

現代制御理論 ノート

2000 年度後期 (制御工学 III)

島根大学総合理工学部
電子制御システム工学科

吉田和信

目次

第 1 章	状態方程式と伝達関数	1
1.1	状態方程式	1
1.1.1	線形システムの場合	2
1.1.2	非線形システムの場合	7
1.2	状態方程式と伝達関数	9
1.3	問題	10
1.4	状態方程式の解と状態推移行列	12
1.4.1	s 領域解	12
1.4.2	時間領域解	12
1.5	安定性と安定判別法	15
1.5.1	安定性と固有値	15
1.5.2	ラウス・フルビッツの安定判別法	18
第 2 章	座標変換と可制御性・可観測性	21
2.1	座標変換とシステムの等価性	21
2.2	可制御性・可観測性	23
2.2.1	可制御性条件	23
2.2.2	可制御性条件の証明	25
2.2.3	可観測性	28
2.3	対角正準形式と可制御性・可観測性	32
2.4	伝達関数と極-零点消去	34
2.5	可制御正準形式, 可観測正準形式とその応用	35
2.5.1	可制御正準形式	35
2.5.2	変換行列	37
2.5.3	可観測正準形式	39
第 3 章	安定化の基礎理論	41
3.1	状態フィードバック制御と安定化	41
3.1.1	状態フィードバックによる極配置	41
3.1.2	最適レギュレータ	43
3.2	オブザーバによる安定化	46

3.2.1	オブザーバを用いない状態推定法	47
3.2.2	同一次元オブザーバ	48
3.2.3	最小次元オブザーバ	51

第1章 状態方程式と伝達関数

1.1 状態方程式

教科書では

伝達関数 (ブロック線図) → 状態方程式

という説明であるが ,

微分方程式 → 状態方程式

という手順で求める方が自然な流れである .

現代制御理論では , つぎの形の連立 1 階微分方程式系を制御対象として扱う .

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t) \quad (1.2)$$

(1.1) 式を状態方程式 , (1.2) 式を出力方程式という . 各変数のサイズおよび名称はつぎのとおりである .

$\boldsymbol{x}(t)(n \times 1)$: 状態 (変数)

$u(t)(1 \times 1)$: 入力 (変数)

$\boldsymbol{y}(t)(1 \times 1)$: 出力 (変数)

このとき , 各行列のサイズは

$$\boldsymbol{A}(n \times n), \boldsymbol{b}(n \times 1), \boldsymbol{c}(1 \times n), d(1 \times 1)$$

となる . u から y への直達項があるシステムはまれであって , 通常 , $d = 0$ である . 本講義では , 1 入力 1 出力システムを扱うが , 一般に m 入力 l 出力のシステムとなったときには , $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を行列 $\boldsymbol{B}(n \times m), \boldsymbol{C}(l \times n)$ とすればよい . 以下 , 具体的な動的システムに対する状態方程式と出力方程式を求めよう .

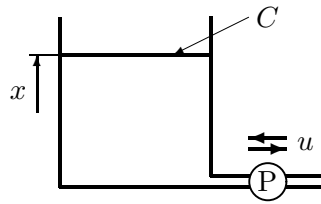


図 1.1: 水槽系

1.1.1 線形システムの場合

水槽系

図 1.1 に示す断面積 C の水槽系を考える．水槽に結合された管にはポンプが取り付けられており，水を給排水できる構造になっている． u は流量であり，その符号を流出のとき負，流入のとき正とする．このとき，水位 x に関する微分方程式は

$$C\dot{x} = u \quad (1.3)$$

とかかれる．これを状態方程式の形に直すと

$$\dot{x} = \frac{1}{C}u \quad (1.4)$$

となる．また，出力を x とすると，出力方程式は

$$y = x \quad (1.5)$$

で与えられる．

熱系

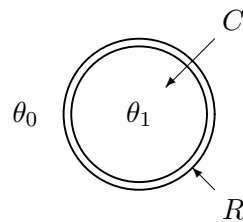


図 1.2: 熱系

図 1.2 の熱系において，容器の内部温度を θ_1 ，外部温度を θ_0 としよう．Newton の冷却則（物体の温度変化率は物体と周囲との温度差に比例する）から， θ_1 に関する微分方程式が

$$C\dot{\theta}_1 = \frac{1}{R}(\theta_0 - \theta_1) \quad (1.6)$$

と得られる。ただし， C は容器の熱容量， R は壁面の伝熱抵抗を表す。各変数を

$$x = \theta_1, \quad u = \theta_0, \quad y = \theta_1 \quad (1.7)$$

とおけば，状態方程式と出力方程式はつぎのようになる。

$$\dot{x} = -\frac{1}{CR}x + \frac{1}{CR}u \quad (1.8)$$

$$y = x \quad (1.9)$$

RC回路

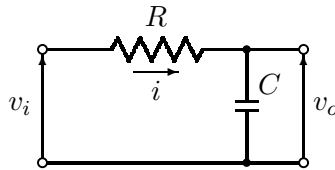


図 1.3: RC回路

回路内の電圧に関して次の2式が成立する。

$$Ri + v_o = v_i \quad (1.10)$$

$$v_o = \frac{1}{C} \int idt \quad (1.11)$$

式(1.11)から

$$\dot{v}_o = \frac{1}{C}i \quad (1.12)$$

すなわち

$$i = C\dot{v}_o \quad (1.13)$$

これを式(1.10)に代入して整理すると

$$\dot{v}_o = \frac{1}{RC}(v_i - v_o) \quad (1.14)$$

状態と入力を

$$x = v_o, \quad u = v_i \quad (1.15)$$

と定義すると状態方程式と出力方程式は

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \quad (1.16)$$

$$y = x \quad (1.17)$$

となる。

慣性系

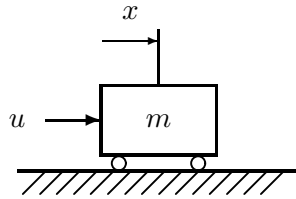


図 1.4: 慣性系

図 1.4 の慣性系において， m は物体の質量， u は外力を表す．物体と床との摩擦を無視すれば，物体の運動方程式は

$$m\ddot{x} = u \quad (1.18)$$

となる．ここで

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad y = x \quad (1.19)$$

とおくことによって，つぎの状態方程式と出力方程式を得る．

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (1.20)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1.21)$$

ただし

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

である．

1 自由度振動系

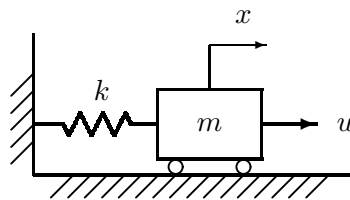


図 1.5: 1 自由度振動系

図 1.5 の 1 自由度振動系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = u \quad (1.23)$$

すなわち

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}u \quad (1.24)$$

で表される。ただし, x は物体の平衡点からの振れ, k はばね係数である。ここで

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad y = x \quad (1.25)$$

とおくと

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (1.26)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad (1.27)$$

を得る。

RLC 回路

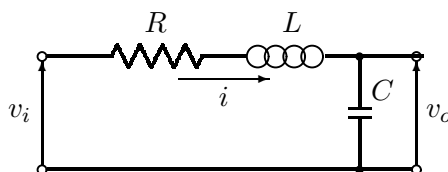


図 1.6: RLC 回路

電圧の関係から

$$L\dot{i} + Ri + v_o = v_i \quad (1.28)$$

$$v_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad (1.29)$$

を得る。式 (1.29) から

$$\dot{v}_o = \frac{1}{C} i \quad (1.30)$$

すなわち

$$i = C\dot{v}_o \quad (1.31)$$

これを式(1.28)に代入して

$$LC\ddot{v}_o + RC\dot{v}_o + v_o = v_i \quad (1.32)$$

を得る .

状態 , 入力を

$$x_1 = v_o, \quad x_2 = \dot{v}_o, \quad u = v_i \quad (1.33)$$

と定義すると

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{C}x_2 + \frac{1}{LC}u \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

となる . これを行列・ベクトル表示すると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (1.35)$$

を得る .

