s-a)^4}$$

(3) 加法定理から

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cdot \cos \phi + \cos \omega t \cdot \sin \phi$$

よって

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cos \phi + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin \phi = \frac{s \sin \phi + \omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$$

(4) (3) の解と推移定理から

$$F(s) = \frac{(s-a) \sin \phi + \omega \cos \phi}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

2. 次の関数のグラフを描き, そのラプラス変換を求めよ.

1.

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

(2)

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

(3)

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2s} e^{-s} - \frac{1}{2s} e^{-2s}$$

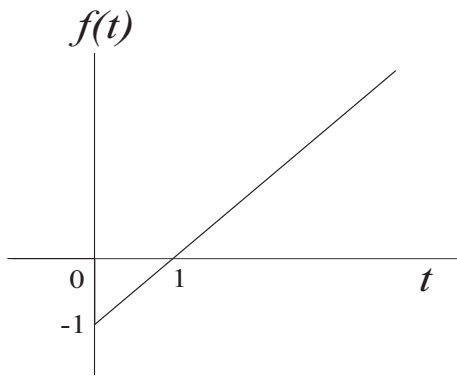


図 A.1: (1) のグラフ

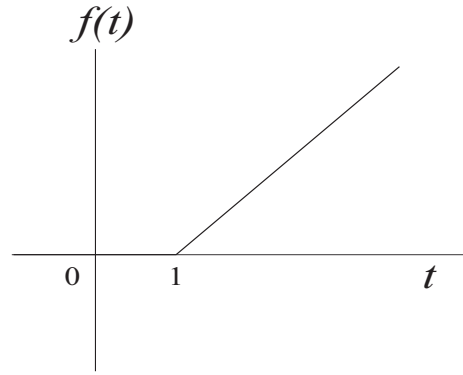


図 A.2: (2) のグラフ

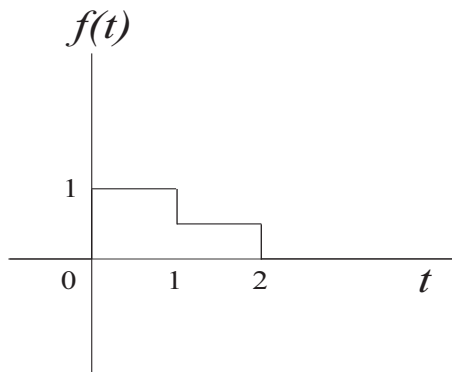


図 A.3: (3) のグラフ

3. 微分方程式

$$\dot{e}_o(t) + e_o(t) = \dot{e}_i(t)$$

をラプラス変換すると

$$sE_o(s) - e_o(0) + E_o(s) = sE_i(s) - e_i(0) \quad (\text{A.23})$$

$e_i(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$ なので

$$E_i(s) = \frac{1}{s+1}, \quad e_i(0) = 1$$

上式と $e_o(0) = 0$ を (A.23) 式に代入すると

$$(s+1)E_o(s) = \frac{s}{s+1} - 1$$

すなわち

$$E_o(s) = \frac{s}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

これを逆ラプラス変換すると

$$e_o(t) = -te^{-t}\mathbf{1}(t)$$

を得る.

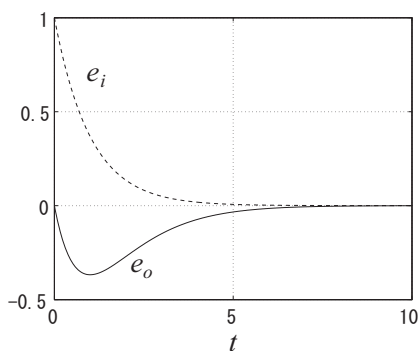


図 A.4: 問題 3 の入力 $e_i(t)$ と出力 $e_o(t)$ ($CR = 1$, $e_o(0) = 0$, $e_i(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$)

4. $e_i(t) = \sin \omega t \cdot \mathbf{1}(t)$ なので

$$E_i(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad e_i(0) = 0$$

上式と $e_o(0) = 0$ を (A.23) 式に代入すると

$$(s+1)E_o(s) = \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}$$

すなわち

$$E_o(s) = \frac{\omega s}{(s+1)(s^2 + \omega^2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{A.24})$$

