

制御工学II講義ノート

2020年度後期（制御工学II）

島根大学総合理工学部
機械・電気電子工学科

吉田 和信

Copyright ©2020 Kazunobu Yoshida. All rights reserved.

目次

第 1 章	状態方程式	1
1.1	状態と状態方程式	1
1.2	演習問題	5
1.3	演習問題の解	5
第 2 章	状態方程式と伝達関数	7
2.1	状態方程式から伝達関数（行列）を求める方法	7
2.2	伝達関数から状態方程式を求める方法	8
2.3	演習問題	10
2.4	演習問題の解	11
第 3 章	状態方程式の解と状態遷移行列	13
3.1	s 領域解	13
3.2	t 領域解	13
3.3	演習問題	18
3.4	演習問題の解	18
第 4 章	座標変換, 安定性条件	19
4.1	座標変換と系の等価性	19
4.2	安定性条件	20
4.3	演習問題	23
4.4	演習問題の解	23
第 5 章	可制御性	25
5.1	定義と判定法	25
5.2	演習問題	28
5.3	演習問題の解	29
第 6 章	可観測性	31
6.1	定義と判定法	31
6.2	演習問題	34
6.3	演習問題の解	35
第 7 章	対角正準形	37
7.1	対角正準形	37
7.2	カルマンの正準分解	40
7.3	カルマンの正準分解の具体例	41

7.4	演習問題	43
7.5	演習問題の解	43
第 8 章	可制御正準形と可観測正準形	45
8.1	可制御正準形	45
8.2	可観測正準形	48
8.3	セミプロパーな伝達関数の実現	50
8.4	演習問題	50
8.5	演習問題の解	51
第 9 章	極配置法による状態フィードバック制御	53
9.1	極配置法	53
9.2	演習問題	56
9.3	演習問題の解	57
第 10 章	最適レギュレータ	59
10.1	最適レギュレータ	59
10.2	演習問題	62
10.3	演習問題の解	63
第 11 章	オブザーバ	65
11.1	オブザーバを用いない状態推定法	65
11.2	同次元オブザーバ	66
11.3	演習問題	68
11.4	演習問題の解答	69
第 12 章	設計例：構造系の能動制振制御	71
12.1	制御対象の数学モデルと問題の記述	71
12.2	設計法	72
12.2.1	極配置法による制御則	73
12.2.2	最適レギュレータによる制御則	73
12.2.3	AMD の振幅を小さくする制振制御則	73
12.3	数値結果	74
第 13 章	設計例：ボールビーム系の位置決め制御	79
13.1	制御対象の数学モデルと問題の記述	79
13.2	設計法	80
13.3	数値結果	81
13.3.1	極配置法	81
13.3.2	最適レギュレータ法	82

第 14 章 設計例：クレーン系の搬送制御	85
14.1 制御対象の数学モデルと問題の記述	85
14.2 設計法	86
14.2.1 制御則の計算アルゴリズム	88
14.2.2 IMC 制御系の構成法	89
14.3 数値結果	90

第1章 状態方程式

制御工学 II では、1960 年代に構築された現代制御理論 (modern control theory) を扱う。これは、多入出力系 (multivariable system) の内部変数 (状態 (state)) の挙動を表す状態方程式 (state equation) を系の数学モデルとするより精密な制御理論である。

1.1 状態と状態方程式

状態とは、系の挙動を表すために必要かつ十分な内部変数である。よって、状態の数は系の次数と等しい。状態方程式は状態の運動を表す連立 1 階微分方程式である (出力に関する方程式も含む)。状態方程式の表現は次のとおりである。

状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{状態方程式}) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{出力方程式 (output equation)}) \quad (1.2)$$

ただし

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$A(n \times n), \quad B(n \times r), \quad C(m \times n), \quad D(m \times r)$$

例題 1.1 図 1.1 の 1 自由度減衰系の状態方程式を求めよ。

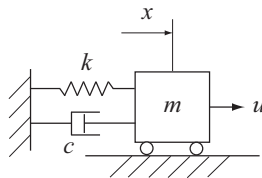


図 1.1: 1 自由度減衰系

運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u$$

から

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}u$$

ここで、入力を u 、状態と出力を $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$ 、 $y = x$ と定義すると

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{cases}, \quad y = x_1$$

さらに

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

とおくと、次の状態方程式を得る.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

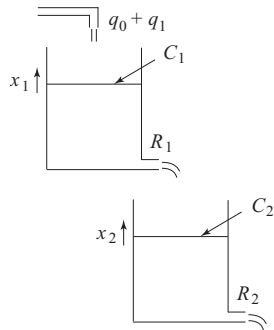


図 1.2: 直列結合された水槽系

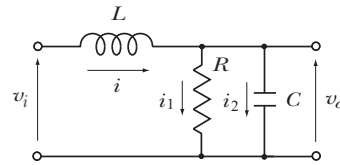


図 1.3: LRC 回路系

例題 1.2 図 1.2 の直列結合された水槽系の状態方程式を求めよ。ただし、 q_1 は基準流入量 q_0 からの偏差、 x_1, x_2 は平衡水位からの偏差、 C_1, C_2 は水槽の断面積、 R_1, R_2 は流出抵抗である。入力を q_1 、出力を x_2 とする。

[解] 流量バランスの式を立てると

$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1}x_1 + q_1 \\ C_2 \dot{x}_2 = \frac{1}{R_1}x_1 - \frac{1}{R_2}x_2 \end{cases}$$

状態と出力を

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = x_2$$

とすると、次の状態方程式を得る.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_1, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

例題 1.3 図 1.3 の回路系の状態方程式を求めよ. 入力を v_i , 出力を v_o とする.

[解] 回路図から次の関係を得る.

$$v_i = L\dot{i} + v_o, \quad v_o = \frac{1}{C} \int i_2 dt = Ri_1, \quad i = i_1 + i_2$$

これらから

$$\begin{cases} L\dot{i} = -v_o + v_i \\ i = \frac{1}{R}v_o + C\dot{v}_o \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{i} = -\frac{1}{L}v_o + \frac{1}{L}v_i \\ \dot{v}_o = \frac{1}{C}i - \frac{1}{CR}v_o \end{cases}$$

状態と出力を

$$x = \begin{bmatrix} i \\ v_o \end{bmatrix}, \quad y = v_o$$

とすると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

例題 1.4 図 1.4 に示す平面内を回転する振り子系の状態方程式を求めよ. 入力を u , 出力を θ とする.

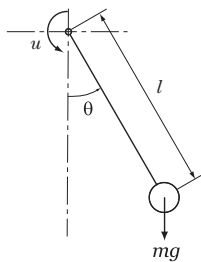


図 1.4: 振り子系

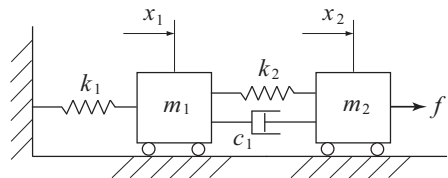


図 1.5: 2 自由度系

[解] モーメントのつりあい式を立てると

$$u(t) - J\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

となる. ただし, J は支点まわりの振り子の慣性モーメント, u は振り子に加わるトルクである. 棒の質量を無視した場合

$$J = ml^2$$

であり、運動方程式は次式となる。

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = u$$

ここで、 θ を微小量と仮定して、 $\sin \theta \simeq \theta$ と近似すれば、次の線形近似モデルを得る。

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = u, \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta + \frac{1}{ml^2}u$$

状態を

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

と定義すると、状態方程式として次を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

例題 1.5 図 1.5 の 2 自由度系の状態方程式を求めよ。ただし、 m_1, m_2 は質量、 c_1 は粘性減衰係数、 k_1, k_2 はばね定数、 f は外力、 x_1, x_2 は変位である。入力を f 、出力を x_1, x_2 とする。

[解] m_1 と m_2 について力のつりあい式を立てると

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ f - m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} \{ -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 - c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 \} \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} \{ k_2x_1 - k_2x_2 + c_1\dot{x}_1 - c_1\dot{x}_2 + f \} \end{cases}$$

状態と出力を

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と定義すると状態方程式として次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{c_1}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

1.2 演習問題

1. 図 1.6 の RLC 回路系の状態方程式を求めよ. 入力を v_i , 出力を v_o , 状態を次式とする.

$$x = \begin{bmatrix} v_o \\ \dot{v}_o \end{bmatrix}$$

2. 図 1.7 の 2 自由度系において, 入力を f , 出力を x_1, x_2 , 状態を次式とした場合の状態方程式を求めよ.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

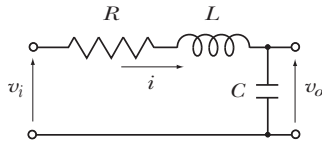


図 1.6: RLC 回路系

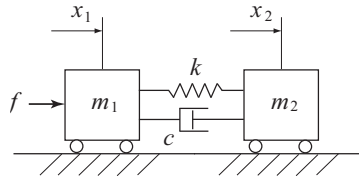


図 1.7: 2 自由度系

1.3 演習問題の解

1. RLC 回路系について, 電圧の平衡式を求めると

$$Ri(t) + L\dot{i}(t) + v_o(t) = v_i(t) \quad (1.3)$$

また

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

すなわち

$$i(t) = C\dot{v}_o(t)$$

という関係があり, これを式 (1.3) に代入して

$$LC\ddot{v}_o(t) + RC\dot{v}_o(t) + v_o(t) = v_i(t) \quad (1.4)$$

を得る. (1.4) 式から次式を得る.

$$\ddot{v}_o = -\frac{1}{LC}v_o - \frac{R}{L}\dot{v}_o + \frac{1}{LC}v_i$$

状態, 入力, 出力をそれぞれ

$$x_1 = v_o, \quad x_2 = \dot{v}_o, \quad u = v_i, \quad y = v_o$$

と定義すれば, 次の状態方程式を得る.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

2. m_1 と m_2 について力のつりあい式を立てると

$$\begin{cases} f - m_1 \ddot{x}_1 - k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ -m_2 \ddot{x}_2 - k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}(-kx_1 + kx_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 + f) \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}(kx_1 - kx_2 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2) \end{cases}$$

状態と出力を

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と定義すると状態方程式として次式を得る.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

第2章 状態方程式と伝達関数

状態方程式から伝達関数（行列）(transfer function (matrix)), 逆に, 伝達関数から状態方程式の一表現を求める方法を説明する.

2.1 状態方程式から伝達関数（行列）を求める方法

次の状態方程式を考える.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

上式をラプラス変換すると

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$x(0) = 0$ とおき, さらに, $X(s)$ を消去すると

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

を得る.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

を伝達関数（行列）という. また,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

を使えば

$$G(s) = \frac{C \text{adj}(sI - A) B}{|sI - A|} + D$$

と表される. 1 入力 1 出力系の場合, $G(s)$ はスカラーであり, 次式と書ける.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

例題 2.1 図 1.1 の 1 自由度減衰系

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

の伝達関数を求めよ.

[解]

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{c}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

例題 2.2 図 1.5 の 2 自由度系 ($y = x_1$ とする)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{c_1}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

の伝達関数を求めよ.

[解]

$$G(s) = \frac{\{\text{adj}(sI - A)\}_{1,4}}{|sI - A|_{m_2}}$$

$$\{\text{adj}(sI - A)\}_{1,4} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ s & 0 & -1 \\ -\frac{k_2}{m_1} & s + \frac{c_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{m_1}(c_1s + k_2)$$

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \frac{1}{m_1m_2} \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ k_1+k_2 & -k_2 & m_1s+c_1 & -c_1 \\ -k_2 & k_2 & -c_1 & m_2s+c_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1m_2} \left\{ s \begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ -k_2 & m_1s+c_1 & -c_1 \\ k_2 & -c_1 & m_2s+c_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & s & -1 \\ k_1+k_2 & -k_2 & -c_1 \\ -k_2 & k_2 & m_2s+c_1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{m_1m_2} (s [s \{(m_1s+c_1)(m_2s+c_1) - c_1^2\} - \{k_2c_1 - k_2(m_1s+c_1)\}] \\ &\quad - s \{c_1k_2 - (k_1+k_2)(m_2s+c_1)\} + \{(k_1+k_2)k_2 - k_2^2\}) \\ &= \frac{1}{m_1m_2} \{m_1m_2s^4 + c_1(m_1+m_2)s^3 + (k_2m_1 + k_1m_2 + k_2m_2)s^2 + c_1k_1s + k_1k_2\} \end{aligned}$$

2.2 伝達関数から状態方程式を求める方法

次の伝達関数の一状態方程式表現を求める.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

これを次のように変形する.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$$

$$(1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2})Y(s) = (b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2})U(s)$$

$$Y(s) = -a_1s^{-1}Y(s) - a_0s^{-2}Y(s) + b_2U(s) + b_1s^{-1}U(s) + b_0s^{-2}U(s)$$

上式から図 2.1 のブロック線図を得る.

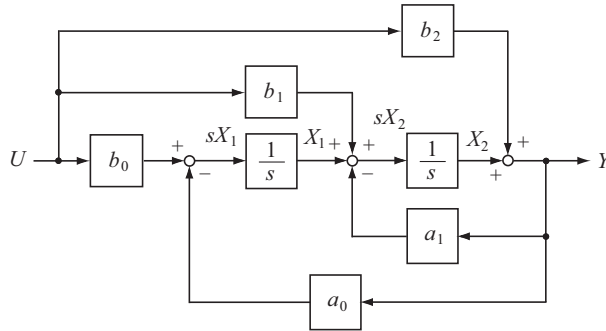


図 2.1: ブロック線図

図 2.1 に示すように状態 X_1, X_2 を定義すれば, 同図から次式を得る.

$$\begin{cases} sX_1 = -a_0(X_2 + b_2U) + b_0U \\ sX_2 = -a_1(X_2 + b_2U) + X_1 + b_1U \end{cases}$$

$$Y = X_2 + b_2U$$

上式を時間領域で表すと

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0(x_2 + b_2u) + b_0u \\ \dot{x}_2 = -a_1(x_2 + b_2u) + x_1 + b_1u \end{cases}$$

$$y = x_2 + b_2u$$

さらに, ベクトル・行列表示すると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_2 \\ b_1 - a_1b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_2u$$

同様に, 3 次の伝達関数

$$G(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

に対する状態方程式は次式となる.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_3 \\ b_1 - a_1b_3 \\ b_2 - a_2b_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_3 u$$

一般に, n 次の伝達関数

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

に対する状態方程式は次式となる.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_n u$$

2.3 演習問題

1. 直列結合された2水槽系の状態方程式から伝達関数を求めよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_1, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

2. 次の行列を持つ系の伝達関数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

3. 次の微分方程式で表される系(質量-ダンパー-ばね系)の状態方程式を求めよ.

$$m\ddot{y}(t) = \frac{m}{k}\ddot{u}(t) + \frac{m}{c}\dot{u}(t) + u(t)$$

4. 図2.2の回路系の状態方程式を求めよ. 入力を v_i , 出力を v_o とする.