2 自由度振動系

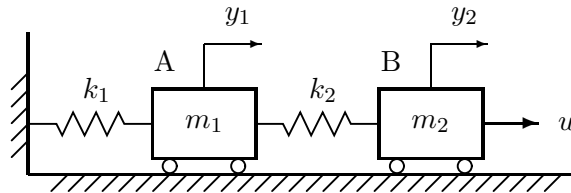


図 1.7: 2 自由度振動系

図 1.7 の 2 自由度振動系を考えよう . 物体 A が y_1 の増える方向へ運動するとき , 物体 A に働く力の和を , 順方向力を正 , 逆方向力を負として求めると , 力の総和は零となるので

$$-m_1\ddot{y}_1 - k_1y_1 - k_2(y_1 - y_2) = 0 \quad (1.36)$$

すなわち , 物体 A の運動方程式として

$$\ddot{y}_1 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}y_2 \quad (1.37)$$

を得る．同様に，物体 B に対する力のつりあい式が

$$-m_2\ddot{y}_2 - k_2(y_2 - y_1) + u = 0 \quad (1.38)$$

と求められ，これから，物体 B の運動方程式

$$\ddot{y}_2 = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_2 + \frac{1}{m_2}u \quad (1.39)$$

を得る．ここで

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = \dot{y}_1, \quad x_4 = \dot{y}_2 \quad (1.40)$$

とおくと，状態方程式，出力方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u \quad (1.41)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1.42)$$

と表されることがわかる．

1.1.2 非線形システムの場合

以下では，非線形システムの一つの平衡点まわりで線形化を行うことによって，(1.1)，(1.2) 式の形の状態方程式と出力方程式を求める例を考える．

流出孔のある水槽系

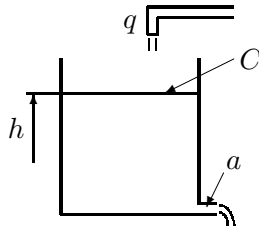


図 1.8: 流出孔のある水槽系

図 1.8 の水槽系において, q は流入する水の流量, a は流出孔の断面積とする. $a \ll C$ の場合, トリチェリの定理によって, 孔から流出する水の速度は次式となる.

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1.43)$$

ただし, g は重力加速度である. これを利用して水位 h に関する微分方程式を求めると

$$C\dot{h} = q - fav \quad (1.44)$$

となる. f は流量係数であり, 1 よりも小さな値をもつ. いま, 基準流入量を q_0 , $q = q_0$ に対する平衡水位を h_0 としよう. すなわち

$$q_0 = fa\sqrt{2gh_0} \quad (1.45)$$

である. このとき, h と q を

$$h = h_0 + x, \quad q = q_0 + u \quad (1.46)$$

とかいて, h_0, q_0 からの偏差 x, u に着目する. (1.46) 式を (1.44) 式に代入し, さらに, x/h_0 を微小量と仮定して

$$\sqrt{h_0 + x} = \sqrt{h_0} \left(1 + \frac{x}{h_0}\right)^{1/2} \simeq \sqrt{h_0} \left(1 + \frac{x}{2h_0}\right) \quad (1.47)$$

と線形近似すると, つぎの線形化状態方程式を得る.

$$\dot{x} = -\frac{1}{CR}x + \frac{1}{C}u \quad (1.48)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{fa\sqrt{g}}{\sqrt{2h_0}} \quad (1.49)$$

また, 出力を x とすれば, 出力方程式は

$$y = x \quad (1.50)$$

とかける.

振子系

図 1.9 の振子系の運動方程式を求めよう. 振り子を θ が増える方向に回転させるとき, 順方向モーメントを正, 逆方向モーメントを負とし, モーメントのつりあい式を計算すると

$$-J\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + u = 0 \quad (1.51)$$

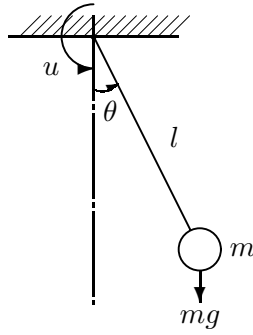


図 1.9: 振り子系

となる．ただし， J は支点まわりの振り子の慣性モーメント， u は振り子に加わるトルクである．この式に $J = ml^2$ を代入して整理すると

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{ml^2} u \quad (1.52)$$

ここで， θ は微小量と仮定して， $\sin \theta \simeq \theta$ と線形化すれば

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta + \frac{1}{ml^2} u \quad (1.53)$$

を得る．状態と出力を

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad y = \theta \quad (1.54)$$

と定義すると，状態方程式と出力方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (1.55)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1.56)$$

となる．

1.2 状態方程式と伝達関数

次のシステムを考えよう．

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (\text{状態方程式}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \quad (\text{出力方程式}) \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

(1.57) 式をラプラス変換すると

$$\left. \begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{c}\mathbf{X}(s) \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

となり, $x(0) = 0$ として整理すれば次式を得る.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1}b \quad (1.59)$$

$G(s)$ は $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数である. また

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \quad (1.60)$$

なので, $G(s)$ は次のように書ける.

$$G(s) = \frac{c \text{adj}(sI - A)b}{|sI - A|} \quad (1.61)$$

$G(s)$ の分母 = 0 として得られる方程式

$$|sI - A| = 0 \quad (1.62)$$

を特性方程式といい, この方程式の解をシステムの極 (または特性根) という. また, $G(s)$ の分子 = 0 として得られる方程式

$$c \text{adj}(sI - A)b = 0 \quad (1.63)$$

の解をシステムの零点という.

テキスト p120 例題 8.1 を検討せよ.

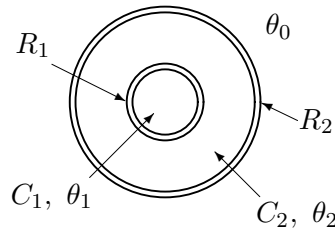


図 1.10: 熱系

1.3 問題

1. 図 1.10 に示すように, 容器 1 が容器 2 の中であって, それぞれの容器には液体が入っているとす. 各容器の熱容量と温度を C_1, θ_1 および C_2, θ_2 とし, 容器の壁の伝熱抵抗をそれぞれ R_1, R_2 とする. また, 周囲の温度を θ_0 で表す. この熱系の状態方程式を求めよ. ただし, 状態を $x_1 = \theta_1, x_2 = \theta_2$ とせよ.

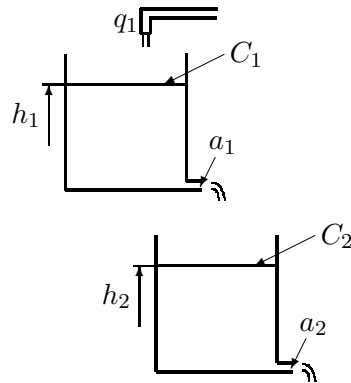


図 1.11: 直列結合された水槽系

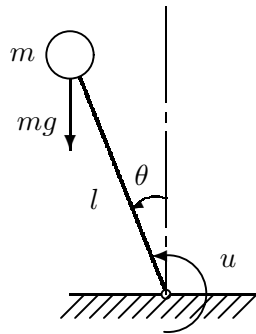


図 1.12: 倒立振り子系

2. 図 1.11 の直列結合された水槽系に対する線形化状態方程式を求めよ．ただし，平均流入量 q_0 に対する平衡水位からの偏差を状態とせよ．
3. 図 1.12 に示す倒立振り子系の線形化状態方程式を求めよ．ただし，状態を $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ とせよ．
4. 図 1.7 の 2 自由度振動系において，ばね k_1 , k_2 と並列にダンパー c_1 , c_2 が取り付けられた場合の状態方程式を求めよ．
5. テキスト p134 の演習問題 8.1 を解け．

1.4 状態方程式の解と状態推移行列

1.4.1 s 領域解

状態方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

をラプラス変換すると

$$\left. \begin{aligned} s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{b}U(s) \\ Y(s) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{X}(s) \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

これから

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{b}U(s)$$

すなわち, s 領域解として

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s) \quad (1.66)$$

$$Y(s) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s) \quad (1.67)$$

を得る. これを逆ラプラス変換すれば時間領域解が求まる.

1.4.2 時間領域解

まず, 自由系

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \quad (1.68)$$

の解を求める. このため, 次を定義する.

$$e^{At} := \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!} + \cdots \quad (1.69)$$

e^{At} : 状態推移行列 (行列指数関数)

この行列級数は常に収束することが知られている. (1.68) 式の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) \quad (1.70)$$

である. これは, 上式を t で微分すると

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}e^{At}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \quad (1.71)$$

となり, (1.68) 式をみたすことから確認できる.

e^{At} の性質

1. $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$
2. $e^0 = I$
3. $e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$
4. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

強制系

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad (1.72)$$

の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau \quad (1.73)$$

出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{c}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau \quad (1.74)$$

となる .

(1.73) 式の誘導

(1.72) 式の解を

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{v}(t) \quad (1.75)$$

と仮定する (定数変化法) .

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}e^{At}\boldsymbol{v}(t) + e^{At}\dot{\boldsymbol{v}}(t) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \end{aligned}$$

より

$$e^{At}\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{b}u(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = e^{-At}\boldsymbol{b}u(t)$$

$$d\boldsymbol{v}(t) = e^{-At}\boldsymbol{b}u(t)dt$$

$$\int_0^t d\boldsymbol{v}(t) = \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(0) = \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

これを元の式へ代入

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \left\{ \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \right\}$$

$t = 0$ とおくことにより, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{x}(0)$. よって

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \left\{ \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \right\} \\ &= e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.76)$$

また, s 領域解

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s)$$

との比較によって

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (1.77)$$

がわかる. e^{At} を計算するには本式を用いればよい.