展開公式から

$$K_1 = (s+1)E_o(s)|_{s=-1} = \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=-1} = -\frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

(A.24) 式の分子の恒等式から

$$K_1(s^2 + \omega^2) + (K_2s + K_3)(s+1) = \omega s$$

すなわち

$$(K_1 + K_2)s^2 + (K_2 + K_3)s + K_1\omega^2 + K_3 = \omega s$$

を得る。係数の比較から

$$K_1 + K_2 = 0, \quad K_2 = -K_1 = \frac{\omega}{1 + \omega^2}$$

$$K_1\omega^2 + K_3 = 0, \quad K_3 = -K_1\omega^2 = \frac{\omega^3}{1 + \omega^2}$$

よって

$$\begin{aligned} E_o(s) &= \frac{\omega}{1 + \omega^2} \left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s + \omega^2}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{\omega}{1 + \omega^2} \left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \omega \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換して

$$e_o(t) = \frac{\omega}{1 + \omega^2} (-e^{-t} + \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \mathbf{1}(t)$$

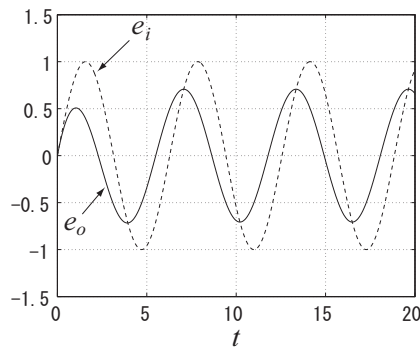


図 A.5: 問題 4 の入力 $e_i(t)$ と出力 $e_o(t)$ ($CR = 1$, $e_o(0) = 0$, $e_i(t) = \sin \omega t \cdot \mathbf{1}(t)$)

5. 微分方程式は次式となる.

$$\ddot{x}(t) + 0.1\dot{x}(t) + x(t) = \mathbf{1}(t)$$

これをラプラス変換すると

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 0.1(sX(s) - x(0)) + X(s) = \frac{1}{s}$$

これに初期値 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ を代入して整理すると

$$(s^2 + 0.1s + 1)X(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$$

よって, $X(s)$ は次式として得られる.

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s^2 + 0.1s + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 0.1s + 1} \quad (\text{A.25})$$

展開公式から

$$K_1 = sX(s)|_{s=0} = \frac{s+1}{s^2 + 0.1s + 1} \Big|_{s=0} = 1$$

(A.25) 式の分子の恒等式から

$$s^2 + 0.1s + 1 + K_2s^2 + K_3s = s + 1$$

すなわち

$$(1 + K_2)s^2 + (0.1 + K_3)s + 1 = s + 1$$

係数の比較から

$$K_2 = -1, \quad K_3 = 0.9$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} + \frac{-s + 0.9}{(s + 0.05)^2 + 0.9975} = \frac{1}{s} - \frac{(s + 0.05) - 0.95}{(s + 0.05)^2 + 0.9975} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 0.05}{(s + 0.05)^2 + 0.9975} + \frac{0.95}{\sqrt{0.9975}} \frac{\sqrt{0.9975}}{(s + 0.05)^2 + 0.9975} \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換して

$$x(t) = \left\{ 1 - e^{-0.05t} \left(\cos \sqrt{0.9975} t - \frac{0.95}{\sqrt{0.9975}} \sin \sqrt{0.9975} t \right) \right\} \mathbf{1}(t)$$

6. 微分方程式は次式である.