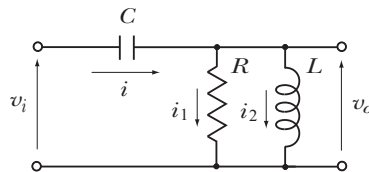


図 2.2: CRL 回路系

2.4 演習問題の解

1.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{C_1 C_2 R_1}$$

ただし

$$\Delta = |sI - A| = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & s + \frac{1}{C_2 R_2} \end{vmatrix} = \left(s + \frac{1}{C_1 R_1}\right) \left(s + \frac{1}{C_2 R_2}\right)$$

よって

$$G(s) = \frac{C_1 C_2 R_1 R_2}{(C_1 R_1 s + 1)(C_2 R_2 s + 1)} \frac{1}{C_1 C_2 R_1} = \frac{R_2}{(C_1 R_1 s + 1)(C_2 R_2 s + 1)}$$

2.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 & s+2 & -1 \\ 1 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\text{adj}(sI - A)\}_{3,3} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{vmatrix} = s(s+2) + 2 = s^2 + 2s + 2$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 & s+2 & -1 \\ 1 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = s(s+2)(s+1) - (-1-2(s+1)) = s^3 + 3s^2 + 4s + 3$$

よって

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 3}$$

3. まず、伝達関数を求める.

$$ms^2 Y = \left(\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{c}s + 1\right) U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{c}s + 1}{ms^2} = \frac{1}{k}s^2 + \frac{1}{c}s + \frac{1}{m}$$

これから、次の状態方程式を得る.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{1}{c} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{k} u$$

4. 回路図から次式を得る.

$$v_i = \frac{1}{C} \int i dt + v_o \quad (2.1)$$

$$v_o = Ri_1 = Li_2$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = \frac{\dot{v}_o}{R} + \frac{v_o}{L} \quad (2.2)$$

(2.1) 式を t で 2 回微分し, (2.2) 式を用いると

$$\ddot{v}_i = \frac{1}{C} \dot{i} + \ddot{v}_o = \frac{1}{C} \left(\frac{\dot{v}_o}{R} + \frac{v_o}{L} \right) + \ddot{v}_o$$

これから, 回路系の微分方程式が次式として求まる.

$$\ddot{v}_o + \frac{1}{CR} \dot{v}_o + \frac{1}{CL} v_o = \ddot{v}_i$$

これをラプラス変換すると

$$\left(s^2 + \frac{1}{CR} s + \frac{1}{CL} \right) V_o = s^2 V_i$$

よって, 伝達関数は次式となる.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{CR} s + \frac{1}{CL}}$$

これから, 次の状態方程式を得る.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ 1 & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} \\ -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} v_i$$

$$v_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + v_i$$

第3章 状態方程式の解と状態遷移行列

3.1 s 領域解

状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

をラプラス変換すると

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

これらから、状態と出力の s 領域解として次式を得る.

$$X(s) = (sI - A)^{-1}\{x(0) + BU(s)\} \quad (3.3)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = C(sI - A)^{-1}\{x(0) + BU(s)\} + DU(s) \quad (3.4)$$

t 領域解は、これらを逆ラプラス変換して得られる.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)], \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

3.2 t 領域解

まず, $u(t) = 0$ とおいた

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.5)$$

の解を求める. このため, 次を定義する.

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (3.6)$$

この行列は, 状態遷移行列 (state transition matrix) または行列指数関数 (matrix exponential function) と呼ばれる. (3.5) 式の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (3.7)$$

と表される. これは, 以下の性質 1 を利用して上式を t で微分すると

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}x(0) = Ax(t)$$

となり、性質2から、初期条件も満たすことから確認できる。また、性質1の式をラプラス変換すると

$$s\Phi(s) - I = A\Phi(s), \quad \Phi(s) = \mathcal{L}[e^{At}]$$

$$(sI - A)\Phi(s) = I$$

よって

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

がわかる。

(e^{At} の性質)

$$1. \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$$

$$2. e^0 = I$$

$$3. e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$$

$$4. (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

5. e^{At} は I, A, \dots, A^{n-1} の線形結合で表される。

$$e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (3.8)$$

性質1は式(3.6)を項別微分すれば得られる。性質2は式(3.6)で $t=0$ とおけばよい。性質3は次のように直接計算によって示せる。

$$\begin{aligned} e^{A(t+\tau)} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t+\tau)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{t^r \tau^{k-r}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \sum_{r=0}^k \frac{t^r \tau^{k-r}}{r!(k-r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} A^r \frac{t^r}{r!} \left(\sum_{k=r}^{\infty} A^{k-r} \frac{\tau^{k-r}}{(k-r)!} \right) \\ &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} A^r \frac{t^r}{r!} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{\tau^i}{i!} \right) = e^{At} e^{A\tau} \end{aligned}$$

ここで、二項定理 (binomial theorem)

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^k {}_k C_r a^r b^{k-r} = \sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} a^r b^{k-r}$$

を用いた。性質4は性質3において $\tau = -t$ とおき、性質2を用いることにより示せる。

性質5は次のように証明できる。 e^{At} のラプラス変換 $(sI - A)^{-1}$ は

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \text{adj}(sI - A) \quad (3.9)$$

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

と表される. いま

$$\text{adj}(sI - A) = B_0 + B_1s + \cdots + B_{n-1}s^{n-1}$$

とおくと, (3.9) 式から

$$\begin{aligned} \Delta(s)I &= (sI - A)\text{adj}(sI - A) = (sI - A)(B_0 + B_1s + \cdots + B_{n-1}s^{n-1}) \\ &= -AB_0 + (B_0 - AB_1)s + (B_1 - AB_2)s^2 + \cdots + (B_{n-2} - AB_{n-1})s^{n-1} + B_{n-1}s^n \end{aligned}$$

s の各べきの係数の比較から

$$B_{n-1} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = a_{n-1}I, \quad B_{n-2} = a_{n-1}I + A$$

$$B_{n-3} - AB_{n-2} = a_{n-2}I, \quad B_{n-3} = a_{n-2}I + AB_{n-2} = a_{n-2}I + a_{n-1}A + A^2$$

\vdots

$$B_0 - AB_1 = a_1I, \quad B_0 = a_1I + AB_1 = a_1I + a_2A + \cdots + a_{n-1}A^{n-2} + A^{n-1}$$

$$-AB_0 = a_0I, \quad 0 = a_0I + AB_0 = a_0I + a_1A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n$$

よって, $\text{adj}(sI - A)$ は I, A, \dots, A^{n-1} の線形結合で表される. 逆ラプラス変換により性質 5 がいえる. また, 最後の式は, ケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley-Hamilton theorem) (正方向列 A はその特性方程式を満たす. すなわち, $\Delta(A) = 0.$) である.

$n = 3$ を例に上記の計算を説明する.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\text{adj}(sI - A)$$

$$\Delta(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

$$\text{adj}(sI - A) = B_0 + B_1s + B_2s^2$$

$$B_2 = I$$

$$B_1 = a_2I + A$$

$$B_0 = a_1I + a_2A + A^2$$

よって

$$\text{adj}(sI - A) = a_1I + a_2A + A^2 + (a_2I + A)s + Is^2 = (s^2 + a_2s + a_1)I + (s + a_2)A + A^2$$

以上から

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^2 + a_2s + a_1}{\Delta(s)}I + \frac{s + a_2}{\Delta(s)}A + \frac{1}{\Delta(s)}A^2$$

これを逆ラプラス変換すると次式を得る.

$$e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2$$

次に, $u(t)$ を考慮した場合の状態方程式の解を定数変化法 (variation of parameters) によって求めよう.

(3.1) 式の解を

$$x(t) = e^{At}v(t) \quad (3.10)$$

と仮定する. (3.1) 式から

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}v(t) + e^{At}\dot{v}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

よって

$$\dot{v}(t) = e^{-At}Bu(t)$$

上式に dt を掛けて, 0 から t まで積分すると

$$v(t) = v(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

これを (3.10) 式に代入すると

$$x(t) = e^{At} \left\{ v(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \right\}$$

を得る. 上式で $t=0$ とおけば, $v(0) = x(0)$ がわかる. よって, 次を得る.

(t 領域の解の公式)

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.11)$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (3.12)$$

例題 3.1 次の状態方程式の解を求めよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$$

[解]

1. s 領域解を利用する方法

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} (x(0) + BU(s)) \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-s^2 - 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s} - \frac{3}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \\ \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換して

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 3e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \quad (3.13)$$

を得る.

2. t 領域解の公式を利用する方法 まず, e^{At} を計算する.

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これを (3.11) 式に代入し

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

を計算すると式 (3.13) を得る.

例題 3.2 次の A 行列に対する行列指数関数 e^{At} を計算せよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (2) A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

[解] (1)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s - \lambda_2} \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

(2)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda} & \frac{1}{(s - \lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{s - \lambda} \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

対角行列 (diagonal matrix) (一般にジョルダン標準形 (Jordan canonical form) の行列) に対する行列指数関数は簡単に求まる. よって, e^{At} を計算するとき次の関係式を用いる場合がある.

$$J = T^{-1}AT, \quad J: \text{ジョルダン標準形}, \quad T: \text{変換行列}$$

$$e^{Jt} = T^{-1}e^{At}T$$

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

3.3 演習問題

1. 次の A 行列に対する行列指数関数 e^{At} を計算せよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad (2) A = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix} \quad (\omega > 0)$$

2. 次の状態方程式の解を求めよ.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$$

3.4 演習問題の解

1. (1)

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

要素ごと逆ラプラス変換すると次式を得る.

$$e^{At} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{-t} + e^{-5t} & 3e^{-t} - 3e^{-5t} \\ e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} + 3e^{-5t} \end{bmatrix} \mathbf{1}(t)$$

(2)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+\sigma & -\omega \\ \omega & s+\sigma \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s+\sigma & \omega \\ -\omega & s+\sigma \end{bmatrix}$$

要素ごと逆ラプラス変換すると次式を得る.

$$e^{At} = e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \mathbf{1}(t)$$

2. s 領域解は次式である.

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} \{x(0) + BU(s)\} = \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 8s + 3}{s(s+1)(s+5)} \\ \frac{3s+2}{s(s+1)(s+5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{13}{20} \frac{1}{s+5} \\ \frac{2}{5} \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} - \frac{13}{20} \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

要素ごと逆ラプラス変換すると次式を得る.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{13}{20}e^{-5t} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{13}{20}e^{-5t} \end{bmatrix} \mathbf{1}(t)$$

第4章 座標変換，安定性条件

4.1 座標変換と系の等価性

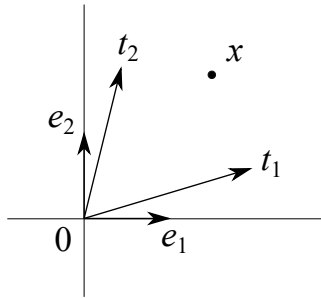


図 4.1: ベクトル x の表現

2次元ベクトル (2-dimensional vector) x に対して，通常，単位ベクトル (unit vector) e_1, e_2 を用いて

$$x = e_1 x_1 + e_2 x_2 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ix$$

とするが，別の線形独立な (linearly independent) ベクトル t_1, t_2 を用いて

$$x = t_1 z_1 + t_2 z_2 = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Tz$$

と表現することもできる．いずれも同じ x を表すが，座標値は異なっている．これを座標変換 (coordinate transformation) といい， T を座標変換行列 (coordinate transform matrix) という．

n 次元ベクトル x についても同様に正則行列 (nonsingular matrix) T ($|T| \neq 0$) を用いて座標変換を定義できる．

$$x = Tz \tag{4.1}$$

状態方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

に座標変換 (4.1) 式を適用すると次式を得る．

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}z(t) + Du(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

ただし

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT$$

系(4.2)と系(4.3)は, 状態を表現する座標系が異なるだけの同値な系である. したがって, 安定性 (stability) などの系の性質は同じである. 例えば, 次がいえる.

1. A と \tilde{A} の固有値は等しい.

$$|sI - \tilde{A}| = |T^{-1}(sI - A)T| = |T^{-1}||sI - A||T| = |sI - A|$$

2. 系(4.2)と系(4.3)の伝達関数 (行列) は等しい.

$$\begin{aligned} \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} &= CT [T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

4.2 安定性条件

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{4.4}$$

の任意の初期状態 $x(0)$ に対する解 $x(t)$ が 0 に収束するとき, 系は安定 (stable) (漸近安定 (asymptotically stable)) という.

(安定性の定義)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{for } \forall x(0) \in R^n \tag{4.5}$$

(4.4) 式の解は

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

となることから, 安定性は次と同値である.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0 \tag{4.6}$$

A の固有値 (eigenvalue) を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (重複なしとする) とし, λ_i に属する固有ベクトル (eigenvector) t_i によって座標変換行列を作る.

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$$

このとき, 座標変換 $x = Tz$ によって, 系(4.4)は次のように変換される.

$$\dot{z}(t) = Jz(t), \quad z(0) = T^{-1}x(0), \quad J = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \tag{4.7}$$

この解は次式で表される.

$$z(t) = e^{Jt}z(0) = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}z(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}z_1(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}z_n(0) \end{bmatrix}$$

$e^{At} \rightarrow 0$ は $e^{Jt} \rightarrow 0$ に同値であり, 後者は上式から, $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0, i = 1, \dots, n$ に同値である. よって, 安定性の条件として次を得る.

(安定性条件) 系 (4.4) の安定性は次に同値である.

$$\text{Re } \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

ただし, λ_i は A の固有値である.

重複固有値がある場合には A をジョルダン標準形 (Jordan canonical form) J に変換でき, e^{Jt} の要素に $t^k e^{\lambda_i t}$ という関数が現れるが, その場合にも, $e^{Jt} \rightarrow 0$ となる条件, すなわち, $t^k e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ となる条件は (4.8) 式となる.

A の固有値は A の特性方程式 (characteristic equation)

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (4.9)$$

の根であるので, 安定性は $\Delta(s)$ にラウス・フルビッツの安定判別法 (Routh-Hurwitz stability test) を適用すれば判定できる.

