ループ整形法による PID 補償器の設計

PID Controller Design by Loop-Shaping Methods

島根大学　○ 吉田 和信

K. Yoshida

Shimane University

Abstract Design algorithms for finding a set of parameters in PID controllers are proposed that realize specified gain-crossover frequency and phase margin, which are used as the measures of speed of response and relative stability, respectively. These algorithms are developed based on the idea of the classical loop-shaping by gain and phase-lead compensation. With these a fine tuning can be performed with a small number of iterations.

1 はじめに

PID 補償器は現在でも産業界において広く利用されている．個々のプラントに対するたかだか三つのパラメータ調整は容易ではなく，これまで，種々の調整則が提案されてきた．例えば，整定時間に着目した Chien-Hrones-Reswick (CHR) 法 [1] や IMC(Internal Model Control) 法に基づく Skogestad の SIMC 法 [2] がある．

本稿では，古典的なループ整形法であるゲイン・位相進み補償の考え方に基づいた PID 補償器の設計法を提案する．本手法によれば，少ない回数の試行錯誤で良好な応答を与える補償器を設計できる．

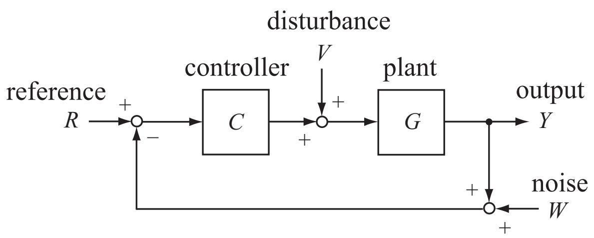

図 1: 制御系のブロック線図

2 PD 補償器の設計法

制御系のブロック線図を図 1 に示す．PD 補償器の伝達関数は次式である．

$$C(s) = K_P(T_D s + 1) \tag{1}$$

K_P はゲイン補償に，$(T_D s + 1)$ は位相進み補償に用いる．$(T_D j\omega + 1)$ のゲインと位相は次式で計算される．

$$|T_D j\omega + 1| = \sqrt{1 + \omega^2 T_D^2} \tag{2}$$

$$\angle(T_D j\omega + 1) = \tan^{-1}\omega T_D \tag{3}$$

本手法では，ゲイン交差周波数 ω_P と位相余裕 ϕ_M をそれぞれ速応性と安定性（減衰性）の目安として用いる．

ω_P を指定値とし，ϕ_M を指定値以上とする K_P，T_D の調整法は以下のとおりである．

1. $C(s) = \tilde{K}_P$ とし，指定した ω_P を与える $\tilde{K}_P$ を求める．

2. ϕ_M が指定値以上であれば $C(s) = \tilde{K}_P$ として調整を終了する（補償器は P 補償器となる）．ϕ_M が指定値に対して ϕ_a だけ不足している場合，これを補償するため，$\angle(T_D j\omega_P + 1) = \phi_a$ とする T_D を次式で計算する．これは (3) 式から得られる．

$$T_D = \frac{\tan\phi_a}{\omega_P} \tag{4}$$

3. $(T_D s + 1)$ による $\omega = \omega_P$ におけるゲインの増加 $\sqrt{1 + \omega_P^2 T_D^2}$ を補償するため，この逆数を $\tilde{K}_P$ に掛けたものを K_P とする．

$$K_P = \frac{\tilde{K}_P}{\sqrt{1 + \omega_P^2 T_D^2}} \tag{5}$$

$\phi_a \geq 90^\circ$ のとき，(4) 式から T_D を求めることができない．この場合，設計仕様を変更する必要がある．

3 PI 補償器の設計法

PI 補償器の伝達関数は次式である．

$$C(s) = K_P \frac{T_I s + 1}{T_I s} \tag{6}$$

いま，$K'_P = K_P/T_I$ とおき，$1/s$ をプラントの一部と考える．すなわち，プラントと補償器をそれぞれ

$$G'(s) = \frac{G(s)}{s}, \quad C'(s) = K'_P(T_I s + 1) \tag{7}$$

とみなす．このとき，$C'(s)$ は PD 補償器となるので，制御対象を $G'(s)$，補償器を $C'(s)$ として，PD 補償器の設計法を適用する．

4 PID 補償器の設計法

PID 補償器の伝達関数は次のカスケード形式とする．

$$C(s) = K_P \frac{(T_I s + 1)(T_D s + 1)}{T_I s} \tag{8}$$

いま，$K'_P = K_P/T_I$ とおき，$1/s$ を制御対象の一部と考える．さらに，$T_I = T_D$ とし，プラントと補償器をそれぞれ

$$G'(s) = \frac{G(s)}{s}, \quad C'(s) = K'_P(T_D s + 1)^2 \tag{9}$$

とみなす．このとき，補償器 $C'(s)$ は PD 型補償器となるので，制御対象を $G'(s)$，補償器を $C'(s)$ として，PD 補償器の設計法を適用する．ただし，位相進み ϕ_a を与える T_D の計算式とゲイン補償を行う計算式は $(T_D s+1)$ が 2 乗されているのでその修正が必要となる．