例題

熱系または RC 回路系

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \quad (1.78)$$

$$RC = 1, \quad x(0) = -1, \quad u(t) = 1, \quad t \geq 0$$

の解を求めよ.

i) s 領域解を用いる方法

$$\mathbf{A} = -1, \quad \mathbf{b} = 1$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (s + 1)^{-1} = \frac{1}{s + 1}$$

よって s 領域解は

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 1} \frac{1}{s} \\ &= -\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s + 1} \end{aligned} \quad (1.79)$$

これを逆ラプラス変換して

$$x(t) = 1 - 2e^{-t} \quad (1.80)$$

を得る .

ii) 時間領域解を用いる方法

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}(-1) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= -e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ &= -e^{-t} + e^{-t}(e^t - 1) \\ &= 1 - 2e^{-t} \end{aligned} \quad (1.81)$$

テキスト p124 例題 8.2 を検討せよ .

テキスト p134 演習問題 8.2, 8.3 を解け .

1.5 安定性と安定判別法

1.5.1 安定性と固有値

1 階線形システム

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (1.82)$$

の解は

$$x(t) = e^{at}x(0) \quad (1.83)$$

a は (1.82) 式の固有値である .

安定性 : 十分に時間が経過したとき , システムの状態が 0 に落ち着くこと .

システムが安定となる条件

$$a < 0 \quad (1.84)$$

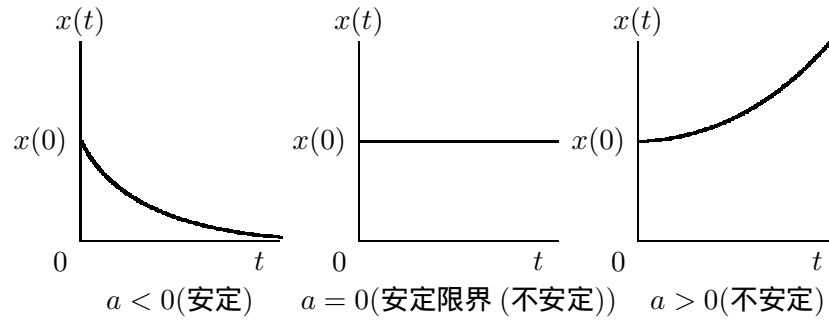


図 1.13: システムの応答と安定性

n 階線形システム

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \quad (1.85)$$

解

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \quad (1.86)$$

\boldsymbol{A} の固有値を $\lambda_1 \sim \lambda_n$ (重複なし) とする.

これらは \boldsymbol{A} の特性方程式

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (1.87)$$

の根である.

\boldsymbol{A} は固有ベクトルからなる変換行列 $\boldsymbol{T}(n \times n)$

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \quad (1.88)$$

によって対角化される.

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda} \quad (1.89)$$

また

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}$$

よって, $e^{\boldsymbol{A}t}$ は

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}t} = \boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1} \quad (1.90)$$

ここで

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

これを (1.83) 式に用いると, $x(t)$ の要素は $e^{\lambda_1 t} \sim e^{\lambda_n t}$ から成っていることがわかる. 例えば

$$x_1(t) = f_{11}e^{\lambda_1 t} + f_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_{1n}e^{\lambda_n t}$$

$f_{11} \sim f_{1n}$ は $x(0)$ によって決まる係数.

すべての $x(0)$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0} \quad (1.92)$$

となるとき, システムは漸近安定という. よって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0, \quad i = 1 \sim n \quad (1.93)$$

が成立しなければならない.

$$\lambda_i = a_i + j b_i, \quad j = \sqrt{-1}$$

なので, (1.93) 式は

$$\operatorname{Re} \lambda_i = a_i < 0, \quad i = 1 \sim n \quad (1.94)$$

を意味する. 次の関係に注意する.

$$e^{(a_i + j b_i)t} = e^{a_i t} e^{j b_i t} = e^{a_i t} (\cos b_i t + j \sin b_i t)$$

重複固有値がある場合も同様.

$A \rightarrow$ Jordan 標準形

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

したがって, (1.92) 式が成立するためには

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k e^{\lambda_i t}}{k!} = 0 \quad (1.95)$$

この条件は, やはり

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

を意味する.

システムが漸近安定であるための必要十分条件は, A のすべての固有値 λ_i の実部 $\operatorname{Re} \lambda_i$ が負となることである.

1.5.2 ラウス・フルビッツの安定判別法

歴史的背景

1868 Maxwell がガバナーの安定性に関する問題を提案.

1875 Routh が Strum の定理 (1829) を用いて, Routh の安定判別法を開発.

1895 Stodola の提案 (同じ問題) に応え, Hurwitz が Hermite の論文 (1856) に基づいてもう一つの解法を与えた.

1914 Lienard と Chipart が Hurwitz の方法を改良.

実係数をもつ n 次代数方程式

$$\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0, \quad \alpha_0 > 0 \quad (1.96)$$

の根 $s_i, i = 1 \sim n$ について

$$\operatorname{Re} s_i < 0, \quad i = 1 \sim n \quad (1.97)$$

が成立するか否かの判別法を以下に示す.

Routh の安定判別法

ただし係数が存在しないところは 0 とおく.

表 1.1: Routh 表

0 行	α_0	α_2	α_4	α_6	\dots
1 行	α_1	α_3	α_5	α_7	\dots
2 行	$b_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3}{\alpha_1}$	$b_2 = \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5}{\alpha_1}$	$b_3 = \frac{\alpha_1\alpha_6 - \alpha_0\alpha_7}{\alpha_1}$	\dots	
3 行	$c_1 = \frac{b_1\alpha_3 - \alpha_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1\alpha_5 - \alpha_1b_3}{b_1}$	\dots		
\vdots					
n 行	ω_1				

定理 1.1 (ラウスの安定判別法)

$$\alpha_0 > 0 \sim \alpha_n > 0 \quad (1.98)$$

かつ

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \dots, \omega_1 > 0 \quad (1.99)$$

\Downarrow

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad i = 1 \sim n \quad (1.100)$$

フルビッツの安定判別法

$$\mathbf{H}(n \times n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \dots \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (1.101)$$

ただし, 存在しない係数は0とおく. また, H の i 次の主座小行列式を H_i とする. すなわち

$$H_1 = \alpha_1, \quad H_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (1.102)$$

このとき次の定理が成り立つ.

定理 1.2 (フルビッツの安定判別法)

$$\alpha_0 > 0 \sim \alpha_n > 0 \quad (1.103)$$

かつ

$$H_1 > 0 \sim H_n > 0 \quad (1.104)$$

↓

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad i = 1 \sim n \quad (1.105)$$

定理 1.3 (リエナード・チパートの安定判別法)

$$\alpha_0 > 0 \sim \alpha_n > 0 \quad (1.106)$$

かつ

$$H_i > 0 \text{ (} i \text{ は奇数) (} n \text{ が偶数の場合)} \quad (1.107)$$

$$H_i > 0 \text{ (} i \text{ は偶数) (} n \text{ が奇数の場合)} \quad (1.108)$$

↓

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad i = 1 \sim n \quad (1.109)$$

第2章 座標変換と可制御性・可観測性

2.1 座標変換とシステムの等価性

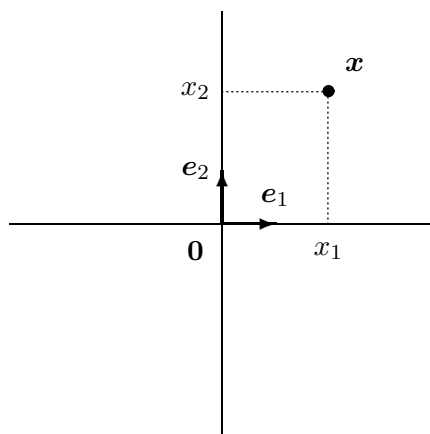


図 2.1: 座標系 1

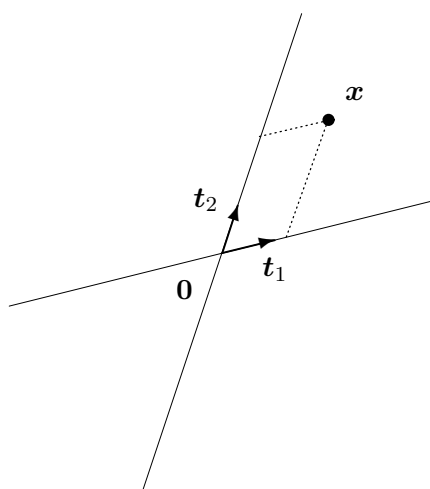


図 2.2: 座標系 2

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \mathbf{x} \quad (2.2)$$

また

$$\mathbf{x} = t_1 z_1 + t_2 z_2 = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{z} \quad (2.3)$$

すべての \mathbf{x} が t_1, t_2 で表現できるためには

$$|\mathbf{T}| \neq 0 \quad (\mathbf{T} \text{は正則行列}) \quad (2.4)$$

すなわち

t_1, t_2 が独立 (一直線上にない)