例題 4.1 次の A 行列を持つ系の安定性を判別せよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

[解]

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^2 + 3s + 4$$

ラウスの安定判別法から, 系は安定である.

ある行列の正定性 (positive definiteness) を調べることによって系の安定性を判別する方法がある.

(リアプノフの安定定理 (Lyapunov stability theorem)) 系 (4.4) が安定となるための必要十分条件は, 任意の正定行列 (positive definite matrix) (すべての固有値が正の対称行列) Q ($Q > 0$ と表す) に対して

$$A'P + PA = -Q \quad (4.10)$$

を満たす $P > 0$ が存在することである. (4.10) 式をリアプノフ方程式 (Lyapunov equation) という.

(証明) (十分性) (4.10) 式を満たす $P > 0$ が存在すると仮定する. このとき, $V = x'Px$ は正定関数 ($x \neq 0$ のとき $V > 0$, $x = 0$ のとき $V = 0$) である.

$$\dot{V} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x = -x'Qx$$

\dot{V} は負定関数 ($-\dot{V}$ が正定関数) となり, $V \rightarrow 0$ すなわち, $x \rightarrow 0$ となる.

(必要性) A の固有値の実部はすべて負と仮定する. このとき, 任意の $Q > 0$ に対して次の P が定義できる.

$$P = \int_0^{\infty} (e^{At})' Q e^{At} dt > 0$$

また

$$\begin{aligned} A'P + PA &= \int_0^{\infty} \{ A' (e^{At})' Q e^{At} + (e^{At})' Q e^{At} A \} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{ (e^{At})' Q e^{At} \} dt = (e^{At})' Q e^{At} \Big|_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$

なので, P は (4.10) 式を満たす.

例題 4.2 次の A 行列を持つ系の安定性をリアプノフの安定定理により判定せよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

[解] $Q = I$ とし,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと, (4.10) 式から

$$\begin{cases} -2p_{11} + 2p_{12} = -1 \\ -3p_{12} + p_{22} = 0 \\ -4p_{22} = -1 \end{cases}$$

これを解くと

$$p_{11} = \frac{7}{12}, \quad p_{22} = \frac{3}{12}, \quad p_{12} = \frac{1}{12}$$

すなわち

$$P = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

を得る. シルベスターの判定法 (Sylvester's criterion) (すべての主座小行列式が正) より, この行列は正定行列である. よって, 系は安定である.

4.3 演習問題

1. 次の A 行列を持つ系の安定性を判別せよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad (2) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 次の A 行列を持つ系の安定性をリアプノフの安定定理により判定せよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

4.4 演習問題の解

1. (1) 特性多項式は次式である.

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + s$$

ラウス・フツビッツの安定判別法から, 不安定である.

(2) 特性多項式は次式である.

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 5$$

ラウス・フツビッツの安定判別法から, 安定である.

(3) 特性多項式は次式である.

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 2$$

ラウス・フツビッツの安定判別法から, 不安定である.

2. $Q = I$ とし,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと, $A'P + PA = -Q$ から

$$\begin{cases} -2p_{11} - 8p_{12} = -1 \\ p_{11} - 5p_{12} - 4p_{22} = 0 \\ 2p_{12} - 8p_{22} = -1 \end{cases}$$

これを解くと

$$p_{11} = \frac{1}{2}, \quad p_{12} = 0, \quad p_{22} = \frac{1}{8}$$

すなわち

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

を得る. シルベスターの判定法より, この行列は正定行列である. よって, 系は安定である.

第5章 可制御性

5.1 定義と判定法

次の n 次系を考える.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

定義 5.1 (可制御性 (controllability) の定義) 任意の初期状態 x_0 を任意の有限時間 $t_f > 0$ で $x(t_f) = 0$ に制御できるとき系は可制御であるという.

可制御性行列 (controllability matrix) を次のように定義する.

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

定理 5.1 (可制御性の条件) 系 (5.1) が可制御であるための必要十分条件は次式が成り立つことである.

$$\text{rank } M_C = n \quad (5.3)$$

(証明) 定義から可制御性は, $\forall x(0), \forall t_f > 0$ に対して次式を満たす $u(t)$ が存在することに等しい.

$$0 = e^{At_f} \left\{ x(0) + \int_0^{t_f} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right\}$$

上式に e^{-At_f} を左から掛けて整理すると

$$-x(0) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

すなわち, 可制御性は上式右辺が任意の n 次元ベクトルとなるような $u(t)$ が存在することに等しい.

(必要性) $\text{rank } M_C < n$ とする. e^{At} の性質 5 を用いると, (5.4) 式右辺は

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \{c_0(-\tau)I + c_1(-\tau)A + \cdots + c_{n-1}(-\tau)A^{n-1}\} Bu(\tau) d\tau \\ &= M_C \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} c_0(-\tau)u(\tau) \\ \vdots \\ c_{n-1}(-\tau)u(\tau) \end{bmatrix} d\tau \end{aligned}$$

$\text{rank} M_C < n$ なので, 上式は任意の n 次元ベクトルを表現できない. よって, 系は不可制御である.

(充分性) $\text{rank} M_C = n$ とする. このとき, 次の $n \times n$ 行列が正則となる.

$$W_C = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B' e^{-A'\tau} d\tau$$

よって, 任意の $x(0) \in R^n$ に対して, 次の入力を作ることができる.

$$u(\tau) = -B' e^{-A'\tau} W_C^{-1} x(0)$$

これを (5.4) 式右辺に代入すると

$$-\int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B' e^{-A'\tau} d\tau W_C^{-1} x(0) = -x(0)$$

となる. よって系は可制御である.

(Q.E.D.)

可制御性と (5.4) 式右辺が任意ベクトルを生成できることは同値であることがわかった. このことから, 次が言える.

定義 5.2 (可制御性) 可制御性は次に同値である.

1. 任意の有限時間 $t_f > 0$ で $x(0) = 0$ から任意の状態 $x(t_f) = x_1$ に制御できる.
2. 任意の有限時間 $t_f > 0$ で任意の初期状態 $x(0) = x_0$ を任意の状態 $x(t_f) = x_1$ に制御できる.

一入力系の場合, M_C は $n \times n$ 行列なので, (5.3) 式は次式で置き換えてもよい.

$$|M_C| \neq 0 \tag{5.5}$$

例題 5.1 図 5.1 に示す水槽系の線形化状態方程式を求め, その可制御性を調べよ. ただし, q_0 は基準流入量, x_1, x_2 は基準水位からの偏差, C_1, C_2 は水槽の断面積である. 各水槽の流出抵抗は R_1, R_2 とせよ.

[解] (a) の水槽系の線形化状態方程式は次のように得られる.

$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1} x_1 + u \\ C_2 \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_1} x_1 - \frac{1}{R_2} x_2 \end{cases}$$

すなわち

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

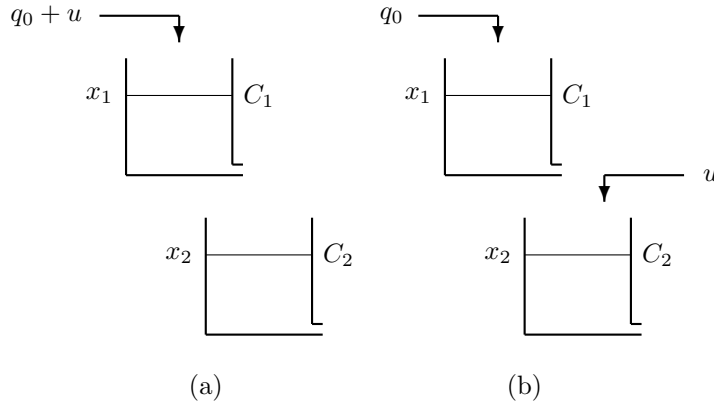


図 5.1: 直列結合された水槽系

よって

$$\text{rank } M_C = \text{rank} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1^2 R_1} \\ 0 & \frac{1}{C_1 C_2 R_1} \end{bmatrix} = 2$$

となり，系は可制御である．(b) の水槽系の線形化状態方程式は次式で表される．

$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1} x_1 \\ C_2 \dot{x}_2 = \frac{1}{R_1} x_1 - \frac{1}{R_2} x_2 + u \end{cases}$$

すなわち

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} u$$

よって

$$\text{rank } M_C = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2^2 R_2} \end{bmatrix} = 1$$

となり，系は不可制御である．以上の結果は，物理的観察からも理解できる．すなわち，(a) では，入力 u が x_1, x_2 に影響する一方，(b) では， u の影響が x_2 だけにとどまっている．

例題 5.2 図 5.2 の水槽系が可制御となる条件を求めよ．ただし， $C_1 = C_2 = 1$ ， $R_1, R_2 > 0$ とする．

[解] 線形化状態方程式は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

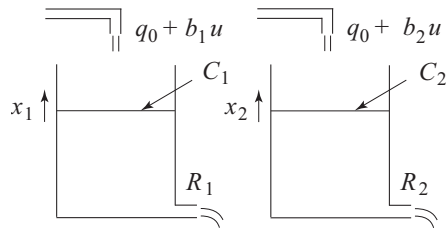


図 5.2: 2 水槽系

よって

$$|M_C| = \begin{vmatrix} b_1 & -\frac{b_1}{R_1} \\ b_2 & -\frac{b_2}{R_2} \end{vmatrix} = \frac{b_1 b_2}{R_1} - \frac{b_1 b_2}{R_2} = b_1 b_2 \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

これから, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $R_1 \neq R_2$ が可制御性の条件となる.

例題 5.3 次の系の可制御性を判定せよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

[解]

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり, $|M_C| = 1$ なので系は可制御である.

5.2 演習問題

1. 次の行列を持つ系の可制御性を判定せよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 可制御性は座標変換の影響を受けないことを示せ.

5.3 演習問題の解

1. (1)

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |M_C| = 0$$

よって、系は不可制御である。

(2)

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad |M_C| = -1 \neq 0$$

よって、系は可制御である。

(3)

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}M_C = 3$$

よって、系は可制御である。

2. 座標変換行列 T によって、 A , B は

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B$$

と変換される。この系に対する可制御性行列は次式である。

$$\begin{aligned} \tilde{M}_C &= \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \cdots & (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = T^{-1}M_C \end{aligned}$$

T^{-1} は正則行列なので、 $\text{rank}\tilde{M}_C = \text{rank}M_C$ である。よって、可制御性は座標変換の影響を受けない。

第6章 可観測性

6.1 定義と判定法

次の n 次系を考える.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

$$x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad y \in R^m$$

定義 6.1 (可観測性 (observability) の定義) 任意の有限時間 ($t_f > 0$) の入力および出力, $u(t), y(t), 0 \leq t \leq t_f$ から初期状態 $x(0)$ を逆算できるとき系は可観測であるという.

可観測性行列 (observability matrix) を次のように定義する.

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

定理 6.1 (可観測性の条件) 系 (6.1) が可観測であるための必要十分条件は次式が成り立つことである.

$$\text{rank } M_O = n \quad (6.3)$$

(証明) $u(t)$ による強制応答は解の公式から計算できるので, 一般性を失うことなく $u(t) = 0$ とおく.

(必要性) $\text{rank } M_O < n$ とすると

$$M_O(x_1 - x_2) = 0, \quad x_1 \neq x_2$$

を満たす x_1, x_2 が存在する. これらを初期状態とする出力を $y_1(t), y_2(t)$ とすると

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= Ce^{At}(x_1 - x_2) \\ &= C \{c_0(t)I + c_1(t)A + \cdots + c_{n-1}(t)A^{n-1}\} (x_1 - x_2) \\ &= \begin{bmatrix} c_0(t)I_m & c_1(t)I_m & \cdots & c_{n-1}I_m \end{bmatrix} M_O(x_1 - x_2) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、出力から x_1 と x_2 を区別できないので、系は不可観測となる。

(十分性) $\text{rank}M_O = n$ とすると、次の $n \times n$ 行列が正則となる。

$$W_O = \int_0^{t_f} e^{A't} C' C e^{At} dt$$

W_O の正則性は、可制御性の証明で用いた W_C の場合と同様に証明できる。このとき、 $x(0)$ は出力

$$y(t) = C e^{At} x(0), \quad 0 \leq t \leq t_f$$

から次式で逆算できる。

$$W_O^{-1} \int_0^{t_f} e^{A't} C' y(t) dt = W_O^{-1} \int_0^{t_f} e^{A't} C' C e^{At} dt x(0) = x(0)$$

(Q.E.D.)

一出力系の場合、 M_O は $n \times n$ 行列なので、(6.3) 式は次式で置き換えてもよい。

$$|M_O| \neq 0 \tag{6.4}$$

可制御性と可観測性には次の双対性がある。

1. (A, B) の可制御性は (B', A') の可観測性に同値である。
2. (C, A) の可観測性は (A', C') の可制御性に同値である。

例題 6.1 図 6.1 に示す水槽系の線形化状態方程式を求め、その可観測性を調べよ。ただし、 q_0 は基準流入量、 x_1, x_2 は基準水位からの偏差、 C_1, C_2 は水槽の断面積である。各水槽の流出抵抗は R_1, R_2 とせよ。

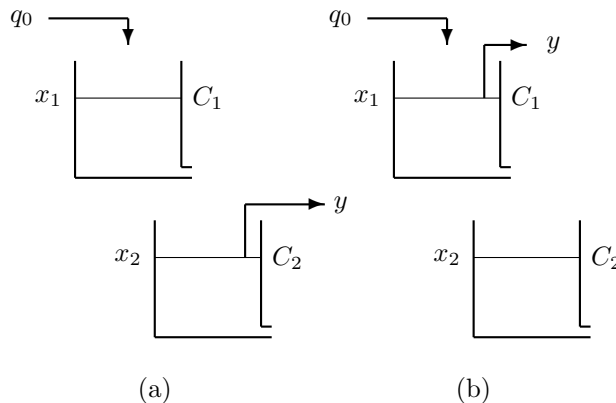


図 6.1: 直列結合された水槽系

[解] 例題 5.1 の解から、(a), (b) の水槽系の線形化状態方程式は同一で

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x$$

となり，出力方程式は，それぞれ

$$(a) y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad (b) y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

となる．よって，(a) の場合

$$\text{rank} M_O = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} = 2$$

から可観測と，(b) の場合

$$\text{rank} M_O = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \end{bmatrix} = 1$$

から不可観測と判定される．これらは物理的観察とも一致する．

例題 6.2 図 6.2 の水槽系が可観測となる条件を求めよ．ただし， $y = x_1 - x_2$ ， $C_1 = C_2 = 1$ ， $R_1, R_2 > 0$ とする．

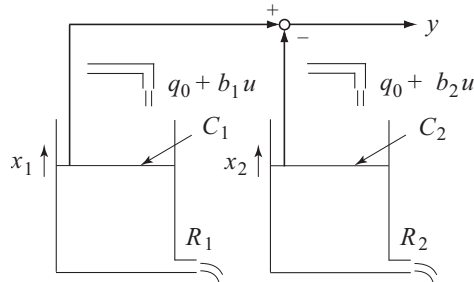


図 6.2: 2 水槽系

[解] 線形化状態方程式は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

よって

$$|M_O| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

これから， $R_1 \neq R_2$ が可観測性の条件となる．

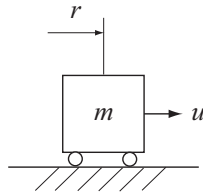


図 6.3: 慣性系

例題 6.3 図 6.3 の慣性系の可観測性を判定せよ。ただし, (a) $y = r$, (b) $y = \dot{r}$ とする。

[解] 運動方程式 $m\ddot{r} = u$ から状態方程式は次式となる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

(a)

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad |M_O| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

よって, 系は可観測である。

(b)

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad |M_O| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって, 系は不可観測である。

6.2 演習問題

1. 次の行列を持つ系の可観測性を判定せよ。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2) A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 可観測性は座標変換の影響を受けないことを示せ。

6.3 演習問題の解

1. (1)

$$M_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |M_O| = 1 \neq 0$$

よって、系は可観測である。

(2)

$$M_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad |M_O| = 0$$

よって、系は不可観測である。

(3)

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |M_O| = 1 \neq 0$$

よって、系は可観測である。

2. 座標変換行列 T によって、 A , C は

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{C} = CT$$

と変換される。この系に対する可観測性行列は次式である。

$$\tilde{M}_O = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = M_OT$$

T は正則行列なので、 $\text{rank}\tilde{M}_O = \text{rank}M_O$ である。よって、可観測性は座標変換の影響を受けない。

第7章 対角正準形

7.1 対角正準形

一入力一出力系

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad x \in R^n, u \in R, y \in R \quad (7.1)$$

の A を対角行列に変換する正準形について説明する.