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = \mathbf{1}(t)$$

これをラプラス変換すると

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = \frac{1}{s}$$

初期値 $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -1$ を代入して整理すると

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = 5s + 14 + \frac{1}{s} = \frac{5s^2 + 14s + 1}{s}$$

これから

$$X(s) = \frac{5s^2 + 14s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

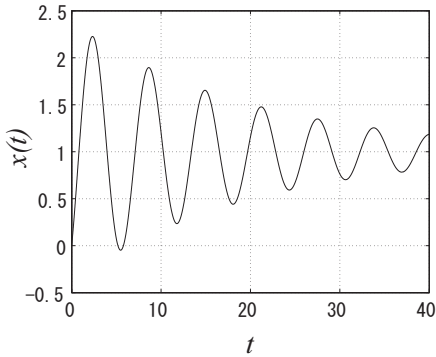


図 A.6: 問題 5 の解 $x(t)$ ($m = 1, c = 0.1, k = 1, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, u(t) = \mathbf{1}(t)$)

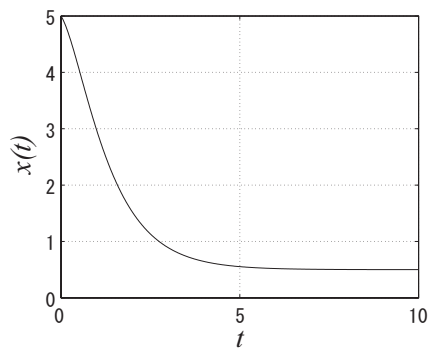


図 A.7: 問題 6 の解 $x(t)$ ($m = 1, c = 3, k = 2, x(0) = 5, \dot{x}(0) = -1, u(t) = \mathbf{1}(t)$)

を得る。展開公式から

$$K_1 = sX(s)|_{s=0} = \frac{5s^2 + 14s + 1}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = (s+1)X(s)|_{s=-1} = \frac{5s^2 + 14s + 1}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = 8$$

$$K_3 = (s+2)X(s)|_{s=-2} = \frac{5s^2 + 14s + 1}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{7}{2}$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{8}{s+1} + \frac{7}{2} \frac{1}{s+2}$$

これを逆ラプラス変換して

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} + 8e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} \right) \mathbf{1}(t)$$

A.6 第6章

1.

$$(1) \quad k\dot{x}_1(t) = \dot{u}(t) + \frac{k}{c}u(t)$$

を初期値 0 のもとでラプラス変換すると

$$ksX_1(s) = sU(s) + \frac{k}{c}U(s) = \left(s + \frac{k}{c}\right)U(s)$$

よって, $U(s)$ から $X_1(s)$ までの伝達関数は

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{s + \frac{k}{c}}{ks} = \frac{cs + k}{cks}$$

$$(2) \quad m\ddot{x}_1(t) = \frac{m}{k}\ddot{u}(t) + \frac{m}{c}\dot{u}(t) + u(t)$$

を変換すると

$$ms^2X_1(s) = \frac{m}{k}s^2U(s) + \frac{m}{c}sU(s) + U(s) = \left(\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{c}s + 1\right)U(s)$$

これから

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{c}s + 1}{ms^2} = \frac{cms^2 + kms + kc}{kcms^2}$$

2.

$$(1) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s + 1}{s + 3}$$

から

$$(s + 3)Y(s) = (5s + 1)U(s)$$

を得る. これを微分方程式に直すと

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = 5\dot{u}(t) + u(t)$$

$$(2) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

から

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)U(s)$$

すなわち

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$$

3. (1)

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + 5y_1(t) = 2\dot{u}(t) + u(t) \\ \dot{y}_2(t) + 3\dot{y}_2(t) + y_2(t) = \dot{y}_1 + 5y_1(t) \end{cases}$$

を変換すると

$$\begin{cases} (s+5)Y_1(s) = (2s+1)U(s) \\ (s^2+3s+1)Y_2(s) = (s+5)Y_1(s) \end{cases}$$

したがって、 $U(s)$ から $Y_2(s)$ までの伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{Y_2(s)}{U(s)} &= \frac{Y_1(s)}{U(s)} \times \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \\ &= \frac{2s+1}{s+5} \times \frac{s+5}{s^2+3s+1} = \frac{2s+1}{s^2+3s+1} \end{aligned}$$

これから

$$(s^2+3s+1)Y_2(s) = (2s+1)U(s)$$

すなわち

$$\ddot{y}_2(t) + 3\dot{y}_2(t) + y_2(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

(2)