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z} \quad \mathbf{T}: \text{座標変換行列} \quad (2.5)$$

n 次系への拡張

$\mathbf{x}, \mathbf{z}: n$ 次元ベクトル, $\mathbf{T}: n \times n$ 正則行列

座標変換と状態方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

変換

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{z}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}}(t)$$

(2.6) 式へ代入

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c} \mathbf{T} \mathbf{z}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{b}} u(t) \\ y(t) &= \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{z}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} (\text{相似}) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T} \quad (2.9)$$

システムの基本的性質は座標変換の影響を受けない。

1. システムの固有値 (極)

特性方程式

$$|sI - \tilde{A}| = |T^{-1}(sI - A)T| = |T^{-1}||T||sI - A| = |sI - A| \quad (2.10)$$

2. 伝達関数

$$\begin{aligned} \tilde{c}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{b} &= cT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}b \\ &= cTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}b \\ &= c(sI - A)^{-1}b \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 可制御性・可観測性

R.E.Kalman(1959)

可制御性： 入力 $u(t)$ がすべての状態 x に影響を及ぼしうること。

可観測性： すべての状態の挙動が出力に反映すること。

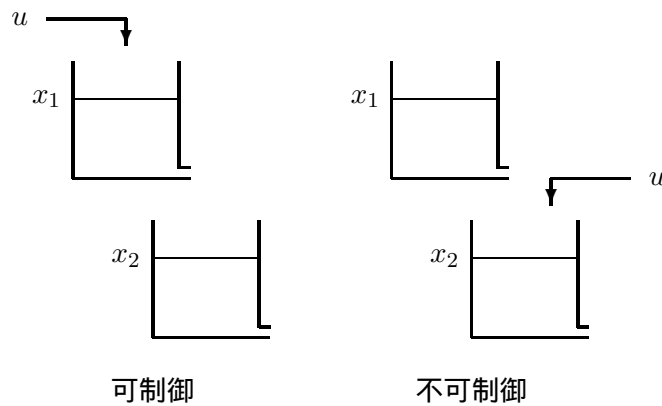


図 2.3: 水槽系

2.2.1 可制御性条件

可制御性の定義 すべての $x(0)$ と x_f に対して、有限な時刻 $t_f > 0$ と入力 $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$ が存在し, $x(t_f) = x_f$ とできること。

可制御性の条件

$$\begin{vmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.12)$$

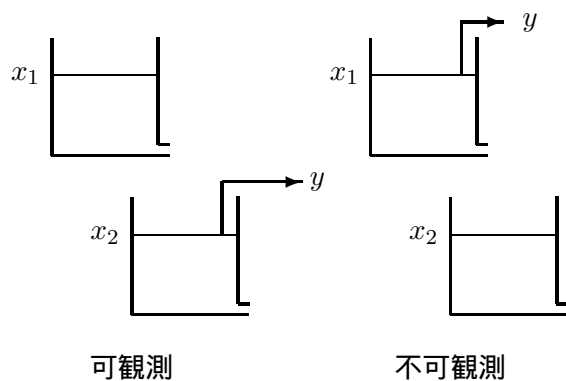


図 2.4: 水槽系

すなわち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = n \quad (2.13)$$

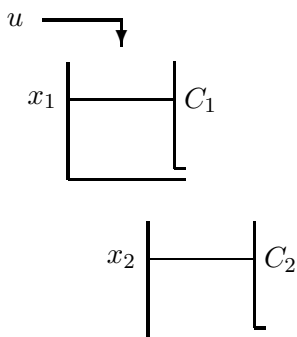


図 2.5: 水槽系

ただし u, x_1, x_2 は基準値からの偏りとする。

$$\left. \begin{aligned} C_1 \dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1} x_1 + u \\ C_2 \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_1} x_1 - \frac{1}{R_2} x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.15)$$

$$U_c = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{11}b_1 \\ 0 & a_{21}b_1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

これから, $\text{rank } U_c = 2$. よって, 可制御.

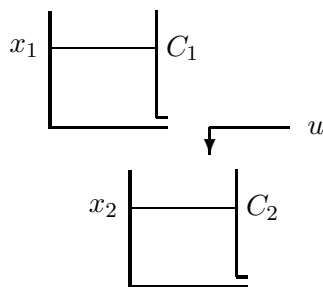


図 2.6: 水槽系

同様に

$$\left. \begin{aligned} C_1 \dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1} x_1 \\ C_2 \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_1} x_1 - \frac{1}{R_2} x_2 + u \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (2.18)$$

$$U_c = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & a_{22}b_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

これから, $\text{rank } U_c = 1$. よって, 不可制御.

2.2.2 可制御性条件の証明

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (2.20)$$

$$\text{システム (2.20) が可制御} \iff \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = n$$

条件 1

条件 2

(必要性) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ から $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ へ制御する $u(t)$ の存在を仮定.

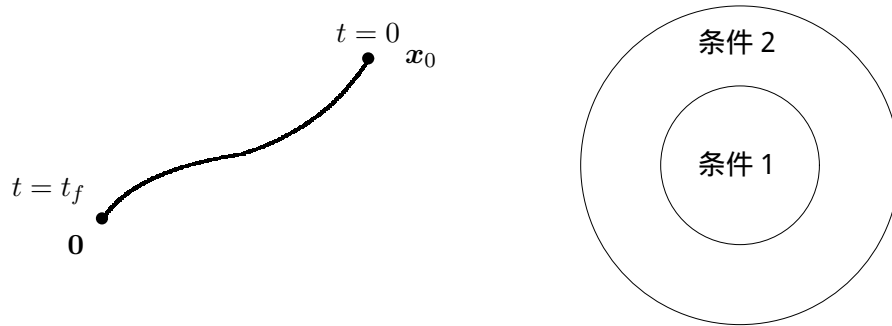


図 2.7: 必要性の証明

(2.20) 式の解

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{0} = e^{At_f} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

両辺に左から e^{-At_f} を掛けると

$$-\mathbf{x}_0 = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

ケーリー-ハミルトンの定理 (p159) より

$$e^{-A\tau} = \mathbf{I}\phi_0(\tau) + \mathbf{A}\phi_1(\tau) + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\phi_{n-1}(\tau)$$

よって

$$\begin{aligned} -\mathbf{x}_0 &= \int_0^{t_f} \{\mathbf{b}\phi_0(\tau) + \mathbf{A}\mathbf{b}\phi_1(\tau) + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\phi_{n-1}(\tau)\} u(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \phi_0(\tau) \\ \phi_1(\tau) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

すべての \mathbf{x}_0 について上式が成立するためには

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = n$$

(十分性)条件2を仮定,このとき

$$\mathbf{W}_t = \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b} \mathbf{b}^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

が正則となる. というのは, もし正則でなければ

$$\mathbf{y}^T \mathbf{W}_t \mathbf{y} = 0$$

となる $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ があり

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{y}^T \mathbf{W}_t \mathbf{y} = \int_0^t \mathbf{y}^T e^{-A\tau} \mathbf{b} \mathbf{b}^T e^{-A^T \tau} \mathbf{y} d\tau \\ &= \int_0^t (\mathbf{y}^T e^{-A\tau} \mathbf{b})^2 d\tau \rightarrow \mathbf{y}^T e^{-A\tau} \mathbf{b} \equiv 0 \end{aligned}$$

$\tau = 0$ において

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} = 0$$

τ で微分して $\tau = 0$ において

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = 0$$

同様の繰り返しにより

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{b} &= 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = 0$$

となり, 条件2が成立しないからである.

いま

$$u(t) = -\mathbf{b}^T e^{-A^T t} \mathbf{W}_{t_f}^{-1} \mathbf{x}_0$$

を用いると ($\mathbf{W}_{t_f}^{-1}$ は存在する)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= e^{A t_f} \mathbf{x}_0 + e^{A t_f} \int_0^{t_f} e^{-A\tau} \mathbf{b} (-\mathbf{b}^T e^{-A^T \tau}) d\tau \mathbf{W}_{t_f}^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= e^{A t_f} \mathbf{x}_0 + e^{A t_f} (-\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

2.2.3 可観測性

可観測性の定義 ある有限な時刻 t_f があり, $0 \leq t \leq t_f$ の $y(t)$ と $u(t)$ から $x(0)$ を逆算できること .

システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

可観測性の条件

$$\text{可観測} \quad \leftrightarrow \quad \text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

可観測でないとは仮定 (十分性)

$$y(t) = cx_1(t) = ce^{At}x_1(0)$$

$$y(t) = cx_2(t) = ce^{At}x_2(0)$$

$$0 = ce^{At}(x_1(0) - x_2(0))$$

||

$$z \neq 0$$

$t = 0$ とおくと

$$cz = 0$$

t で微分して $t = 0$ とおくと

$$cAz = 0$$

同様に

$$\begin{aligned} cA^2z &= 0 \\ &\vdots \\ cA^{n-1}z &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

これは

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} < n$$

を意味する．必要性は逆をたどればよい．

水槽系の例

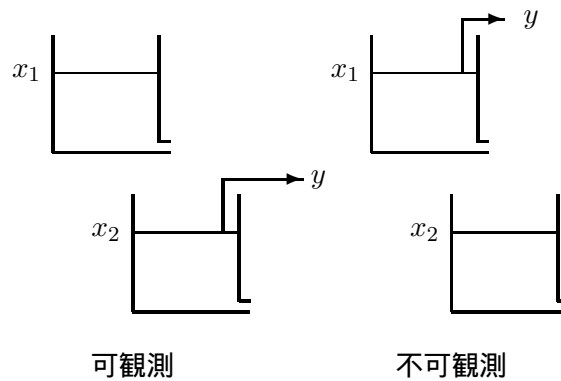


図 2.8: 水槽系

左の水槽系について

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

$$U_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_0 = 2$ で可観測 .

一方, 右の水槽系について

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_o = 1$. 可観測でない .

慣性系

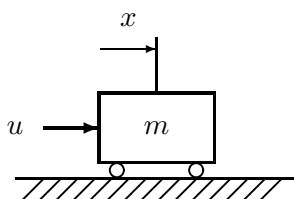


図 2.9: 慣性系

運動方程式

$$m\ddot{x} = u$$

$$y = x$$

状態方程式 ($x_1 = x, x_2 = \dot{x}$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

可観測行列

$$U_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_o = 2$ で可観測 .

一方

$$y = \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

の場合

$$U_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_o = 1$ で不可観測 .

非減衰振動系

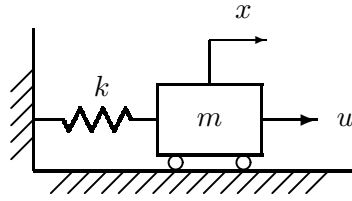


図 2.10: 非減衰振動系

運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = u$$

状態方程式 ($x_1 = x, x_2 = \dot{x}$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

の場合

$$U_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_o = 2$ で可観測 .

$$y = \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

の場合

$$U_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_o = 2$ で可観測 .

減衰振動系

次の場合を考える .

$$m = 1, c = 2, k = 1, \quad y = x + \dot{x}$$

このとき, 状態方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

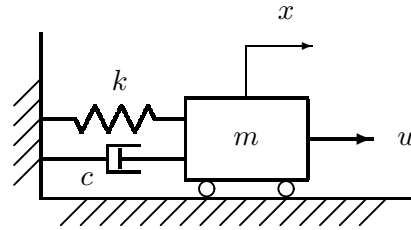


図 2.11: 減衰振動系

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } U_o = 1$ で不可観測.

2.3 対角正準形式と可制御性・可観測性

システム行列 A

固有値 $\lambda_i, i = 1 \sim n$

固有ベクトル $\mathbf{v}_i, i = 1 \sim n$

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$$

座標変換

$$\mathbf{x}(t) = T\mathbf{z}(t), \quad T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

変換後のシステム

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \tilde{A}\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t) \quad (2.22)$$

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{z}(t) \quad (2.23)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = T^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) + \beta_i u(t), \quad i = 1 \sim n \quad (2.24)$$

$$y(t) = \theta_1 z_1(t) + \theta_2 z_2(t) + \cdots + \theta_n z_n(t) \quad (2.25)$$

ブロック線図

$$sZ_1 = \lambda_1 Z_1 + \beta_1 U \quad \text{のみ}$$

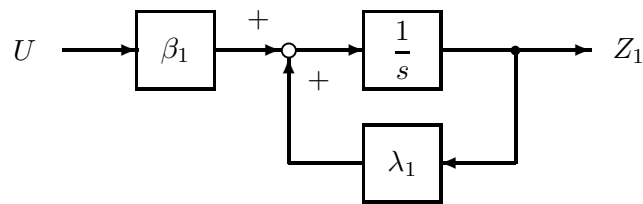


図 2.12: ブロック線図

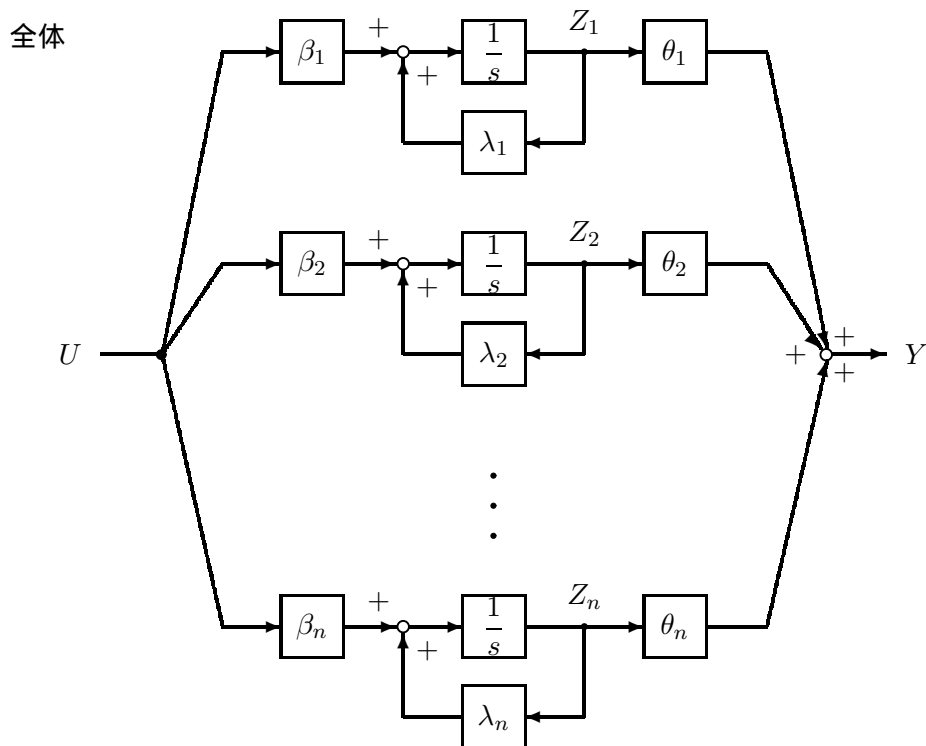


図 2.13: 対角正準系

$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}$: 対角正準形式

$z_i(t)$: モード

(2.24), (2.25) 式から伝達関数を計算すると

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{c}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \\ &= \frac{\theta_1\beta_1}{s - \lambda_1} + \frac{\theta_2\beta_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{\theta_n\beta_n}{s - \lambda_n} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$n = 2$ の場合

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \left[s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\theta_1\beta_1}{s - \lambda_1} + \frac{\theta_2\beta_2}{s - \lambda_2} \end{aligned}$$

対角正準形式による可制御性・可観測性の定義

$\beta_i \neq 0, i = 1 \sim n$ のとき可制御

$\theta_i \neq 0, i = 1 \sim n$ のとき可観測

2.4 伝達関数と極-零点消去

一般にシステムは四つのサブシステムに分割される。

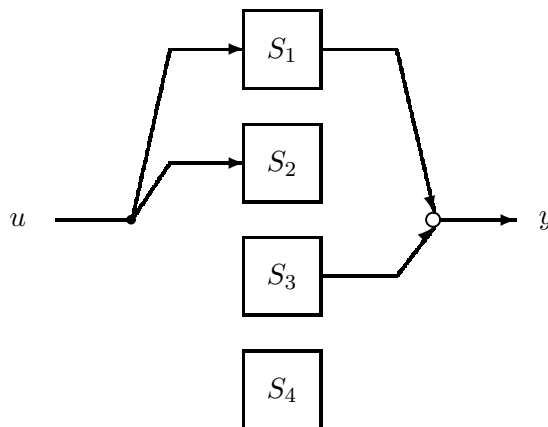


図 2.14: サブシステム

- S_1 : 可制御・可観測
 S_2 : 可制御・不可観測
 S_3 : 不可制御・可観測
 S_4 : 不可制御・不可観測

全システムの伝達関数は

$$G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \sum_{i \in I} \frac{\beta_i \theta_i}{s - \lambda_i}$$

(I は $\beta_i \neq 0, \theta_i \neq 0$ を満たす i の集合)

不可制御，不可観測 \rightarrow 伝達関数の次数減少 (極零消去)

2.5 可制御正準形式，可観測正準形式とその応用

2.5.1 可制御正準形式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{h_3 s^3 + h_2 s + h_1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (2.27)$$

の実現 (状態方程式と出力方程式) を求めよう。まず

$$G_0(s) = \frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (2.28)$$

Y と Y_0 間には

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= h_1 Y_0(s) + h_2 s Y_0(s) + h_3 s^2 Y_0(s) \\
 y(t) &= h_1 y_0(t) + h_2 \dot{y}_0(t) + h_3 \ddot{y}_0(t)
 \end{aligned} \quad (2.29)$$

(2.28) 式から

$$\begin{aligned}
 (s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1) Y_0(s) &= U(s) \\
 \downarrow \quad t \text{ 領域} \\
 y_0^{(3)}(t) + a_3 \ddot{y}_0(t) + a_2 \dot{y}_0(t) + a_1 y_0(t) &= u(t) \\
 y_0^{(3)}(t) &= -a_1 y_0(t) - a_2 \dot{y}_0(t) - a_3 \ddot{y}_0(t) + u(t)
 \end{aligned} \quad (2.30)$$

状態変数

$$z_1 = y_0, \quad z_2 = \dot{y}_0, \quad z_3 = \ddot{y}_0 \quad (2.31)$$

(2.29), (2.30), (2.31) 式から

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -a_1 z_1 - a_2 z_2 - a_3 z_3 + u \\ y &= h_1 z_1 + h_2 z_2 + h_3 z_3\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}} u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{z}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$$

上式の $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ を可制御正準形式という.