行列 A は異なる固有値 λ_k , $k = 1 \sim n$ を持つとし, λ_k に属する固有ベクトルを v_k とする. すなわち

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n$$

このとき, 座標変換

$$x(t) = Tz(t), \quad T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

を系 (7.1) に適用すれば, 変換された系として

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}z(t) \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} \dot{z}_k(t) = \lambda_k z_k(t) + \beta_k u(t), \quad k = 1, \dots, n \\ y(t) = \gamma_1 z_1(t) + \gamma_2 z_2(t) + \cdots + \gamma_n z_n(t) \end{cases} \quad (7.3)$$

を得る. この状態方程式表現を対角正準形 (diagonal canonical form) という. 式 (7.3) を $z(0) = 0$ とおいてラプラス変換すると

$$\begin{cases} sZ_k(s) = \lambda_k Z_k(s) + \beta_k U(s), \quad k = 1, \dots, n \\ Y(s) = \gamma_1 Z_1(s) + \gamma_2 Z_2(s) + \cdots + \gamma_n Z_n(s) \end{cases}$$

となり, 上式をブロック線図で表現すると図 7.1 を得る.

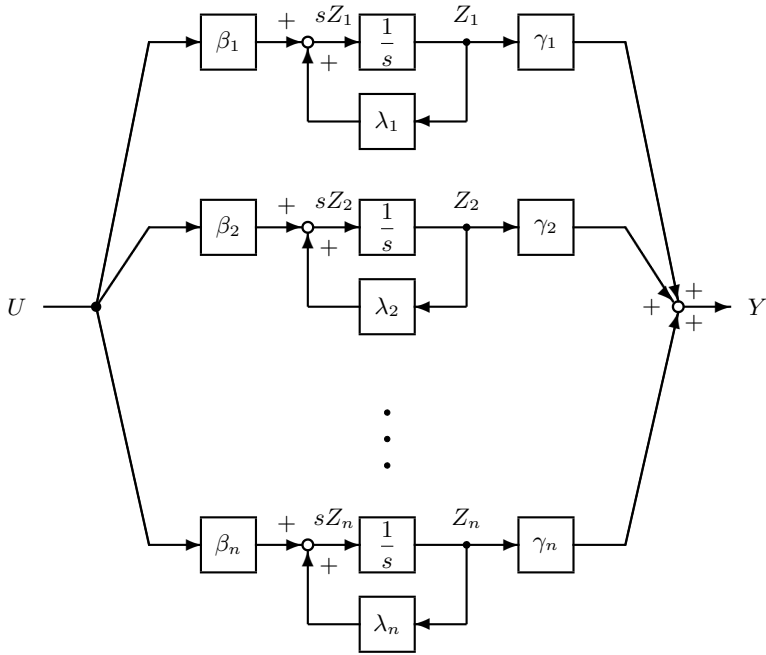


図 7.1: 対角正準系

式 (7.2) から伝達関数を計算すると

$$\begin{aligned} G(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\ &= \frac{\gamma_1\beta_1}{s - \lambda_1} + \frac{\gamma_2\beta_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\gamma_n\beta_n}{s - \lambda_n} \end{aligned} \quad (7.4)$$

となる.

定理 7.1 対角正準形 (7.2) が可制御であるための必要十分条件は

$$\beta_k \neq 0, \quad k = 1 \sim n$$

である.

[証明]

$$\tilde{M}_C = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{bmatrix} V$$

ただし

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

である。よって

$$|\tilde{M}_C| = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n |V|$$

が成り立つ。 V はバンデルモンド行列 (Vandermonde matrix) と呼ばれ、 $\lambda_k \neq \lambda_l (k \neq l)$ のとき、 $|V| \neq 0$ となることが知られている。よって、 $\beta_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ と $|\tilde{M}_C| \neq 0$ は同値となる。 (Q.E.D.)

次の定理も定理 7.1 と同様に証明できる。

定理 7.2 対角正準形 (7.2) が可観測であるための必要十分条件は

$$\gamma_k \neq 0, \quad k = 1 \sim n$$

である。

例題 7.1 次の行列を持つ系を対角正準形に変換し、可制御性と可観測性を判定せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[解]

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+2 \end{vmatrix} = s(s+1) = 0$$

から、 A の固有値が

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

と求まり、線形方程式

$$(\lambda_k I - A) v_k = 0, \quad k = 1, 2$$

から、 λ_k に属する固有ベクトルが

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と得られる。ただし、固有ベクトルにはスカラー倍の自由度がある。よって、 A を対角行列に変換する変換行列とその逆行列は

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、対角正準形は

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = C T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と計算される。 \tilde{B}, \tilde{C} に 0 の要素があるので、この系は不可制御・不可観測である。系が対角正準形のとき、次を容易に確認できる。

定理 7.3 系が可制御であるための必要十分条件は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \text{ は任意の } A \text{ の固有値} \quad (7.5)$$

(証明) $\lambda = \lambda_1$ とすると (7.5) 式から $\beta_1 \neq 0$ を得る. 同様に, $\beta_i \neq 0, i = 2, \dots, n$ が示せる. よって, 定理 7.1 から系は可制御である. また, 逆も言える. (Q.E.D.)

定理 7.4 系が可観測であるための必要十分条件は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \text{ は任意の } A \text{ の固有値} \quad (7.6)$$

定理 7.3, 7.4 は一般の A, B, C (多入力多出力, 重複固有値も許す) についても成立する.

例題 7.2 次の行列を持つ系の可制御性を定理 7.3 によって判定せよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解] A の固有値は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ である. $\lambda = \lambda_1$ に対して

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

よって, 系は不可制御 (λ_1 のモードが不可制御).

7.2 カルマンの正準分解

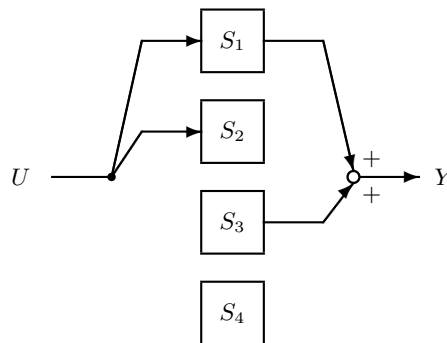


図 7.2: カルマンの正準分解

簡単のため, 系は対角正準形で表されているとする. 可制御性・可観測性の観点から, 系は次の四つの部分系に分割できる (図 7.2). このような表現をカルマンの正準分解 (Kalman canonical decomposition) という.

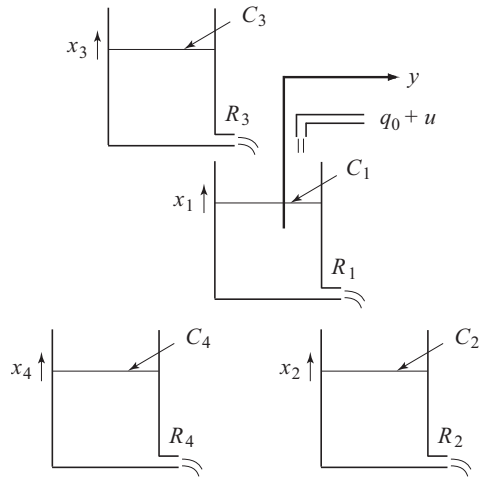


図 7.3: 四つの水槽からなる水槽系

- S_1 : 可制御かつ可観測な部分系
- S_2 : 可制御かつ不可観測な部分系
- S_3 : 不可制御かつ可観測な部分系
- S_4 : 不可制御かつ不可観測な部分系

このとき、系の伝達関数は

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \sum_{k \in K} \frac{\gamma_k \beta_k}{s - \lambda_k}$$

K は $\beta_k \neq 0, \gamma_k \neq 0$ を満たす k の集合

と表される．すなわち、伝達関数は S_1 のみを表現している． $S_2 \sim S_4$ がある場合、伝達関数に極零相殺が生じ、伝達関数の次数が A の次数より小さくなる．よって、次の定理を得る．

定理 7.5 伝達関数

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

に極零相殺 (pole-zero cancellation) が生じないための必要十分条件は、系が可制御かつ可観測であることである．

7.3 カルマンの正準分解の具体例

図 7.3 の水槽系の状態方程式を求める．

流量バランスから次式を得る.

$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_3}x_3 + u \\ C_2 \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_1}x_1 - \frac{1}{R_2}x_2 \\ C_3 \dot{x}_3 &= -\frac{1}{R_3}x_3 \\ C_4 \dot{x}_4 &= -\frac{1}{R_4}x_4 \end{cases}$$

状態方程式の形に変形すると

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{C_1 R_1}x_1 + \frac{1}{C_1 R_3}x_3 + \frac{1}{C_1}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_2 R_1}x_1 - \frac{1}{C_2 R_2}x_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{C_3 R_3}x_3 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{C_4 R_4}x_4 \end{cases}$$

簡単のため, $C_i = 1, R_i = 1$ とおくと次式を得る.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 \\ \dot{x}_4 &= -x_4 \end{cases}$$

これを行列表現すると次式となる.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

- x_1 : 可制御かつ可観測な部分系の状態
- x_2 : 可制御かつ不可観測な部分系の状態
- x_3 : 不可制御かつ可観測な部分系の状態
- x_4 : 不可制御かつ不可観測な部分系の状態

伝達関数を求めると次式となる.

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

7.4 演習問題

1. 次の行列を持つ系を対角正準形に変換し、可制御性と可観測性を判定せよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 例題 7.1 の系の可制御性と可観測性を定理 7.3, 7.4 を用いて判定せよ.

7.5 演習問題の解

1. 特性方程式は次式である.

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2) = 0$$

これから、固有値は、 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ となる. $(\lambda_k - A)v_k = 0$ から

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る. また, T^{-1} は

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上から、次式を得る.

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

\tilde{B} に 0 の要素があるので、不可制御である. \tilde{C} に 0 の要素があるので、不可観測である.

2. 固有値は、 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ である.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 I - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

λ_2 に対する行列のランクは 1 であり, $n = 2$ なので, 不可制御である.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列のランクは 1 であり, $n = 2$ なので, 不可観測である.

第8章 可制御正準形と可観測正準形

引き続き、一入力一出力系の正準形について考える。

8.1 可制御正準形

可制御正準形の状態方程式を導くため、次の3次伝達関数の実現 (realization) (伝達関数から状態方程式を求めること) を考える。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

いま

$$G_0(s) = \frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (8.1)$$

とすると、 Y , Y_0 間には

$$Y(s) = b_0 Y_0(s) + b_1 s Y_0(s) + b_2 s^2 Y_0(s)$$

すなわち

$$y(t) = b_0 y_0(t) + b_1 \dot{y}_0(t) + b_2 \ddot{y}_0(t) \quad (8.2)$$

という関係が成り立つ。また、式 (8.1) から

$$(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y_0(s) = U(s)$$

が得られ、この関係を t 領域で表現すると

$$y_0^{(3)}(t) = -a_0 y_0(t) - a_1 \dot{y}_0(t) - a_2 \ddot{y}_0(t) + u(t) \quad (8.3)$$

となる。状態変数を

$$z_1 = y_0, z_2 = \dot{y}_0, z_3 = \ddot{y}_0 \quad (8.4)$$

と定義すると、式 (8.2), (8.3), (8.4) から

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = -a_0 z_1 - a_1 z_2 - a_2 z_3 + u \\ y = b_0 z_1 + b_1 z_2 + b_2 z_3 \end{cases} \quad (8.5)$$

すなわち

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} z$$

を得る．系が可制御のとき、必ずこの形に変換できるので、これを可制御正準形 (controllable canonical form) という．

式 (8.5) を $z(0) = 0$ としてラプラス変換すると

$$\begin{cases} sZ_1(s) = Z_2(s) \\ sZ_2(s) = Z_3(s) \\ sZ_3(s) = -a_0Z_1(s) - a_1Z_2(s) - a_2Z_3(s) + U(s) \\ Y(s) = b_0Z_1(s) + b_1Z_2(s) + b_2Z_3(s) \end{cases}$$