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + y_1(t) = u(t) \\ \dot{y}_2(t) + y_2(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_3(t) + y_3(t) = y_2(t) \end{cases}$$

これらから

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}, \quad \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{1}{s+1}, \quad \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} = \frac{1}{s+1}$$

よって

$$\frac{Y_3(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}$$

上式から

$$(s^3+3s^2+3s+1)Y_3(s) = U(s)$$

すなわち

$$y_3^{(3)}(t) + 3\ddot{y}_3(t) + 3\dot{y}_3(t) + y_3(t) = u(t)$$

(3)

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) + y_1(t) = 2\dot{u}(t) + u(t) \\ 2\dot{y}_2(t) + y_2(t) = 4\dot{y}_1(t) + 3y_1(t) \\ 4\dot{y}_3(t) + 3y_3(t) = y_2(t) \end{cases}$$

これらから

$$\frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{2s+1}{s+1}, \quad \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{4s+3}{2s+1}, \quad \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} = \frac{1}{4s+3}$$

よって

$$\frac{Y_3(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

これから

$$(s+1)Y_3(s) = U(s)$$

すなわち

$$\dot{y}_3(t) + y_3(t) = u(t)$$

A.7 第7章

1. (1)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = 1 + 1 = 2$$

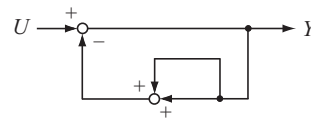
(2)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

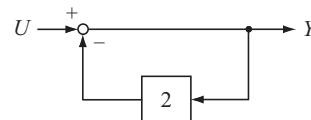
(3)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+1 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

(4)



等価変換1



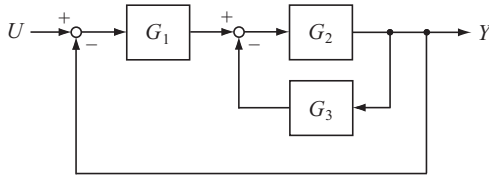
等価変換2

図 A.8: (3) のブロック線図の等価変換

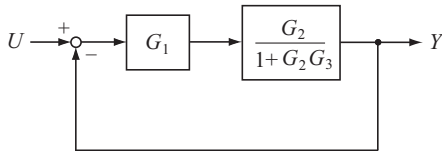
$$\frac{Y}{U} = (G_1 + G_3)G_2$$

(5)

$$\frac{Y}{U} = \frac{\frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_3}}{1 + \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_3}} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_3 + G_1 G_2}$$

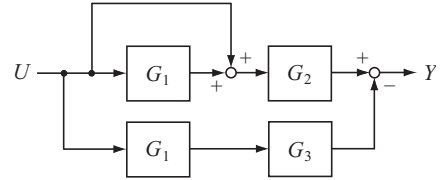


等価変換1

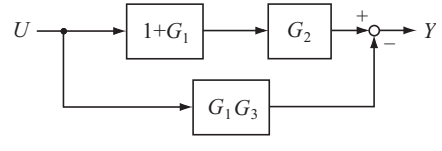


等価変換2

図 A.9: (5) のブロック線図の等価変換

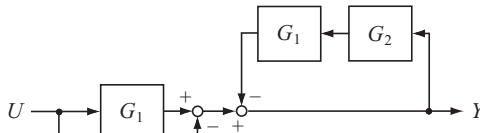


等価変換1

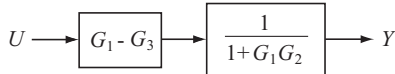


等価変換2

図 A.10: (6) のブロック線図の等価変換

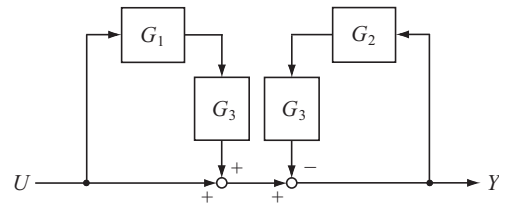


等価変換1

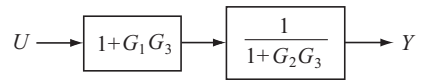


等価変換2

図 A.11: (7) のブロック線図の等価変換



等価変換1



等価変換2

図 A.12: (8) のブロック線図の等価変換

(6)

$$\frac{Y}{U} = (1 + G_1)G_2 - G_1G_3$$

(7)