ブロック線図

$$\begin{aligned}sZ_1 &= Z_2 \\ sZ_2 &= Z_3 \\ sZ_3 &= -a_1 Z_1 - a_2 Z_2 - a_3 Z_3 + U \\ Y &= h_1 Z_1 + h_2 Z_2 + h_3 Z_3\end{aligned}$$

n 次系に一般化

$$G(s) = \frac{h_n s^{n-1} + \cdots + h_2 s + h_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}$$

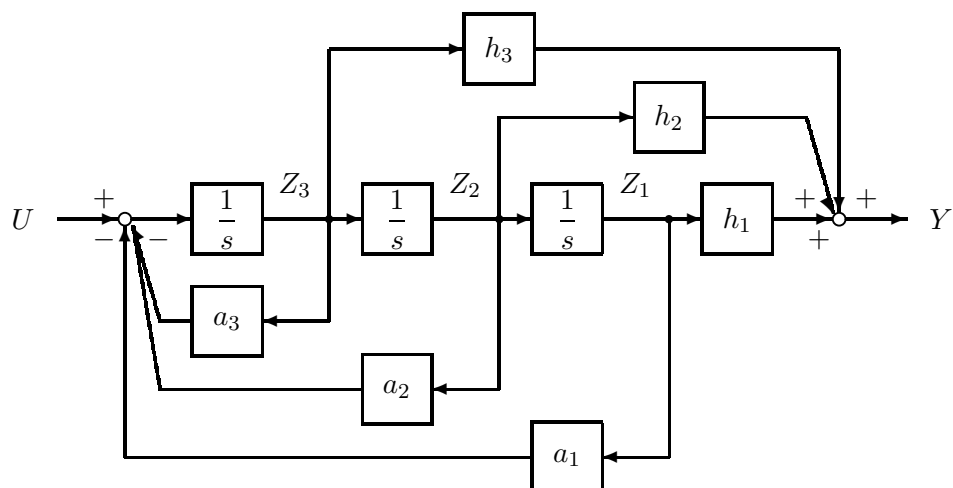


図 2.15: ブロック線図

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = [h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_n]$$

2.5.2 変換行列

伝達関数 \rightarrow 可制御正準形 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}$

$$G(s) = \frac{h_n s^{n-1} + \cdots + h_2 s + h_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = [h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_n]$$

一般の $A, b, c \rightarrow \tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}$ の変換行列 T を求めよう。
 $n = 3$ とする。

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{b} = T^{-1}b, \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}$$

の関係から

$$AT = T\tilde{A}, \quad b = T\tilde{b} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t_3 \quad (2.32)$$

すなわち

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_1 t_3 & t_1 - a_2 t_3 & t_2 - a_3 t_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

列毎に式をつくると

$$At_1 = -a_1 t_3, \quad At_2 = t_1 - a_2 t_3, \quad At_3 = t_2 - a_3 t_3 \quad (2.33)$$

(2.32), (2.33) 式から

$$\begin{aligned} t_3 &= b \\ t_2 &= At_3 + a_3 t_3 = Ab + a_3 b \\ t_1 &= At_2 + a_2 t_3 = A^2 b + a_3 Ab + a_2 b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} A^2 b + a_3 Ab + a_2 b & Ab + a_3 b & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これを n 次系に一般化すれば次式を得る。

$$T = U_c W = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 & \\ \vdots & \cdots & a_n & 1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_n & 1 & & & & 0 \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

2.5.3 可観測正準形式

もう一度 3 次伝達関数の実現問題を考えよう。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{h_3s^2 + h_2s + h_1}{s^3 + a_3s^2 + a_2s + a_1}$$

分子・分母を s^3 で割り，整理すると

$$Y(s) = -a_3s^{-1}Y(s) - a_2s^{-2}Y(s) - a_1s^{-3}Y(s) + h_3s^{-1}U(s) + h_2s^{-2}U(s) + h_1s^{-3}U(s)$$

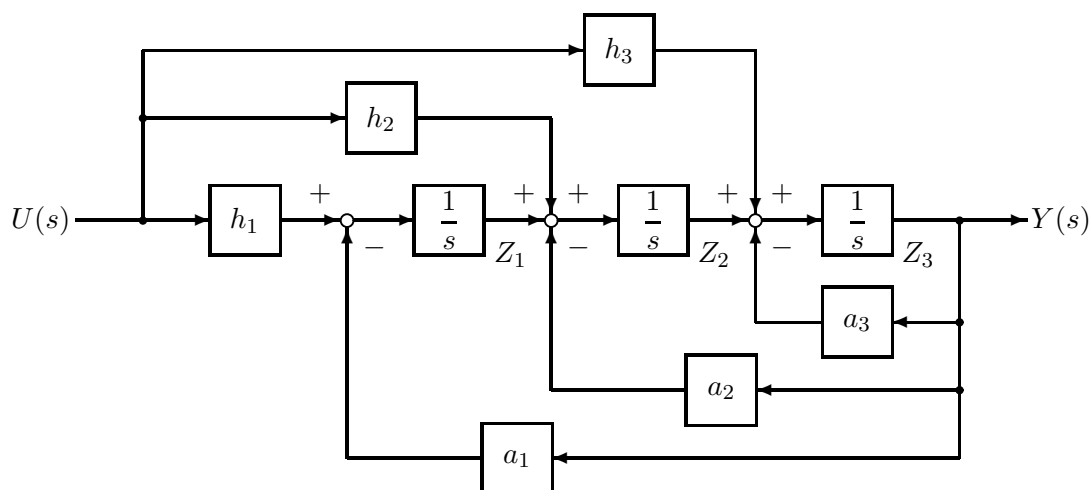


図 2.16: ブロック線図

状態方程式と出力方程式は

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -a_1z_3 + h_1u \\ \dot{z}_2 &= z_1 - a_2z_3 + h_2u \\ \dot{z}_3 &= z_2 - a_3z_3 + h_3u \\ y &= z_3 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

ここで得られたシステム行列は可観測正準形式と呼ばれる。

n 次系へ一般化

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

一般の \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} \rightarrow $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ の変換行列も前と同様な方法で求まる。

伝達関数の実現方法として次のものがある。

1. 対角正準形

$$G(s) = \frac{\theta_1 \beta_1}{s - \lambda_1} + \frac{\theta_2 \beta_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\theta_n \beta_n}{s - \lambda_n}$$

2. 可制御正準形

3. 可観測正準形

第3章 安定化の基礎理論

3.1 状態フィードバック制御と安定化

制御対象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad A(n \times n), \quad b(n \times 1) \quad (3.1)$$

$$y(t) = cx(t), \quad c(1 \times n) \quad (3.2)$$

x : n ベクトル 状態

u : スカラー 操作量

y : スカラー 出力

制御目的 (レギュレータ問題)

「何らかの原因によって生じた初期状態 $x(0) \neq 0$ を速やかに原点 (平衡点) に制御すること。」

x はすべて直接検出可と仮定

3.1.1 状態フィードバックによる極配置

$$\begin{aligned} u &= -f_1x_1 - f_2x_2 - \cdots - f_nx_n \\ &= -fx, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

としたとき閉ループ系は

$$\dot{x} = (A - bf)x \quad (3.4)$$

$u = -fx$ によってシステム行列

$$A \rightarrow A - bf$$

f を指定して $A - bf$ の固有値をどの程度自由に配置できるか？

可制御正準形にて考える。

$$\dot{z} = (\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{f})z$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \dots \quad \epsilon_n]$$

であるので

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -(a_1 + \epsilon_1) & -(a_2 + \epsilon_2) & \dots & \dots & -(a_n + \epsilon_n) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

この特性多項式は

$$|s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{f}})| = s^n + (a_n + \epsilon_n)s^{n-1} + \dots + (a_2 + \epsilon_2)s + (a_1 + \epsilon_1) \quad (3.6)$$

閉ループ系の特性多項式の係数は、 ϵ_i により任意に設定できる。
極を指定された値

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \quad (\text{実軸に対して対称})$$

に配置するフィードバックゲインの要素は

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + d_n s^{n-1} + \dots + d_2 s + d_1 \quad (3.7)$$