となり、上式に基づいてブロック線図を描けば図 8.1 を得る．

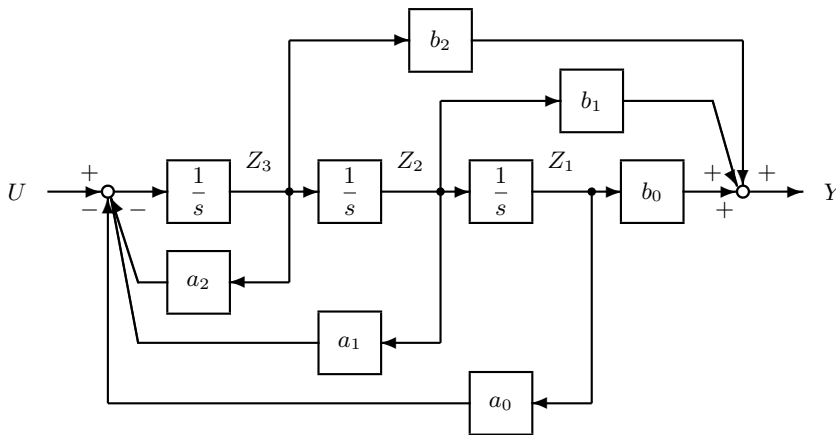


図 8.1: 可制御正準形のブロック線図

一般に、 n 次伝達関数

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

に対する可制御正準形は次の行列を持つ．

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

次に、一般の A, B, C を可制御正準形に変換する変換行列 T を求めよう。簡単のため、 $n = 3$ とする。

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}$$

とおき

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B$$

の関係を利用する。まず

$$B = T\tilde{B} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t_3 \tag{8.6}$$

がわかる。また

$$AT = T\tilde{A}$$

から

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_0t_3 & t_1 - a_1t_3 & t_2 - a_2t_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られ、列ごとに式を立てると

$$At_1 = -a_0t_3, \quad At_2 = t_1 - a_1t_3, \quad At_3 = t_2 - a_2t_3 \tag{8.7}$$

となる。式 (8.6), (8.7) から

$$\begin{aligned} t_3 &= B \\ t_2 &= At_3 + a_2t_3 = AB + a_2B \\ t_1 &= At_2 + a_1t_3 = A^2B + a_2AB + a_1B \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} A^2B + a_2AB + a_1B & AB + a_2B & B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る。これを n 次系に一般化すれば次式が得られる。

$$T = M_C W \quad (8.8)$$

ただし

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 & \\ \vdots & \cdots & a_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & & 0 \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

である。式(8.8)から、 $|M_C| \neq 0$ のとき T は正則となるので、可制御な系は常に可制御正準形に変換できる。

例題 8.1 次の行列を持つ系を可制御正準形に変換せよ。また、伝達関数を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[解] W の決定に必要なとなる A の特性多項式を計算する。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6$$

変換行列 T とその逆行列は

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

となる。よって、可制御正準形は

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix}$$

と計算される。この結果を利用すれば、伝達関数

$$G(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6}$$

を得る。

8.2 可観測正準形

もう一度、次の3次伝達関数の実現問題を考えよう。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

上式の分子・分母を s^3 で割り、整理すると

$$Y(s) = -a_2s^{-1}Y(s) - a_1s^{-2}Y(s) - a_0s^{-3}Y(s) + b_2s^{-1}U(s) + b_1s^{-2}U(s) + b_0s^{-3}U(s) \quad (8.9)$$

を得る. 式 (8.9) に従ってブロック線図を描くと図 8.2 を得る. すなわち, まず, 三つの積分器を直列結合し, 最後の積分器の出力を $Y(s)$ とおく. そして, $U(s)$ と $Y(s)$ を式 (8.9) にしたがって結線する.

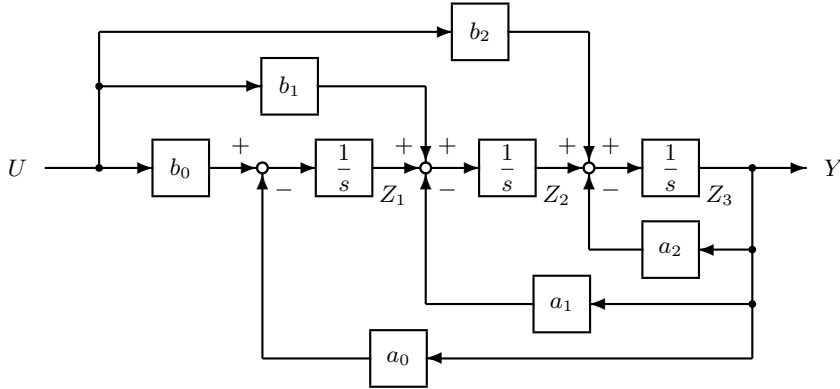


図 8.2: 可観測正準形のブロック線図

図に示すように, 各積分器の出力を状態 z_1, z_2, z_3 とすると, 状態方程式として

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -a_0z_3 + b_0u \\ \dot{z}_2 = z_1 - a_1z_3 + b_1u \\ \dot{z}_3 = z_2 - a_2z_3 + b_2u \\ y = z_3 \end{cases}$$

すなわち

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z$$

を得る. 系が可観測のとき, 必ずこの形に変換できるので, これを可観測正準形 (observable canonical form) という. n 次系へ一般化すると, 可観測正準形の行列は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots\dots\dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]$$

となる。一般の A, B, C を可観測正準形に変換する変換行列も可制御正準形の場合と同様な方法で求まる。

8.3 セミプロパーな伝達関数の実現

セミプロパーな（分母と分子の次数が等しい）伝達関数の実現を具体例で説明する。

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^2 + 2s + 3} = \frac{-3s - 6}{s^2 + 2s + 3} + 4 = C(sI - A)^{-1}B + D$$

可制御正準形で実現する場合、次式となる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-6 \quad -3], \quad D = 4$$

8.4 演習問題

1. 一般の A, B, C を可観測正準形に変換する変換行列を求めよ。
2. 次の系を可制御正準形に変換せよ。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1]$$

3. 次の系を可観測正準形に変換せよ。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

8.5 演習問題の解

1. $n = 3$ とする.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

とおき

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{C} = CT$$

の関係を利用する. まず

$$C = \tilde{C}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = t_3 \quad (8.10)$$

がわかる. また

$$T^{-1}A = \tilde{A}T^{-1}$$

から

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0t_3 \\ t_1 - a_1t_3 \\ t_2 - a_2t_3 \end{bmatrix}$$

が得られ, 行ごとに式を立てると

$$t_1A = -a_0t_3, \quad t_2A = t_1 - a_1t_3, \quad t_3A = t_2 - a_2t_3 \quad (8.11)$$

となる. (8.10), (8.11) 式から

$$\begin{aligned} t_3 &= C \\ t_2 &= t_3A + a_2t_3 = CA + a_2C \\ t_1 &= t_2A + a_1t_3 = CA^2 + a_2CA + a_1C \end{aligned}$$

すなわち

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} CA^2 + a_2CA + a_1C \\ CA + a_2C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = WM_O$$

2. A の特性多項式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6$$

変換行列 T とその逆行列は

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

となる。よって、可制御正準形は

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix}$$

と計算される。ちなみに、伝達関数は次式となる。

$$G(s) = \frac{3s+6}{s^2+5s+6} = \frac{3(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+3}$$

3. A の特性多項式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 4s + 3$$

変換行列の逆行列 T^{-1} と変換行列 T は

$$T^{-1} = WM_O = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

となる。よって、可観測正準形は

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と計算される。ちなみに、伝達関数は次式となる。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

第9章 極配置法による状態フィードバック制御

—入力を持つ n 次系

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

に対して次の問題を考えよう。

「系 (9.1) を安定化し、与えられた初期状態 $x(0)$ からの応答 $y(t)$ を良好なものとする状態フィードバック制御 $u(x(t))$ を求めよ。」

状態を原点に収束させる制御系をレギュレータ (regulator) といい、上記の問題をレギュレータ問題 (regulator problem) という。

9.1 極配置法

定ゲインによる状態フィードバック

$$u = -f_1x_1 - f_2x_2 - \cdots - f_nx_n = -Fx, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}$$

を系 (9.1) に適用すると、閉ループ系の状態方程式は

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) \quad (9.2)$$

となり、問題は、 $A - BF$ を安定行列 (固有値の実部が負の行列) とし、良好な応答を与えるフィードバックゲイン (feedback gain) F を求めることとなる。

いま、系の可制御性を仮定して、可制御正準形の座標系で考えれば、式 (9.2) は次式で表される。

$$\dot{z}(t) = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})z(t)$$

ただし

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \cdots & \zeta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_0 + \zeta_0) & -(a_1 + \zeta_1) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} + \zeta_{n-1}) \end{bmatrix}$$

である。これから、閉ループ系の特性多項式は

$$|sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})| = s^n + (a_{n-1} + \zeta_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \zeta_1)s + (a_0 + \zeta_0) \quad (9.3)$$

と表され、特性多項式の係数が ζ_k によって任意に設定できることがわかる。いま、指定極（固有値）が

$$p_1, p_2, \dots, p_n \quad (\text{実軸に対して対称})$$

で与えられたとし、対応する特性多項式を

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0 \quad (9.4)$$

とすると、閉ループ極 (closed-loop pole) (レギュレータ極 (regulator pole) という) を指定極に配置するフィードバックゲインの要素は、式 (9.3), (9.4) から

$$\zeta_k = d_k - a_k, \quad k = 0 \sim n-1$$

となる。一方、可制御正準形への変換行列を T とすると、次の関係がある。

$$T^{-1}(A - BF)T = T^{-1}AT - T^{-1}BFT = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}$$

これから

$$\tilde{F} = FT$$

すなわち

$$F = \tilde{F}T^{-1} = \begin{bmatrix} d_0 - a_0 & d_1 - a_1 & \cdots & d_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} T^{-1} \quad (9.5)$$

を得る。上式によって指定極を実現する F が計算できる。

一方、系が可制御でないとき、カルマンの正準分解から、不可制御な部分系の極は状態フィードバックを施しても変更できないことがわかる。よって、次の定理を得る。

定理 9.1 次の事項は同値である。

1. 系は可制御である。
2. 状態フィードバック $u = -Fx$ によって閉ループ極を任意に配置できる。

極 p_k と対応するモードとの間には次の関係がある。

$\text{Re } p_k$ を負の方向に大きくする。 → 対応するモードが早く収束する。

$|\text{Im } p_k|$ を小さくする。 → 対応するモードの振動数が減少する。

このような傾向性を頼りに指定極を決めることになるが、応答は制御系の零点にも依存し、また、実際の制御系には入力制限、モデル誤差、雑音などの問題もあるので、一概に極の実部を小さくすれば、高性能なレギュレータが設計できるというものではない。一般に、指定極の選定には試行錯誤を伴う。

例題 9.1 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を持つ系について、レギュレータ極を $\{-2, -2\}$ に配置する F を求めよ.

[解] A の特性多項式と指定極に対応する多項式は、それぞれ

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + s$$

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

であり、可制御正準形への変換行列とその逆行列は

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

と計算される. よって, 式 (9.5) から

$$F = \tilde{F} T^{-1} = \begin{bmatrix} 4-0 & 4-1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & 5 \end{bmatrix}$$

を得る.

(別解) 直接, 特性多項式と指定極に対応する多項式を比較する方法がある.

$$\begin{aligned} |sI - (A - BF)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} s-1+f_1 & -1+f_2 \\ 2+f_1 & s+2+f_2 \end{vmatrix} = s^2 + (1+f_1+f_2)s + 3(f_1-f_2) = s^2 + 4s + 4 \end{aligned}$$

係数の比較から

$$1 + f_1 + f_2 = 4$$

$$3(f_1 - f_2) = 4$$

これを解いて

$$f_1 = \frac{13}{6}, \quad f_2 = \frac{5}{6}$$

を得る.

9.2 演習問題

1. 以下の A, B を持つ系の可制御性を判定し、可制御な場合、レギュレータ極を指定極に配置するフィードバックゲイン F を求めよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{指定極: } \{-1, -2\}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{指定極: } \{-1 \pm j\}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{指定極: } \{-2, -2\}$$

2. 図 9.1 の水槽系の状態方程式は次式である.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_1, \quad C_1 = C_2 = 1, \quad R_1 = R_2 = 1$$

$q_1 = -Fx$ によって、レギュレータ極を $\{-2, -2\}$ に配置するフィードバックゲイン F を求めよ.

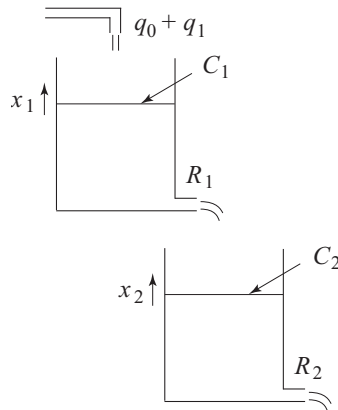


図 9.1: 直列結合された水槽系

9.3 演習問題の解

1. (1)

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

から系は可制御である。A の特性多項式と指定極に対応する多項式は、それぞれ

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & 3 \\ -2 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 5$$

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

であり、可制御正準形への変換行列とその逆行列は

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

と計算される。よって、式 (9.5) から

$$F = \tilde{F} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2-5 & 3-0 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 & 9 \end{bmatrix}$$

を得る。

(2)

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

から系は可制御である。A の特性多項式と指定極に対応する多項式は、それぞれ

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s$$

$$(s+1-j)(s+1+j) = s^2 + 2s + 2$$

であり、可制御正準形への変換行列とその逆行列は

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と計算される。よって、式 (9.5) から

$$F = \tilde{F} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2-0 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

(3)

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

から系は不可制御である.

2. A , B 行列は次式である.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

から系は可制御である. A の特性多項式と指定極に対応する多項式は, それぞれ

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 1$$

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 2$$

であり, 可制御正準形への変換行列とその逆行列は

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と計算される. よって, 式 (9.5) から

$$F = \tilde{F} T^{-1} = \begin{bmatrix} 4-1 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

第10章 最適レギュレータ

10.1 最適レギュレータ

系 (9.1) に対して, 2 次形式評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{y(t)'Qy(t) + u(t)^2\}dt, \quad Q > 0 \quad (10.1)$$

を最小にする安定化制御則を求める問題を考える. 結果として得られる閉ループ系を最適レギュレータといい, この問題を最適レギュレータ問題という. 最適レギュレータは次の利点を持つ.

1. 制御則が定ゲイン状態フィードバックで与えられる.
2. 位相余裕が 60° 以上, ゲイン余裕が ∞ という大きな安定余裕を持つ.
3. 制御対象のパラメータ変化に対する閉ループ伝達関数の変化率 (感度) が低い.
4. 重み Q を適切に選べば, 良好な制御応答が得られる場合が多い.

この問題は, 1960 年にカルマンによって定式化され, 解法が示された.