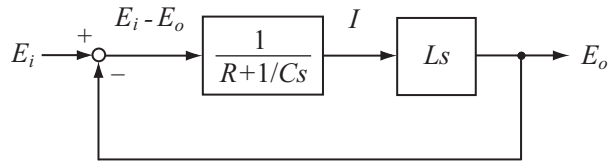
$$\frac{Y}{U} = \frac{G_1 - G_3}{1 + G_1G_2}$$

(8)

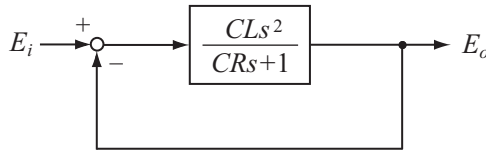
$$\frac{Y}{U} = \frac{1 + G_1G_3}{1 + G_2G_3}$$

A.8 第8章

1.

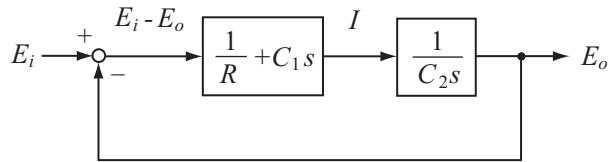


回路のブロック線図

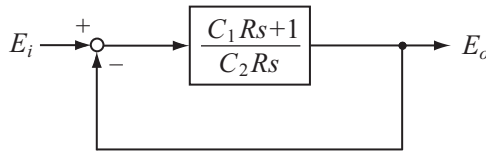


等価変換1

図 A.13: (1) のブロック線図



回路のブロック線図



等価変換1

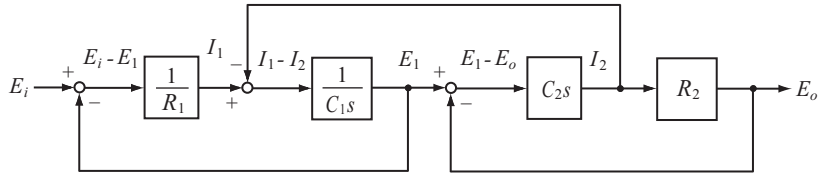
図 A.14: (2) のブロック線図

(1) 図 A.13 から

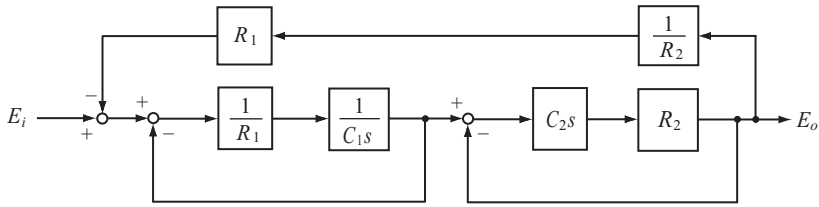
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{CLs^2}{CRs + 1}}{1 + \frac{CLs^2}{CRs + 1}} = \frac{CLs^2}{CLs^2 + CRs + 1}$$

(2) 図 A.14 から

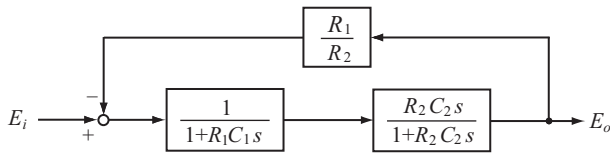
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{C_1 R s + 1}{C_2 R s}}{1 + \frac{C_1 R s + 1}{C_2 R s}} = \frac{C_1 R s + 1}{(C_1 + C_2) R s + 1}$$



回路系に対するブロック線図



等価変換1



等価変換2

図 A.15: (3) のブロック線図

(3) 図 A.15 から

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{\frac{R_2 C_2 s}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}}{1 + \frac{R_2 C_2 s}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)} \frac{R_1}{R_2}} \\ &= \frac{R_2 C_2 s}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{R_2 C_2 s}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