とすると

$$\epsilon_i = d_i - a_i, \quad i = 1 \sim n$$

となる。元の座標系との関係は(可制御正準形への変換行列 T)

$$T^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f})T = T^{-1}\mathbf{A}T - T^{-1}\mathbf{b}\mathbf{f}T = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{f}}$$

よって

$$\tilde{f} = fT, \quad f = \tilde{f}T^{-1}$$

すなわち

$$f = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & \cdots & d_n - a_n \end{bmatrix} T^{-1}$$

可制御 \leftrightarrow 「状態フィードバックによって任意極配置可能」

3.1.2 最適レギュレータ

状態フィードバックによる極配置

- 固有値の配置方法は？
- 速応性改善のため、固有値をいくらでも負の大きな値にすればよいのか？
- 多入力系では、固有値を指定するだけではフィードバックゲインが一意的に決定されないが、どのように選べばもっとも制御性能がよくなるのか？

このような問題に対して、評価のための指標を与え、その指標にしたがってもっとも適した制御則を見出す設計法が最適レギュレータ法である。

1 入力系を考える。

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad A(n \times n), \quad b(n \times n) \quad (3.8)$$

評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{x(t)^T Q x(t) + u(t)^2\} dt \rightarrow \text{最小}$$

$$Q \geq 0 \quad \text{半正定行列}$$

ただし、 $Q = Q_0^T Q_0$ と分解したとき、 (Q_0, A) は可観測。

1960年 R.E.Kalman 定式化、解法

最適制御入力 $u^*(t)$

$$u^*(t) = -f^* x(t)$$

$$f^* = b^T P$$

ここで $P(n \times n)$ はリカッチ方程式

$$A^T P + PA + Q - P b b^T P = 0$$

の正定解である。 J の最小値は

$$\min J = x(0)^T P x(0)$$

DP (ダイナミックプログラミング) による説明

状態 $x(t)$ に対する最適制御 u^* が存在し, そのときの評価値が

$$J^* = x(t)^T P x(t)$$

で表されると仮定する. u^* に微小な変動

$$u(\tau) = \begin{cases} \hat{u} & t \leq \tau < t + \Delta t \\ u^*(\tau) & \tau \geq t + \Delta t \end{cases}$$

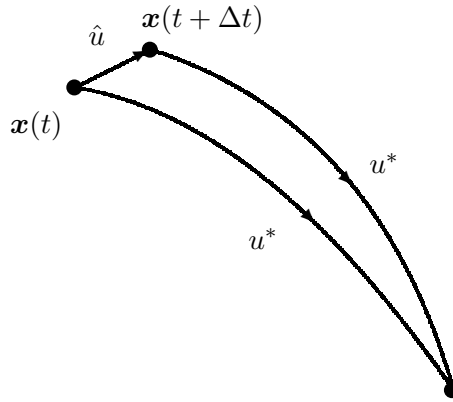


図 3.1: 最適制御の微小変動

を考え, この制御による評価が最小となるように \hat{u} を決定する. $u(\tau)$ に対する評価値は

$$J(\hat{u}) = \{x(t)^T Q x(t) + \hat{u}^2\} \Delta t + x(t + \Delta t)^T P x(t + \Delta t)$$

この式に次の関係を代入する.

$$x(t + \Delta t) \simeq x(t) + \Delta x(t) = x(t) + \{A x(t) + b \hat{u}\} \Delta t$$

そして Δt^2 を無視すると

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \{x^T(t) Q x(t) + \hat{u}^2\} \Delta t + x(t)^T P x(t) \\ &\quad + x(t)^T (A^T P + P A) x(t) \Delta t + 2 \hat{u} b^T P x(t) \Delta t \end{aligned} \quad (3.9)$$

$J(\hat{u})$ を最小にする \hat{u} は次の条件から得られる.

$$\frac{\partial J(\hat{u})}{\partial \hat{u}} = 0$$

すなわち

$$2 \hat{u} + 2 b^T P x(t) = 0$$

$$\hat{u} = u^*(t) = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (3.10)$$

上式を (3.9) 式へ代入して

$$\begin{aligned} J(u^*) &= \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}(t)^T (\mathbf{Q} + \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) \Delta t + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \mathbf{x}(t)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) \Delta t - 2 \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \Delta t \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\mathbf{x}(t)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) = 0$$

したがって

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = 0 \quad (3.11)$$

を得る．すなわち，最適制御は (3.10) 式で与えられ， \mathbf{P} は (3.11) 式を満足しなければならない．そして

$$J^* = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) > 0$$

なので， \mathbf{P} は正定行列でなければならない．

例題 3.1

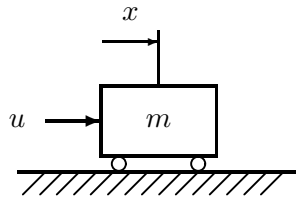


図 3.2: 慣性系

$$m = 1, \quad x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

に対する最適レギュレータを設計せよ．

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T P + PA + Q - Pbb^T P = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{12}^2 & p_{11} - p_{12}p_{22} \\ * & 2p_{12} - p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 - p_{12}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_{12} = 1 \quad (\mathbf{P} \text{の正定条件から})$$

$$2p_{12} - p_{22}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_{22} = \sqrt{2} \quad (p_{22} > 2 \text{ から})$$

$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad p_{11} = \sqrt{2}$$

よって

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$u^* = -\mathbf{f}^* \mathbf{x}(t)$$

3.2 オブザーバによる安定化

状態フィードバック $u = -\mathbf{f}x$

↓

任意極配置可能，最適制御

実際には， $y (= \mathbf{c}x)$ から x を推定して用いる．
 x の推定機構をオブザーバという．

3.2.1 オブザーバを用いない状態推定法

1. 出力 $y(t)$ と入力 $u(t)$ の微分値を用いる方法
 $n = 3$ の可観測正準系を考えよう .

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= -a_1 z_3 + h_1 u \\ \dot{z}_2 &= z_1 - a_2 z_3 + h_2 u \\ \dot{z}_3 &= z_2 - a_3 z_3 + h_3 u \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$y = z_3 \quad (3.13)$$

(3.12) , (3.13) 式から , 残りの状態は

$$\begin{aligned} z_2 &= \dot{y} + a_3 y - h_3 u \\ z_1 &= \ddot{y} + a_3 \dot{y} - h_3 \dot{u} + a_2 y - h_2 u \end{aligned}$$

微分操作は実際上不可能

2. $y(t)$ の有限時間の観測から推定する方法
 $u(t) = 0$ とする .

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(0) \quad (3.14)$$

(3.14) 式の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{x}(0)$$

出力は

$$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{x}(0) \quad (3.15)$$

(3.15) 式に左から $e^{\boldsymbol{A}^T t} \boldsymbol{c}^T$ を掛けて , $0 \sim t_1$ で積分すると

$$\int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T t} \boldsymbol{c}^T y(t) dt = \left(\int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T t} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{c} e^{\boldsymbol{A}t} dt \right) \boldsymbol{x}(0) \quad (3.16)$$

ここで

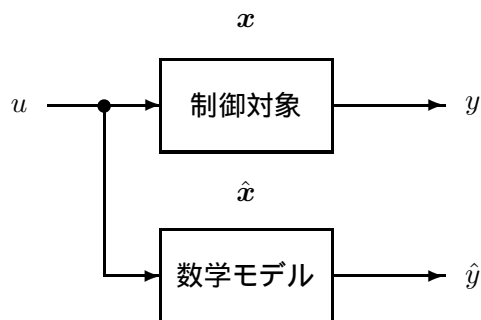
$$\boldsymbol{D}(t_1) := \int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T t} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{c} e^{\boldsymbol{A}t} dt$$

(\boldsymbol{c} , \boldsymbol{A}) が可観測ならば $\boldsymbol{D}(t_1)$, $t_1 > 0$ は正則である . よって , $\boldsymbol{D}(t_1)^{-1}$ を (3.16) 式の左から掛けると

$$\boldsymbol{D}(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}^T t} \boldsymbol{c}^T y(t) dt = \boldsymbol{x}(0)$$

- 有限時間後でないとは状態が推定できない .
- 積分計算を要する .

3. 制御対象の数学モデルを用いる方法



$$\text{制御対象} \quad \dot{x} = Ax + bu \quad (3.17)$$

$$\text{モデル} \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu \quad (3.18)$$

$$\text{誤差ベクトル} \quad e = \hat{x} - x$$

(3.17), (3.18) 式から

$$\dot{e} = A(\hat{x} - x) = Ae$$

したがって

$$e(t) = e^{At}e(0)$$

これより

$$\hat{x}(t) = x(t) + e^{At}(\hat{x}(0) - x(0))$$

$x(0)$ が既知のとき, $\hat{x}(0) = x(0)$ とおけば

$$\hat{x}(t) = x(t)$$

実際には, $x(0)$ は未知なので推定誤差

$$e^{At}(\hat{x}(0) - x(0))$$

が残る.