定理 10.1 (最適レギュレータ問題の解) 系 (9.1) は可制御かつ可観測とする. このとき, J を最小にする安定化制御則 $u^*(t)$ と J の最小値 J^* は

$$u^*(t) = -F^*x(t), \quad F^* = B'P$$

$$J^* = x(0)'Px(0)$$

で与えられる. ただし, $P(n \times n)$ はリカッチ方程式

$$A'P + PA + C'QC - PBB'P = 0$$

の正定行列解である.

注意 10.1 任意の $x \neq 0$ に対して, $x'Px > 0$ を満たす対称行列 P を正定行列という.

定理 10.1 の厳密な証明は省略するが, この結果をダイナミックプログラミングの考え方にしたがって説明しよう.

状態 $x(t)$ に対する最適制御 $u^*(\tau, x(t))$ が存在し, J^* が

$$J^* = x(t)'Px(t), \quad P: \text{正定行列} \quad (10.2)$$

で表されると仮定する。 u^* に微小な変動を与えた制御 (図 10.1)

$$u(\tau) = \begin{cases} \hat{u} & t \leq \tau < t + \Delta t \\ u^*(\tau, x(t + \Delta t)) & \tau \geq t + \Delta t \end{cases}$$

が J を最小とするように \hat{u} を決定しよう。 $u(\tau)$ に対する評価を計算すると

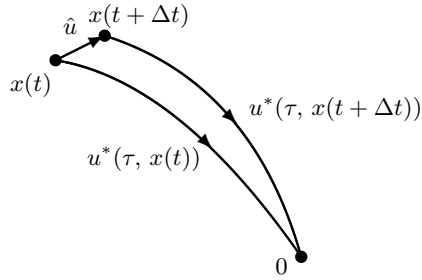


図 10.1: 最適制御の微小変動

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \int_t^{t+\Delta t} \{y(\tau)'Qy(\tau) + \hat{u}^2\} d\tau + x(t + \Delta t)'Px(t + \Delta t) \\ &\simeq \{y(t)'Qy(t) + \hat{u}^2\} \Delta t + x(t + \Delta t)'Px(t + \Delta t) \\ &= \{x(t)'C'QCx(t) + \hat{u}^2\} \Delta t + x(t + \Delta t)'Px(t + \Delta t) \end{aligned}$$

となる。上式に

$$x(t + \Delta t) \simeq x(t) + \Delta x(t) = x(t) + \{Ax(t) + B\hat{u}\} \Delta t$$

を代入し、 Δt^2 の項を無視すると

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \{x'(t)C'QCx(t) + \hat{u}^2\} \Delta t + x(t)'Px(t) \\ &\quad + x(t)'(A'P + PA)x(t)\Delta t + 2\hat{u}B'Px(t)\Delta t \end{aligned} \quad (10.3)$$

を得る。 $J(\hat{u})$ を最小にする \hat{u} は

$$\frac{\partial J(\hat{u})}{\partial \hat{u}} = 0$$

から

$$\hat{u} = u^*(t) = -B'Px(t) \quad (10.4)$$

と求まる。上式を式 (10.3) へ代入して、式 (10.2) を用いると

$$\begin{aligned} J(u^*) &= x(t)'Px(t) \\ &= x(t)'(C'QC + PBB'P)x(t)\Delta t + x(t)'Px(t) \\ &\quad + x(t)'(A'P + PA)x(t)\Delta t - 2x(t)'PBB'Px(t)\Delta t \end{aligned}$$

となり, これを整理すると

$$x(t)'(A'P + PA + C'QC - PBB'P)x(t) = 0$$

を得る. $x(t)$ は任意のベクトルなので, この式は

$$A'P + PA + C'QC - PBB'P = 0 \quad (10.5)$$

を意味する. すなわち, 最適制御は式 (10.4) で与えられ, P は式 (10.5) を満たす.

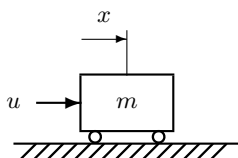


図 10.2: 慣性系

例題 10.1 図 10.2 の慣性系で $m = 1$ とおいた系を考える. 運動方程式は

$$m\ddot{x} = u$$

であり, 状態と出力を

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad y = x$$

とすれば, 次の状態方程式を得る.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

この系および評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (y(t)^2 + u(t)^2) dt$$

に対する F^* を求めよ.

[解]

$$C'QC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である. P は対称行列なので

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおいて, リカッチ方程式を書くと

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 - p_{12}^2 & p_{11} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - p_{12}p_{22} & 2p_{12} - p_{22}^2 \end{bmatrix} = 0$$

となる．これから次の方程式を得る．

$$\left. \begin{array}{l} 1 - p_{12}^2 = 0 \\ 2p_{12} - p_{22}^2 = 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} = 0 \end{array} \right\}$$

これらを P が正定行列になる条件（シルベスターの条件）

$$p_{11} > 0, |P| > 0$$

を考慮して解けば

$$p_{11} = \sqrt{2}, p_{12} = 1, p_{22} = \sqrt{2}$$

すなわち

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

となり

$$F^* = B'P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

を得る．

10.2 演習問題

1. 次の系を考える．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{y(t)^2 + u(t)^2\} dt$$

に対する F^* を求めよ．

10.3 演習問題の解

1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad Q = 1$$

$$C'QC = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BB' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。\$P\$ は対称行列なので

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とにおいて、リカッチ方程式を書く

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 - 2p_{12} - p_{12}^2 & p_{11} - p_{22} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - p_{22} - p_{12}p_{22} & 2p_{12} - p_{22}^2 \end{bmatrix} = 0$$

となる。これから次の方程式を得る。

$$\begin{cases} 1 - 2p_{12} - p_{12}^2 = 0 & (1) \\ 2p_{12} - p_{22}^2 = 0 & (2) \\ p_{11} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) 式の 2 次方程式の解の一つとして次を選ぶ。

$$p_{12} = \sqrt{2} - 1$$

これを (2) 式に代入して、(2) 式の解として次を選ぶ。

$$p_{22} = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$$

これらを (3) 式に代入すると次式を得る。

$$p_{11} = p_{22} + p_{12}p_{22} = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$$

よって、\$P\$ は次式となる。

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} \end{bmatrix}$$

P が正定行列かどうかをシルベスターの判定法により判定する.

$$p_{11} > 0$$

$$\begin{aligned} |P| &= p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = 2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}-1)^2 \\ &= 2(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

よって, P は正定行列である. 結局, F^* は次式となる.

$$F^* = B'P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \end{bmatrix}$$

第11章 オブザーバ

オブザーバ (observer) とは，入出力信号と数学モデルから状態を推定する機構である．状態フィードバック制御において状態が直接測定できない場合，オブザーバで推定した状態を利用することになる．

11.1 オブザーバを用いない状態推定法

オブザーバを紹介する前に，誤った状態推定法を二例紹介し，それらが機能しない理由を説明する．

a. 入出力信号の微分値を用いる方法 簡単のため，3次系を考える．系は可観測とし，可観測正準形

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= -a_0 z_3 + b_0 u \\ \dot{z}_2 &= z_1 - a_1 z_3 + b_1 u \\ \dot{z}_3 &= z_2 - a_2 z_3 + b_2 u \\ y &= z_3 \end{cases}$$

で考える． z_3 は y の観測から得られ， z_2, z_1 は，上式から

$$\begin{aligned} z_2 &= \dot{y} + a_2 y - b_2 u \\ z_1 &= \ddot{y} + a_2 \dot{y} - b_2 \dot{u} + a_1 y - b_1 u \end{aligned}$$

と計算される．しかし，微分演算が実際上不可能なため，これらの式は利用できない．

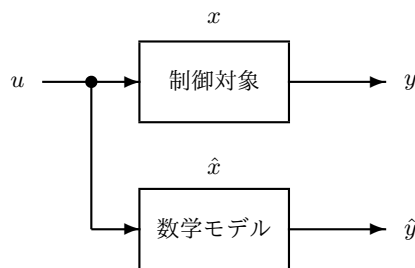


図 11.1: 制御対象の数学モデルを用いる方法

b. 制御対象の数学モデルを用いる方法 制御対象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{11.1}$$

に対する数学モデルを

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (11.2)$$

とする (図 11.1). x と \hat{x} の誤差を

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

とおくと, 式 (11.1), (11.2) から

$$\dot{e}(t) = A\{\hat{x}(t) - x(t)\} = Ae(t)$$

すなわち

$$e(t) = e^{At}e(0), \quad e(0) = \hat{x}(0) - x(0)$$

を得る. $x(0)$ は未知なので $e(0) \neq 0$ であり, $e(t)$ が残る. $e(t)$ の挙動は A に依存し, 大抵の場合, その収束性は不十分である.

11.2 同一次元オブザーバ

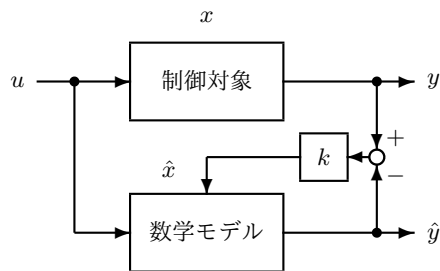


図 11.2: 同一次元オブザーバ

制御対象

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (11.3)$$

に対する数学モデルを

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

とする. そして, 次の修正を加えた数学モデルを考える (図 11.2).

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\{y(t) - \hat{y}(t)\} \\ &= (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t) \end{aligned} \quad (11.4)$$

x と \hat{x} の誤差を

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

とおくと、式(11.3), (11.4)から

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$$

を得る。すなわち、 K によって、 $e(t)$ の動特性を改善できる可能性が出てきた。実際、 $(A - KC)$ の固有値は、その転置行列 $(A^T - C^T K^T)$ の固有値に等しいので、 (A^T, C^T) が可制御、すなわち、 (C, A) が可観測ならば、 $(A^T - C^T K^T)$ に対して、9.1の極配置法を使って $(A \rightarrow A^T, B \rightarrow C^T)$ と置き換えて)指定極を実現する K を求めることができる。式(11.4)は、制御対象と同じ次元を持つので、同一次元オブザーバ(full-order observer)と呼ばれる。また、 $(A - KC)$ の固有値をオブザーバ極(observer pole)という。オブザーバ極はレギュレータ極より左に配置するのがよいとされる。

出力 y が状態の一部として得られているので、すべての状態を推定する同一次元オブザーバは冗長性を持っている。実際、 y の次元だけ次元が小さなオブザーバ(最小次元オブザーバ(minimal-order observer))を構成することができる。

式(11.3), (11.4)において、 $u(t) = -F\hat{x}$ とおくとレギュレータ・オブザーバ併合系の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ KC & A - KC - BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

を得る。また、この式に座標変換

$$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$$

を施すと

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & -BF \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

となる。よって、併合系の極は、レギュレータ極とオブザーバ極から構成され、両者は独立に設定できることがわかる。

例題 11.1 1自由度振動系で $m = 1, k = 1$ とおいた系

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

に対する同一次元オブザーバを設計せよ。ただし、オブザーバ極は $\{-4, -4\}$ とする。

[解] まず、 $(A - KC)$ の極を $\{-4, -4\}$ に配置する K を求める。

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $(A - KC)$ の特性多項式は

$$|sI - (A - KC)| = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ 1 + k_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + k_1 s + 1 + k_2$$

となる。一方，指定極の特性多項式は

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

であり，両多項式の係数の比較から

$$k_1 = 8, \quad k_2 = 15$$

すなわち

$$K = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

を得る。このように，次数が低い場合の極配置問題は，特性多項式を直接計算することによって簡単に解ける。同一次元オブザーバは，このゲインを用いて次式で与えられる。

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t)$$

11.3 演習問題

1. 系

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

に対する同一次元オブザーバを設計せよ。ただし，オブザーバ極は $\{-2, -3\}$ とする。

11.4 演習問題の解答

1. まず, $(A - KC)$ の極を $\{-2, -3\}$ に配置する K を求める.

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $(A - KC)$ の特性多項式は

$$|sI - (A - KC)| = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + k_1s + k_2$$

となる. 一方, 指定極の特性多項式は

$$(s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$$

であり, 両多項式の係数の比較から

$$k_1 = 5, \quad k_2 = 6$$

すなわち

$$K = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

を得る. 同一次元オブザーバは, このゲインを用いて次式で与えられる.

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t)$$

第12章 設計例：構造系の能動制振制御

12.1 制御対象の数学モデルと問題の記述

本章で考える 1 自由度構造系のモデルを Fig.12.1 に示す. 本モデルは, 剛体の床と線形ばねの特性を持つ側板から構成され, 床の上に AMD(active mass damper) を持つ. m , k , m_a は, それぞれ, 床の質量, 側板のばね定数, AMD の重りの質量である. q , q_a は, それぞれ, 床と重りの変位である. また, q_0 は土台の変位である. u は AMD のアクチュエータが生成する力である. エネルギー散逸力はすべて無視する.

力のつりあいから, 次の運動方程式を得る.

$$m\ddot{q} + k(q - q_0) = -u \quad (12.1)$$

$$m_a\ddot{q}_a = u \quad (12.2)$$

r を床と重りとの間の相対変位とする.

$$r = q_a - q \quad (12.3)$$

(12.2), (12.3) 式から u を求め, それを (12.1) 式へ代入することによって次式を得る.

$$(m + m_a)\ddot{q} + k(q - q_0) = -m_a\ddot{r} \quad (12.4)$$

いま

$$M = m + m_a, \quad K = k, \quad L = -m_a$$

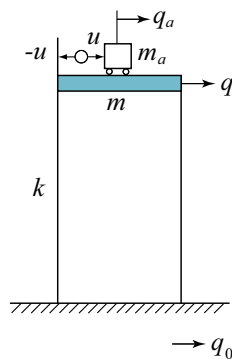


図 12.1: AMD を持つ 1 自由度構造系

とおくと, (12.4) 式は次式と書ける.

$$M\ddot{q} + Kq = L\ddot{r} + Kq_0 \quad (12.5)$$

また, r は制御入力 u を用いて, 次式で表されるように q_0 の影響を無視できるようにロバストに補償されているとする.

$$\ddot{r} = v \quad (12.6)$$

ここで, v は新しい入力である.

(12.5), (12.6) 式から, 構造系の運動方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= v \\ \ddot{q} &= -\frac{K}{M}q + \frac{L}{M}v + \frac{K}{M}q_0 \end{aligned} \quad (12.7)$$

制御対象のパラメータは, 制御工学研究室にある構造系制振実験装置のパラメータを使用する. すなわち

$$m = 1 \text{ kg}, \quad m_a = 0.34 \text{ kg}, \quad k = 73 \text{ N/m}$$

問題は, 構造系の振動を効果的に抑制する AMD の制御則 $v = f(x)$ を求めることである.