2. 図 A.16 から

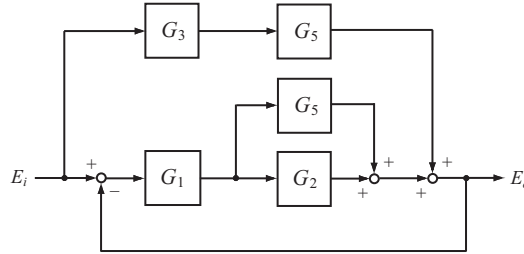
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(1 + \frac{G_3 G_5}{G_1 (G_2 + G_5)} \right) \frac{G_1 (G_2 + G_5)}{1 + G_1 (G_2 + G_5)} = \frac{G_1 (G_2 + G_5) + G_3 G_5}{1 + G_1 (G_2 + G_5)}$$

これに

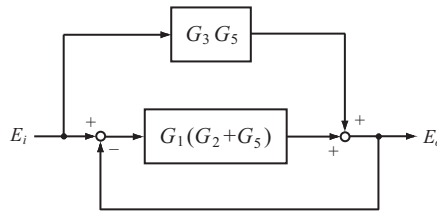
$$G_1 = \frac{1}{R_1}, \quad G_2 = \frac{1}{C_2 s}, \quad G_3 = C_1 s, \quad G_4 = R_2, \quad G_5 = \frac{G_4}{1 + G_3 G_4}$$

を代入すると次式を得る.

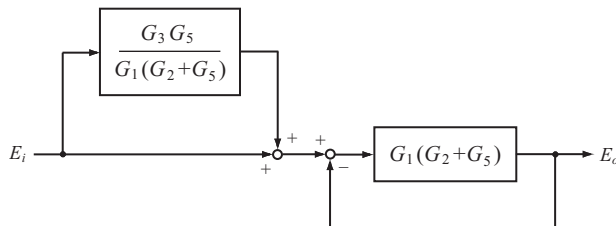
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_2 (C_1 + C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_2 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + 1}$$



等価変換3



等価変換4



等価変換5

図 A.16: (3) のブロック線図

A.9 第9章

1. (1)

$$t^2 e^{-t} = \frac{t^2}{e^t} = \frac{t^2}{1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \dots}$$

分子・分母を t^2 で割り, $t \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1/t^2 + 1/t + 1/2! + t/3! + \dots} = 0$$

(2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(-1+2j)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} e^{2jt} = 0$$

2. 最高次の係数を1とした特性方程式を求め、安定性条件を適用する。

(1)

$$s + 2 = 0, \text{ 安定.}$$

(2)

$$s^2 + 2s + \frac{3}{2} = 0, \text{ 安定.}$$

(3)

$$s^3 + s^2 + \frac{3}{2}s + 2 = 0, \quad 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}, \text{ 不安定.}$$

A.10 第10章

1.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - \Theta(s)}{R(s)} = 1 - \frac{\Theta(s)}{R(s)}$$

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1s + K_0}{s(Js^2 + cs)}}{1 + \frac{K_1s + K_0}{s(Js^2 + cs)}} = \frac{K_1s + K_0}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0}$$

よって

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{K_1s + K_0}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0} = \frac{s^2(Js + c)}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0}$$

2. (a) $R(s) = 1/s$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Js + c)}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0} = 0$$

(b) $R(s) = 1/s^2$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(Js + c)}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0} = 0$$

(c) $R(s) = 2/s^3$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(Js + c)}{Js^3 + cs^2 + K_1s + K_0} = \frac{2c}{K_0}$$

3. (1)

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_2s^2 + K_1s + K_0}{s} \frac{1}{Js^2 + cs}}{1 + \frac{K_2s^2 + K_1s + K_0}{s} \frac{1}{Js^2 + cs}} = \frac{K_2s^2 + K_1s + K_0}{Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0}$$

(2) 特性方程式

$$Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0 = 0$$

または

$$s^3 + \frac{c + K_2}{J}s^2 + \frac{K_1}{J}s + \frac{K_0}{J} = 0$$

安定性条件

$$c + K_2 > 0, \quad K_1 > 0, \quad K_2 > 0, \quad (c + K_2)K_1 - JK_0 > 0$$

(3)