ω_P を指定値とし，ϕ_M を指定値以上とする K_P，T_D，T_I の調整法は以下のとおりである．

1. $C'(s) = \tilde{K}_P$ とし，指定した ω_P を与える $\tilde{K}_P$ を求める．

2. ϕ_M が指定値以上であれば $C(s) = \tilde{K}_P/s$ として調整を終了する（補償器は I 補償器となる）．ϕ_M が指定値に対して ϕ_a だけ不足している場合，これを補償するため，$\angle(T_D j\omega_P + 1)^2 = \phi_a$ とする T_D を次式で計算する．

$$T_D = \frac{\tan(\phi_a/2)}{\omega_P} \tag{10}$$

T_I は T_D に等しいとおく．

$$T_I = T_D \tag{11}$$

3. $(T_D s+1)^2$ による $\omega = \omega_P$ におけるゲインの増加 $1+\omega_P^2 T_D^2$ を補償するため，この逆数を $\tilde{K}_P$ に掛けたものを K'_P とする．

$$K'_P = \frac{\tilde{K}_P}{1+\omega_P^2 T_D^2}, \quad K_P = K'_P T_I \tag{12}$$

$\phi_a \geq 180°$ のとき，(10) 式から T_D を求めることができない．この場合，設計仕様を変更する必要がある．

5 数値例

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^4} e^{-Ls}, \quad L = 1 \tag{13}$$

に対する PID 補償器を提案手法，CHR 法 (目標値，20% overshoot，1 次遅れ+むだ時間系への近似には Half rule[2] を使用)，SIMC 法によって設計した．制御系の目標値から出力までの単位ステップ応答を図 2 に，設計結果を表 1 に示す．ただし，表 1 の補償器パラメータは，次の標準的な PID 補償器で表したものである．

$$C(s) = \kappa_P \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right) \tag{14}$$

数値計算の際には，e^{-Ls} を次の 2 次のパデ近似で置き換えた．

$$e^{-Ls} \simeq \frac{L^2 s^2 - 6Ls + 12}{L^2 s^2 + 6Ls + 12} \tag{15}$$

提案手法による設計手順は次のとおりである．$\phi_M \geq 65°$ とした（安定性の大雑把な指標として $\phi_M \simeq 100\zeta$ が利用できる．ζ は 2 次標準形の減衰比である）．そして，$\tilde{K}_P$ を小さな値から次第に大きくし（ω_P が次第に大きくなる），ステップ応答を見ながら，適切な速応性を与える $\tilde{K}_P = 0.12$ を求めた．提案手法によって，速応性，安定性とも良好な応答を与える補償器が設計できた．SIMC 法などによる制御系の ω_P と ϕ_M を本手法の初期仕様として採用することもできる．

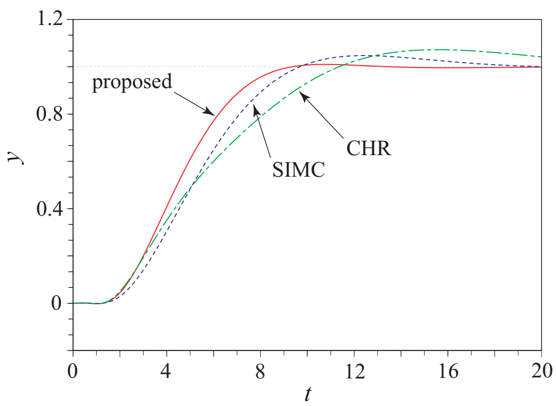

図 2: 各制御系の単位ステップ応答

表 1: 設計結果：$C(s) = \kappa_P(1 + 1/(\tau_I s) + \tau_D s)$

method	κ_P	τ_I	τ_D	ω_P	ϕ_M °
proposed	0.33	3.05	0.76	0.22	65
CHR	0.20	2.04	1.65	0.18	61.2
SIMC	0.25	2.5	0.6	0.20	61.7

参考文献

[1] 荒木光彦：古典制御理論基礎編，倍風館，pp.189–190 (2000)

[2] S. Skogestad and I. Postlethwaite: Multivariable feedback control: Analysis and design Second Ed.; John Wiley & Sons Ltd., pp. 54–59 (2005)