12.2 設計法

制御則の設計に必要な状態方程式を求める.

状態 x を次式で定義する.

$$x := \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

このとき, (12.7) 式は次の状態方程式で表される.

$$\dot{x} = Ax + Bv + B_dq_0 \quad (12.9)$$

$$r = C_r x$$

$$q = C_q x$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{L}{M} \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{M} \end{bmatrix}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12.2.1 極配置法による制御則

構造系の固有振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

である。一般に、振動系では、固有振動数を変える制御は大きな入力が必要とする。また、そのような制御を行うと AMD の重りの振幅も大きくなる。入力を小さくする制御は、固有振動数を変えない制御であることを考慮し、閉ループ系の固有値を次のように与える。

$$\left\{ -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, -\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2} \right\}, \quad \zeta > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$

T_1, T_2 は次の方針によって選定する。

- T_1 は AMD のアクチュエータが許す範囲で小さく与える。
- $T_2 = 1/\epsilon$ と与える。ただし、 ϵ は小さな正数である。

この設計法は、 $q(s)/q_0(s)$ (振動絶縁) がスカイフックダンパーで制振された場合の伝達関数を近似するという観点から得られた。

12.2.2 最適レギュレータによる制御則

土台の振動 (q_0) による構造物の振動 (q) を小さくしたいとき (振動絶縁), q^2 に大きな重み係数 (ρ) を設定した次の評価関数に対する最適レギュレータが有効であるとされる。

$$J = \int_0^{\infty} \{x(t)^T Q x(t) + u(t)^2\} dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad \rho \gg \epsilon > 0$$

12.2.3 AMD の振幅を小さくする制振制御則

閉ループ極を次のように指定すれば、AMD の振幅を小さく抑えた制振制御則 (インパルス外乱に対する制振) となることが知られている。

$$\left\{ -\omega_n, -\omega_n, -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T} \right\}, \quad T > 0$$

ただし、 T は AMD のアクチュエータが許す範囲で小さく与える。

12.3 数値結果

(1) 極配置法による制御則

次のパラメータを与えた.

$$\zeta = 1, \quad T_1 = 0.2 \text{ s}, \quad T_2 = \frac{10}{\omega_n} = \frac{10}{7.381} = 1.355 \text{ s}$$

次の制御則を得た.

$$v = -Fx, \quad F = \begin{bmatrix} 3.690 & 6.738 & -333.8 & -54.23 \end{bmatrix}$$

q_0 から q までの伝達関数 G_{qq_0} およびその極と零点は次のとおりである.

$$G_{qq_0} = C_q \{sI - (A - BF)\}^{-1} B_d = \frac{54.48s^2 + 367.1s + 201.0}{s^4 + 20.5s^3 + 142.9s^2 + 367.1s + 201}$$

$$\text{極} \{-7.381, -7.381, -5, -0.7381\}$$

$$\text{零点} \{-6.137, -0.601\}$$

(2) 最適レギュレータによる制御則

次のパラメータを与えた.

$$\epsilon = 10, \quad \rho = 2000$$

次の制御則を得た.

$$v = -Fx, \quad F = \begin{bmatrix} 3.162 & 3.088 & -109.0 & -42.21 \end{bmatrix}$$

G_{qq_0} およびその極と零点は次のとおりである.

$$G_{qq_0} = C_q \{sI - (A - BF)\}^{-1} B_d = \frac{54.48s^2 + 168.2s + 172.2}{s^4 + 13.80s^3 + 85.30s^2 + 168.2s + 172.3}$$

$$\text{極} \{-5.687 \pm j4.714, -1.213 \pm j1.299\}$$

$$\text{零点} \{-1.544 \pm j0.8823\}$$

(3) AMD の振幅を小さくする制振制御則

次のパラメータを与えた.

$$T = 0.2 \text{ s}$$

次の制御則を得た.

$$v = -Fx, \quad F = \begin{bmatrix} 25 & 16.77 & -581.8 & -31.48 \end{bmatrix}$$

G_{qq_0} およびその極と零点は次のとおりである.

$$G_{qq_0} = C_q \{sI - (A - BF)\}^{-1} B_d = \frac{54.48s^2 + 913.8s + 1362}{s^4 + 24.76s^3 + 227.1s^2 + 913.8s + 1362}$$

$$\text{極} \{-7.381, -7.381, -5, -5\}$$

$$\text{零点} \{-15.12, -1.653\}$$

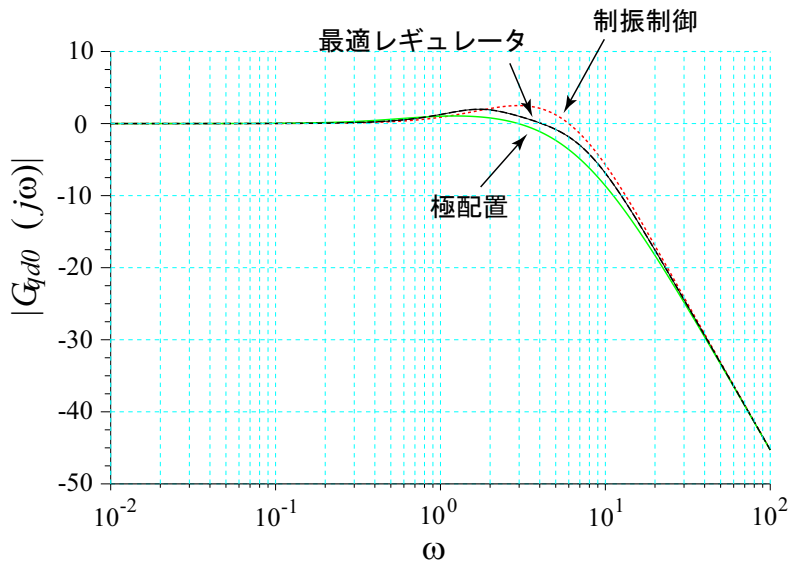


図 12.2: $G_{qd0}(s)$ のボード線図

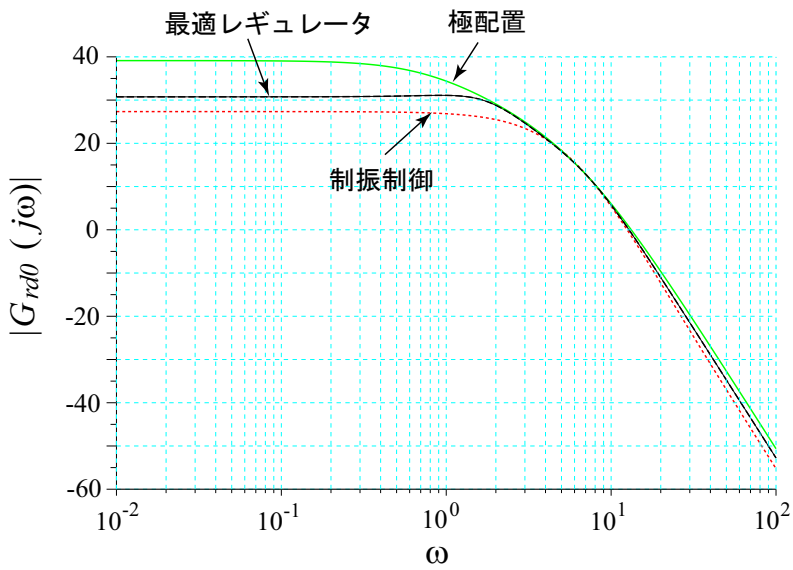


図 12.3: $G_{rd0}(s)$ のボード線図

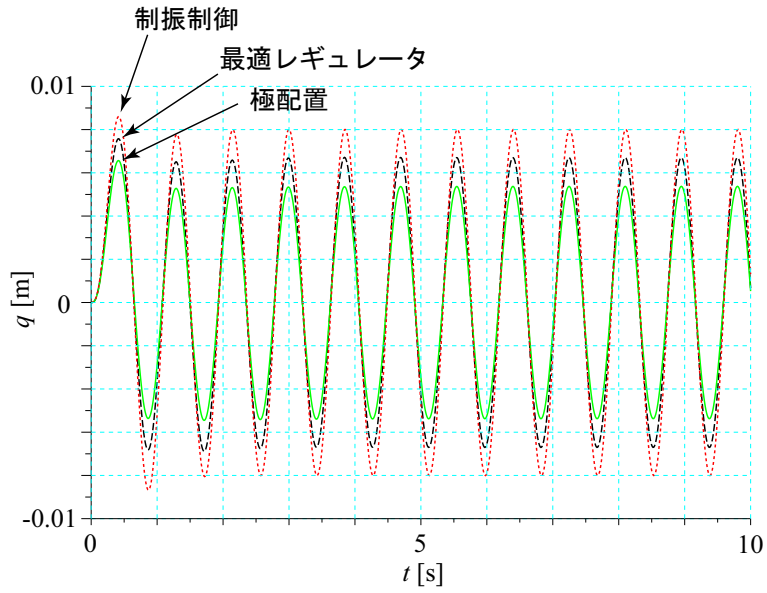


図 12.4: $q_0 = 0.01 \sin \omega_n t$ に対する q の周波数応答

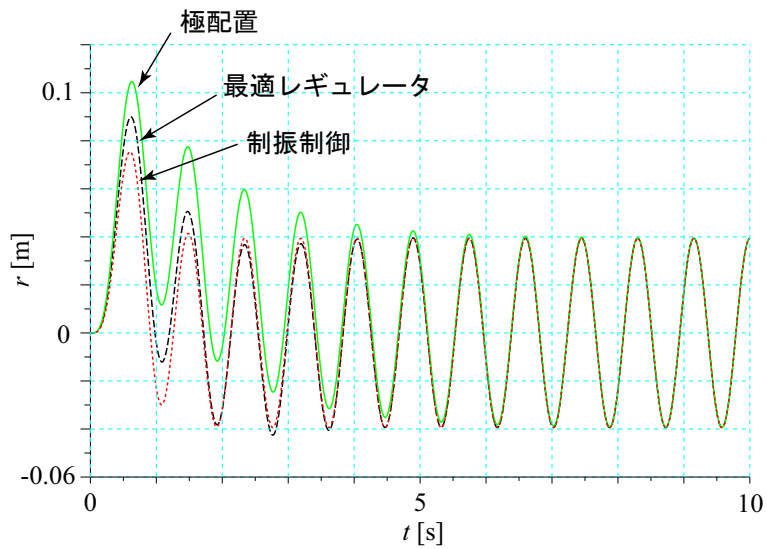
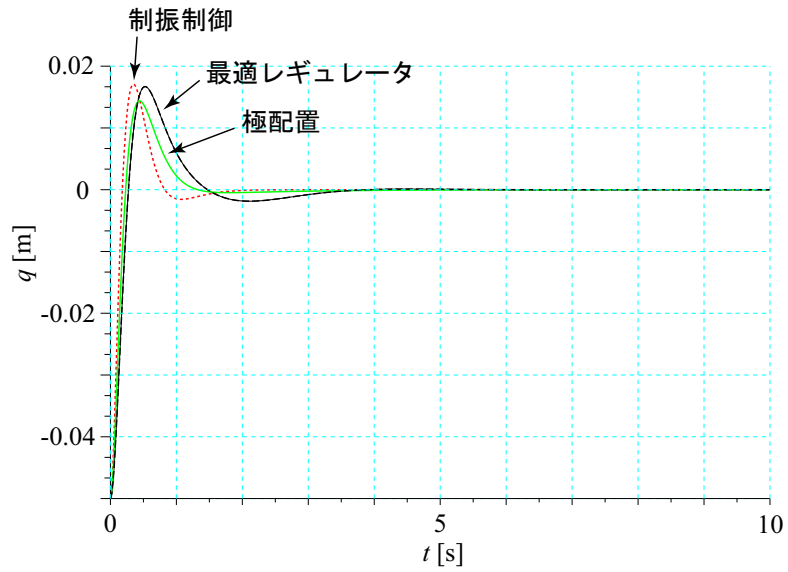
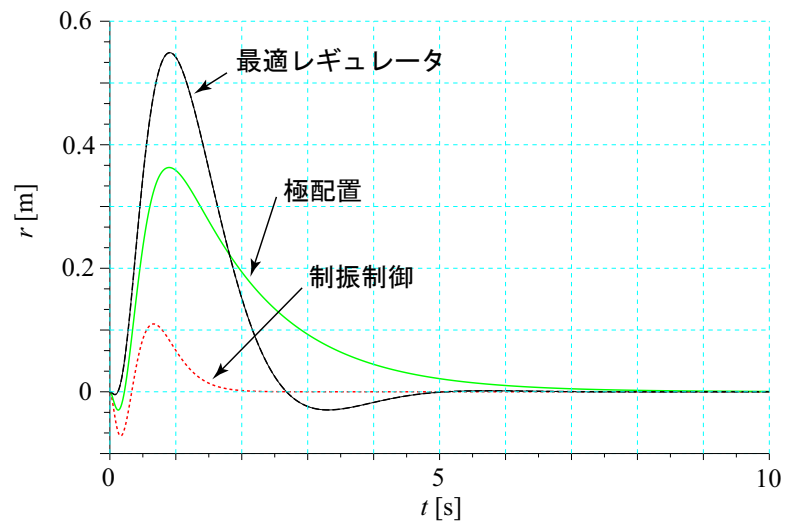


図 12.5: $q_0 = 0.01 \sin \omega_n t$ に対する r の周波数応答

図 12.6: $q(0) = -0.05$ m に対する q の初期値応答図 12.7: $q(0) = -0.05$ m に対する r の初期値応答

第13章 設計例：ボールビーム系の位置決め制御

13.1 制御対象の数学モデルと問題の記述

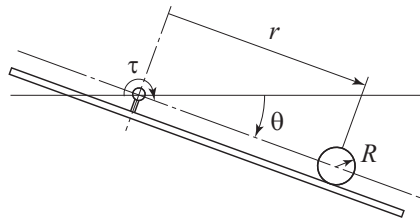


図 13.1: ボールビーム系

ボールビーム系を Fig.13.1 に示す。これは、ボールがビーム上に置かれ、ビームの角度を変えることによって、ボールの位置制御を行うという実験装置である。ボール・ビーム系の制御問題は、制御工学におけるベンチマーク問題の一つである。ボールとビームは常に接触し、ボールはビーム上を滑ることなく回転するものと仮定する。また、転がり摩擦は無視する。各記号の意味は以下のとおりである。

- $\theta(t)$: ビームの角変位 [rad]
- $r(t)$: 支点から測ったボールの位置 [m]
- $\tau(t)$: ビームに作用するトルク（操作量） [Nm]
- J : ビームの慣性モーメント [kgm^2]
- M : ボールの質量 [kg]
- J_b : ボールの慣性モーメント [kgm^2] ($\frac{2}{5}MR^2$)
- R : ボールの半径 [m]
- g : 重力加速度 [m/s^2]

ボールビーム系の運動方程式は次式で表される。

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + M\right)\ddot{r} - Mg \sin \theta - Mr\dot{\theta}^2 = 0 \quad (13.1)$$

$$(Mr^2 + J + J_b)\ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} - Mgr \cos \theta = \tau \quad (13.2)$$

次式の τ を用いて (13.2) 式を線形化する。 u は線形化後の入力である。

$$\tau = (Mr^2 + J + J_b)u + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} - Mgr \cos \theta$$

さらに, (13.1) 式を $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ で線形近似し

$$M_0 := \frac{M}{\frac{J_b}{R^2} + M} = \frac{5}{7}$$

とおくと次式を得る.

$$\ddot{\theta} = u \quad (13.3)$$

$$\ddot{r} = M_0 g \theta \quad (13.4)$$

問題は, ボールを目標位置に速やかに移動させ, そこで系を漸近安定化させることである.