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_2s^2 + K_1s + K_0}{s}}{1 + \frac{K_2s^2 + K_1s + K_0}{s} \frac{1}{Js^2 + cs}} = \frac{(K_2s^2 + K_1s + K_0)(Js^2 + cs)}{Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0}$$

(4)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - \Theta(s)}{R(s)} = 1 - \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{s^2(Js + c)}{Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0}$$

(5)(a) $R(s) = 1/s$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Js + c)}{Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0} = 0$$

(b) $R(s) = 1/s^2$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(Js + c)}{Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0} = 0$$

(c) $R(s) = 2/s^3$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(Js + c)}{Js^3 + (c + K_2)s^2 + K_1s + K_0} = \frac{2c}{K_0}$$

A.11 第11章

1. (1)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{2s+1} = \frac{2}{s+1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{2}x(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x(t) \end{aligned} \right\}$$

(2)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+6}{s^2+3s+2}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

(3)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2}{s^2+4s+5} = \frac{2(s^2+4s+5) - 8s - 10}{s^2+4s+5} = 2 - \frac{8s+10}{s^2+4s+5}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -10 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + 2u(t) \end{aligned} \right\}$$

(4)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6s^2+4s+3}{s^3+2s^2+3s+1}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

2.

$$\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) + 5\theta(t) = u(t)$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+s+5}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta(0) - du(0) \\ \dot{\theta}(0) - \mathbf{c}bu(0) - d\dot{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\ddot{e}_o(t) + \dot{e}_o(t) + e_o(t) = \ddot{e}_i(t)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{s^2}{s^2 + s + 1} = \frac{(s^2 + s + 1) - s - 1}{s^2 + s + 1} = 1 - \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_i(t) \\ e_o(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + e_i(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_o(0) - de_i(0) \\ \dot{e}_o(0) - \mathbf{c}be_i(0) - d\dot{e}_i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

よって

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.

$$\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) + 5\theta(t) = u(t)$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 5}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \theta(0) - du(0) \\ \dot{\theta}(0) - \mathbf{c}bu(0) - d\dot{u}(0) \end{bmatrix}$$

$u(0) = 1$, $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $d = 0$, $\mathbf{c}b = 0$ なので上式の右辺は $\mathbf{0}$, よって, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

```

octave:1> A = [0 1;-5 -1];
octave:2> b = [0;1];
octave:3> c = [1 0];
octave:4> d = 0;
octave:5> T = 0.1;
octave:6> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:7> c2d(sys,T);
octave:8> AT = ans.a
AT =

```

```

    0.975913    0.094372
   -0.471858    0.881541

```

```

octave:9> bT = ans.b
bT =

```

```

    0.0048174
    0.0943717

```

```

octave:10> x = [0;0];
octave:11> xx = [];
octave:12> u = 1;
octave:13> for i = 0:150
> xx = [xx x];
> x = AT*x + bT*u;
> end
octave:14> y = c*xx;
octave:15> t = 0:150;
octave:16> grid('on')
octave:17> plot(t*T,y)

```

5.

$$\ddot{e}_o(t) + \dot{e}_o(t) + e_o(t) = \ddot{e}_i(t)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{s^2}{s^2 + s + 1} = \frac{(s^2 + s + 1) - s - 1}{s^2 + s + 1} = 1 - \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_i(t) \\ e_o(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + e_i(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e_o(0) - de_i(0) \\ \dot{e}_o(0) - \mathbf{c}be_i(0) - d\dot{e}_i(0) \end{bmatrix}$$