3.2.2 同次元オブザーバ

制御対象

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3.19)$$

$$y = cx \quad (3.20)$$

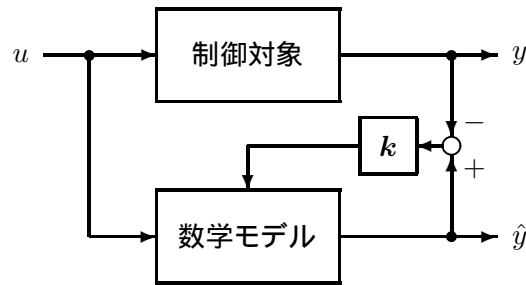


図 3.3: 同一次元オブザーバ

(3.19) , (3.20) 式に対する数学モデル

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu \\ \hat{y} &= c\hat{x}\end{aligned}$$

修正を加えたモデル

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu + k(y - \hat{y}) \\ &= A\hat{x} + bu + kc(x - \hat{x}) \\ &= (A - kc)\hat{x} + bu + ky\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\text{誤差ベクトル } e = \hat{x} - x$$

(3.19) , (3.21) 式から

$$\dot{e} = (A - kc)e$$

$A - kc$ の固有値は , (c, A) が可観測ならば k を選んで任意に配置可 .

$A - kc$ の固有値はその転置行列

$$(A - kc)^T = A^T - c^T k^T$$

の固有値に等しい . したがって

$$\tilde{A} = A^T, \quad \tilde{b} = c^T, \quad \tilde{f} = k^T$$

とおけば , $A - kc$ の固有値は $\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{f}$ の固有値に等しく , (\tilde{A}, \tilde{b}) が可制御ならば任意極配置可能 .

$$(\tilde{A}, \tilde{b}) \text{ の可制御性} = (c, A) \text{ の可観測性}$$

例題 3.2

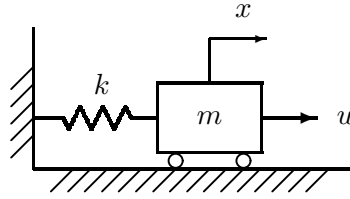


図 3.4: 非減衰振動系

$$y = x, \quad m = 1, \quad k = 1$$

この系に対するオブザーバを設計せよ。ただし，オブザーバ極は $(-4, -4)$ とする（解）運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = u$$

$$\ddot{x} + x = u$$

$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ とすると状態方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

オブザーバ

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{k}y$$

\mathbf{k} を $(\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c})$ の固有値が $(-4, -4)$ となるように設計する。

$$\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c})| = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ 1 + k_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + k_1s + 1 + k_2$$

一方，指定極の特性多項式は

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

係数の比較により

$$k_1 = 8, \quad k_2 = 15$$

3.2.3 最小次元オブザーバ

一般に，多入力多出力系を考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u : m \text{ 次元 } A(n \times n) \quad B(n \times m)$$

$$y = Cx, \quad y : r \text{ 次元ベクトル } C(r \times n)$$

$x \in R^n$ のうち $y \in R^r$ はすでに利用できるので，残り $n-r$ 次元のベクトルを推定すれば十分である．以下では，G.Gopinath(1971)の方法に従って説明しよう．

$\text{rank } C = r$ とする．このとき

$$T = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (n \times n)$$

が正則となるような $D((n-r) \times n)$ 行列を与えることができる．いま

$$\tilde{x}(t) = T x(t) \tag{3.22}$$

なる変換を行うと

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T A T^{-1} \tilde{x}(t) + T B u(t) \tag{3.23}$$

$$y(t) = C T^{-1} \tilde{x}(t) \tag{3.24}$$

このとき

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = C$$

なので

$$C T^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$$

がわかる．すなわち

$$y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_r(t) \end{bmatrix}$$

である．よって，状態 \tilde{x} は次のように分割できる．

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad z : n-r \text{ 次元ベクトル}$$

また

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}(r \times r), A_{12}(r \times (n-r)), A_{21}((n-r) \times r), A_{22}((n-r) \times (n-r))$$

$$B_1(r \times m), B_2((n-r) \times m)$$

と表す．このとき (3.23) 式は

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A_{11}\mathbf{y}(t) + A_{12}\mathbf{z}(t) + B_1\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A_{21}\mathbf{y}(t) + A_{22}\mathbf{z}(t) + B_2\mathbf{u}(t)$$

これらをかき換えて

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A_{22}\mathbf{z}(t) + B_2\mathbf{u}(t) + A_{21}\mathbf{y}(t) \quad (3.25)$$

$$A_{12}\mathbf{z}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) - A_{11}\mathbf{y}(t) - B_1\mathbf{u}(t) \quad (3.26)$$

を得る．(3.25) 式を $\mathbf{z}(t)$ に関する状態方程式，(3.26) 式を出力方程式とみなせば， $\mathbf{z}(t)$ に関する同次元オブザーバ ($n-r$ 次元) が構成できる．このとき， (C, A) が可観測ならば (A_{12}, A_{22}) は可観測となる．

$\mathbf{x}(t)$ に対する同次元オブザーバの場合と同様に，数学モデル

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = A_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + B_2\mathbf{u}(t) + A_{21}\mathbf{y}(t)$$

に対して，出力 $A_{12}\mathbf{z}(t)$ とその推定値 $A_{12}\hat{\mathbf{z}}(t)$ との差にゲイン $G((n-r) \times r)$ を掛けたものを修正項として加えると

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) &= A_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + B_2\mathbf{u}(t) + A_{21}\mathbf{y}(t) + G(A_{12}\mathbf{z}(t) - A_{12}\hat{\mathbf{z}}(t)) \\ &= A_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + B_2\mathbf{u}(t) + A_{21}\mathbf{y}(t) + GA_{12}(z(t) - \hat{z}(t)) \\ &= (A_{22} - GA_{12})\hat{\mathbf{z}}(t) + B_2\mathbf{u}(t) + A_{21}\mathbf{y}(t) \\ &\quad + G(\dot{\mathbf{y}}(t) - A_{11}\mathbf{y}(t) - B_1\mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

誤差ベクトル $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)$ に関する微分方程式を計算してみると (3.25)，(3.27) 式から

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= A_{22}\mathbf{e}(t) - GA_{12}\mathbf{e}(t) \\ &= (A_{22} - GA_{12})\mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

となり， (A_{12}, A_{22}) が可観測なので， G を選んで $(A_{22} - GA_{12})$ の固有値を任意に配置できる．

($A_{22} - GA_{12}$) を安定に選んだとき, $\hat{z}(t)$ は $z(t)$ の推定値となることがわかった. しかし, (3.27) 式の右辺は $\dot{y}(t)$ を含んでいるので, このままでは使いにくい. $\dot{y}(t)$ の計算を不要とするために, $z(t)$ を直接推定するのではなく

$$w = z - Gy(t) \quad (3.28)$$

なるベクトルを推定すればよい. (3.27) 式から

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{\hat{z}}(t) - G\dot{y}(t) \\ &= (A_{22} - GA_{12})\hat{z}(t) + B_2u(t) + A_{21}y(t) - GA_{11}y(t) - GB_1u(t) \\ &= (A_{22} - GA_{12})(\hat{z}(t) - Gy(t)) + (A_{22} - GA_{12})Gy(t) \\ &\quad + B_2u(t) + A_{21}y(t) - GA_{11}y(t) - GB_1u(t) \\ &= (A_{22} - GA_{12})\hat{w}(t) + (B_2 - GB_1)u(t) \\ &\quad + \{(A_{22} - GA_{12})G + A_{21} - GA_{11}\}y(t) \end{aligned}$$

$w(t)$ の推定が得られたならば, (3.28) 式から

$$z(t) = w(t) + Gy(t)$$

(3.22) 式から

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) + Gy(t) \end{bmatrix}$$

さらに

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$x(t) = H_1y(t) + H_2(w(t) + Gy(t)) = (H_1 + H_2G)y(t) + H_2w(t)$$

よって, $x(t)$ の推定値は

$$\hat{x}(t) = (H_1 + H_2G)y(t) + H_2\hat{w}(t)$$

で与えられる.

関連図書

- [1] 高橋安人: コンピュータによるダイナミックシステム論, 科学技術社, 1970.
- [2] H.Kwakernaak and R.Sivan: Linear optimal control systems, Wiley-Interscience, 1972.
- [3] 中野道雄, 美多 勉: 制御基礎理論-古典から現代まで-, 昭晃堂, 1982.
- [4] 吉川恒夫, 井村順一: 現代制御論, 昭晃堂, 1994.
- [5] W.M.Wonham: Linear multivariable control: a geometric approach, Springer-Verlag, 1979.
- [6] F.R.Gantmacher: The theory of matrices Vol.2, Chelsea Publishing Company, 1959.

現代制御理論ノート

2000年3月1日 第1版

©吉田和信