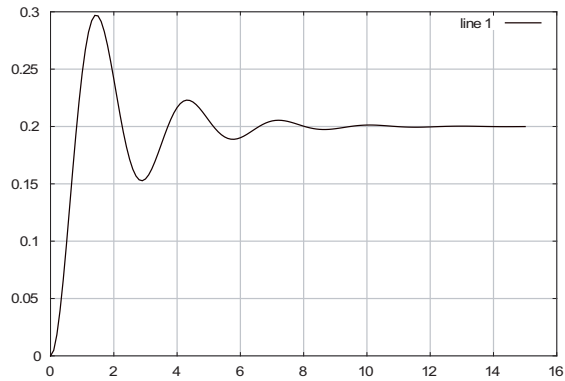


図 A.17: 1 自由度振動系 (回転系) の応答

$$e_o(0) = -2, \quad \dot{e}_o(0) = 1$$

$$e_i(0) = 0, \quad \dot{e}_i(0) = 2 \quad (2 \cos 2t|_{t=0} = 2 \text{ から})$$

```

octave:1> A = [0 1;-1 -1];
octave:2> b = [0;1];
octave:3> c = [-1 -1];
octave:4> d = 1;
octave:5> T = 0.05;
octave:6> sys = ss2sys(A,b,c,d);
octave:7> c2d(sys,T);
octave:8> AT = ans.a
AT =

    0.998771    0.048750
   -0.048750    0.950021

octave:9> bT = ans.b
bT =

    0.0012292
    0.0487503

octave:10> y0 = -2;
octave:11> ydot0 = 1;
octave:12> u0 = 0;
octave:13> udot0 = 2;
octave:14> P = [c;c*A]
P =

   -1   -1

```



```
1 0
```

```
octave:15> q = [y0; ydot0-d*u0]
```

```
q =
```

```
-2
```

```
-1
```

```
octave:16> x0 = inv(P)*q
```

```
x0 =
```

```
-1
```

```
3
```

```
octave:17> x = x0;
```

```
octave:18> yy = [];
```

```
octave:19> u = u0;
```

```
octave:20> y = c*x + d*u;
```

```
octave:21> for i=0:400
```

```
> yy = [yy y];
```

```
> u = sin(2*i*T);
```

```
> x = AT*x + bT*u;
```

```
> y = c*x + d*u;
```

```
> end
```

```
octave:22> t = 0:400;
```

```
octave:23> grid('on')
```

```
octave:24> plot(t*T,yy)
```

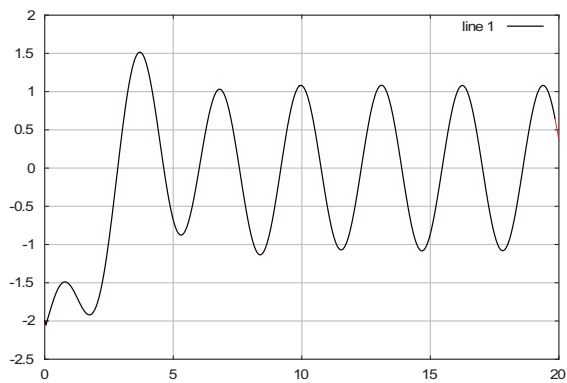


図 A.18: RCL 回路系の応答

関連図書

- [1] 奥山佳史ほか：制御工学-古典から現代まで-, 朝倉書店, 2001.
- [2] 吉田和信：Matlab/Octave による制御系の設計, 科学技術出版, 2003.
- [3] 古田勝久ほか：モデリングとフィードバック制御-動的システムの解析-, 東京電機大学出版局, 2001.
- [4] S.Bennett(古田, 山北監訳)：制御工学の歴史, コロナ社, 1998.
- [5] 高橋安人：コンピュータによるダイナミックシステム論, 科学技術社, 1970.
- [6] 高橋安人：システムと制御 第2版 上, 岩波書店, 1978.
- [7] 示村悦二郎：自動制御とは何か, コロナ社, 1990.
- [8] 大須賀公一, 足立修一：システム制御へのアプローチ, コロナ社, 1999.
- [9] 杉江俊治, 藤田政之：フィードバック制御入門, コロナ社, 1999.
- [10] 中野道雄, 美多 勉：制御基礎理論-古典から現代まで-, 昭晃堂, 1982.
- [11] 大須賀公一：制御工学, 共立出版, 1995.

システムと制御入門

2004年1月30日初版

2004年10月1日第二版

2020年10月1日第三版

Copyrights © 2021 吉田和信

著者 吉田和信