13.2 設計法

(13.3), (13.4) 式から

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}, \quad \frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{M_0 g}{s^2} \quad (13.5)$$

を得る. また, ボールの位置 $r(t)$ を目標値 r_f に定常偏差なく制御するため, $r_f - r$ を入力とする積分器を追加する. 以上から, Fig.13.2 のブロック線図を得る.

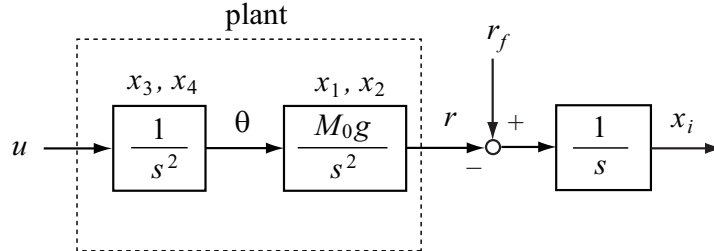


図 13.2: ブロック線図

制御対象の状態を x_p , 積分器の状態を x_i とする. x_p を

$$x_p = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (13.6)$$

と定義すると, 制御対象の状態方程式は次式で表される.

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (13.7)$$

$$r = C_r x_p \quad (13.8)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

一方, x_i に対する状態方程式は次式となる。

$$\dot{x}_i = r_f - r = -C_r x_p + r_f \quad (13.9)$$

x_p と x_i を合わせて拡大系の状態を

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_i \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

と定義すると, 拡大系は次式で表される。

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_0 r_f \quad (13.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_r & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(13.11) 式に極配置法または最適レギュレータ法を適用して, 安定化制御

$$u = -Fx \quad (13.12)$$

を計算する。 F を $F = \begin{bmatrix} F_p & F_i \end{bmatrix}$ と分割すると, 上式は

$$u = -F_p x_p - F_i x_i \quad (13.13)$$

と表現できる。

実際の装置では r と θ を出力信号として計測できるが, \dot{r} と $\dot{\theta}$ は計測できない。よって, x_p の代わりに次式のオブザーバで推定した状態 \hat{x}_p を用いる。

$$\dot{\hat{x}}_p = (A_p - KC_p)\hat{x}_p + B_p u + Ky \quad (13.14)$$

$$u = -F_p \hat{x}_p - F_i x_i, \quad y = C_p x_p = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

13.3 数値結果

13.3.1 極配置法

極配置法により, レギュレータゲイン F とオブザーバゲイン K を求めた。

レギュレータ極: $\{-\mu_1, -\mu_1, -\mu_1, -\mu_1, -\mu_1\}$, $\mu_1 = 2.5$

$$F = \begin{bmatrix} 27.88 & 22.31 & 62.5 & 12.5 & -13.94 \end{bmatrix}$$

$$F_p = \begin{bmatrix} 27.88 & 22.31 & 62.5 & 12.5 \end{bmatrix}, \quad F_i = -13.94$$

オブザーバ極: $\{-\mu_2, -\mu_2, -\mu_2, -\mu_2, -\mu_2\}$, $\mu_2 = 10$

$$K = \begin{bmatrix} 20.0 & 0 \\ 100.0 & 7.005 \\ 0.0 & 20.0 \\ 0.0 & 100.0 \end{bmatrix}$$

13.3.2 最適レギュレータ法

最適レギュレータ法により、レギュレータゲイン F を求めた。オブザーバゲインは極配置法によるものと同じものを用いた。

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u(t)^2\} dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 11.48 & 8.619 & 27.20 & 7.375 & -7.071 \end{bmatrix}$$

$$F_p = \begin{bmatrix} 11.48 & 8.619 & 27.20 & 7.375 \end{bmatrix}, \quad F_i = -7.0711$$

数値シミュレーション結果を Fig.13.3, Fig.13.4 に示す。シミュレーションの条件は以下のとおりである。

$$r_f = 0.2[\text{m}], \quad x(0) = 0, \quad \hat{x}_p(0) = 0$$

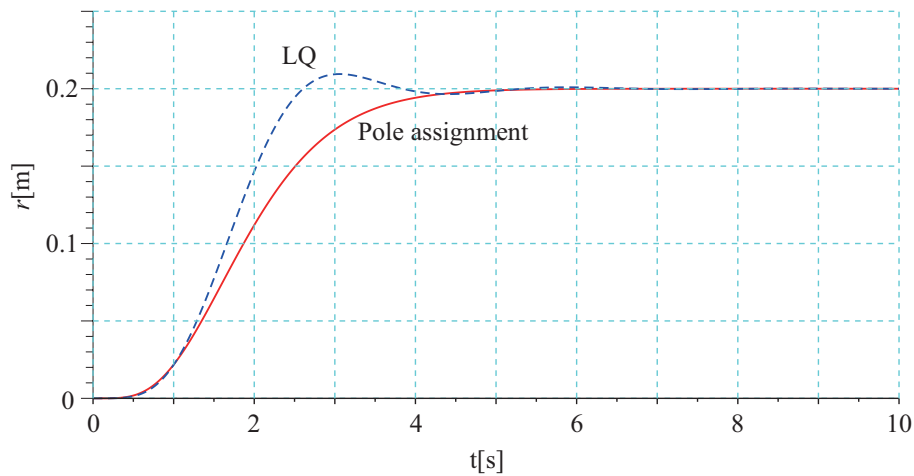


図 13.3: シミュレーション結果

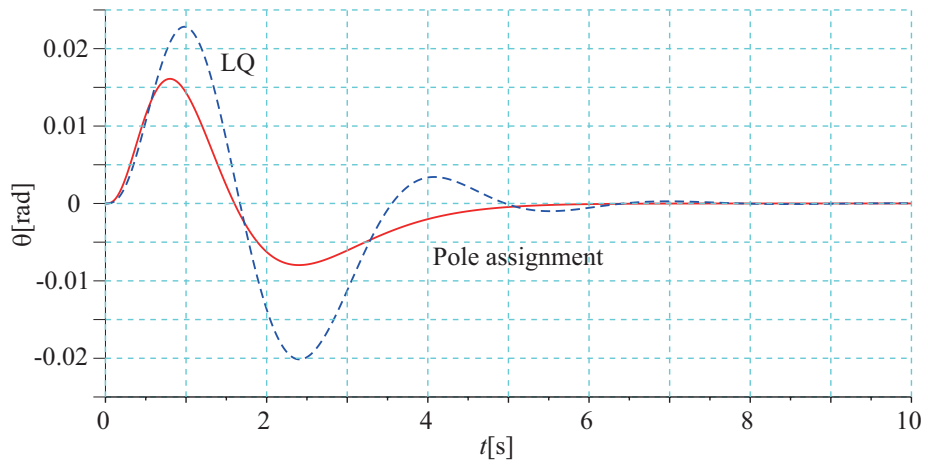


図 13.4: シミュレーション結果

第14章 設計例：クレーン系の搬送制御

14.1 制御対象の数学モデルと問題の記述

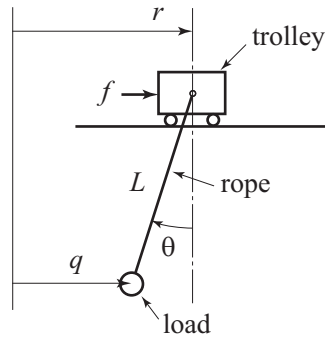


図 14.1: クレーン系

本章で考えるクレーン系のモデルを図 14.1 に示す. 本モデルは, 平面を移動する台車 (トロリ) に振り子 (ロープで吊られた荷) が取り付けられた構造を持つ. r , q , θ はそれぞれ基準点から測定した台車の位置, 荷の位置, 荷の振れ角である. L は振り子の等価振り子長であり, f は台車の駆動力である. クレーン系の線形化運動方程式は次式で表される.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta + \frac{1}{L}\ddot{r} \quad (14.1)$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{T}(u - \dot{r}) \quad (14.2)$$

台車駆動系は f を用いて速度および位置フィードバック補償されている. u は補償後の入力である. $T > 0$ は設計パラメータで, 駆動系のバンド幅の範囲でできるだけ小さく与える.

いま, 変数

$$q = r - L\theta \quad (14.3)$$

を定義し, これを t で 2 回微分すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \ddot{r} - L\ddot{\theta} = g\theta = -\frac{g}{L}q + \frac{g}{L}r \\ &= -\omega_n^2 q + \omega_n^2 r \end{aligned} \quad (14.4)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ここで, (14.1), (14.3) 式を用いた.

問題は, 荷の振れ角を小さく抑えながら, 荷を速やかに目標位置 r_f に搬送し, そこで系を漸近安定化させる制御則を求めることである. 一般性を失うことなく, $r_f = 0$ とする.

14.2 設計法

(14.4), (14.2) 式から, 次式を得る。

$$\frac{q(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \quad (14.5)$$

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(Ts + 1)} \quad (14.6)$$

以上から, 図 14.2 のブロック線図を得る。

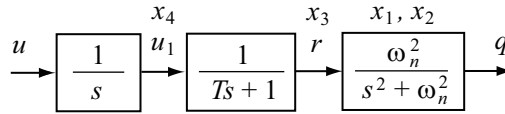


図 14.2: クレーン系のブロック線図

状態を

$$x = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r & u_1 \end{bmatrix}'$$

と定義すると, (14.5), (14.6) 式は次の状態方程式で表される。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14.7)$$

$$q = Cx \quad (14.8)$$

ただし

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_n^2 & 0 & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} & \frac{1}{T} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

座標変換

$$z = S_0 x \quad (14.9)$$

によって, (14.7) 式を次式とする。

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (14.10)$$

ただし

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} I_3 & X_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X_0 はシルベスター方程式

$$-A_{11}X_0 + X_0A_{22} + A_{12} = 0$$

の解である (A_{11} と A_{22} が同一固有値を持たないとき, シルベスター方程式は一意解を持つ)。

次に, A_{11} の固有値 $\{-\frac{1}{T}, \pm j\omega_n\}$ を制御入力を小さくする (荷の振れ角を小さくする) 極配置として知られているもの $\{-\frac{1}{T}, -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\}$, $0 < \zeta \leq 1$ に配置する部分状態フィードバック制御を施す。 ζ は設計パラメータである。 $\zeta \rightarrow 0$ のとき制御入力はより小さくなるが, 減衰の小さいモードが応答に現れる。

$$u = \begin{bmatrix} -F_1 & 0 \end{bmatrix} z + v$$

このとき, 状態方程式は

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} - \bar{B}_1 F_1 & 0 \\ -\bar{B}_2 F_1 & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} v \quad (14.11)$$

となる。

そして, 座標変換

$$w = S_1 z$$

により, 上式をブロック対角化する。

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} A_{11} - \bar{B}_1 F_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} v \quad (14.12)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ X_1 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし, X_1 は次のシルベスター方程式の解である。

$$-A_{22}X_1 + X_1(A_{11} - \bar{B}_1 F_1) - \bar{B}_2 F_1 = 0$$

状態 w を

$$w = \begin{bmatrix} w_s \\ w_u \end{bmatrix}$$

と分割する。系は次のように分解された。

$$\dot{w}_s = (A_{11} - \bar{B}_1 F_1)w_s + \tilde{B}_1 v \quad (14.13)$$

$$\dot{w}_u = A_{22}w_u + \tilde{B}_2v \quad (14.14)$$

w_s 部分系は漸近安定であり、 w_u 部分系は不安定である。

$|v|$ を小さくすると $|\theta|$ も小さくなる傾向がある。

以上から、問題の解は、次のより簡単な1次系の安定化問題を解くことによって得られる。

「(14.14) 式の系を安定化する制御則 $v = f(w_u)$ を求めよ。」

この問題の一つの解は次式で与えられる。ただし、 k は正の定数である。

$$v = -\frac{k}{\tilde{B}_2}w_u \quad (14.15)$$

これは w_u 部分系の固有値（極）0 を $-k$ に移動する制御である。

$r_f \neq 0$ のとき、 v の計算式で x を

$$x = \begin{bmatrix} r_f \\ 0 \\ r_f \\ r_f \end{bmatrix} \quad (14.16)$$

と置けばよい。

r と θ はセンサーによって計測可能、すなわち、 q も計測可能とする。 u_1 も計測可能とする。 \dot{q} は計測しないので、 $\frac{q(s)}{r(s)}$ 部分系に対するオブザーバにより推定する。このオブザーバの設計法は以下のとおりである。

$\frac{q(s)}{r(s)}$ 部分系の状態空間表現は次式である。

$$\dot{x}_o = A_o x_o + B_o r, \quad x_o = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

$$q = C_o x_o \quad (14.18)$$

ただし

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この部分系に対するオブザーバは次式で与えられる。

$$\dot{\hat{x}}_o = (A_o - KC_o)\hat{x}_o + B_o r + Kq \quad (14.19)$$

K は $A_o - KC_o$ を安定行列にするオブザーバゲインである。

14.2.1 制御則の計算アルゴリズム

上記で得られた制御則 $v(t)$ の計算法を以下にまとめる。

1. 時刻 t における計測データ r , θ , u_1 およびオブザーバにより状態 $x(t)$ の推定 $\hat{x}(t)$ を計算する。

2. u を次式で計算する。

$$u = \begin{bmatrix} -F_1 & 0 \end{bmatrix} S_0 \left(\hat{x} - \begin{bmatrix} r_f \\ 0 \\ r_f \\ r_f \end{bmatrix} \right) + v$$

$$v = -\frac{k}{\tilde{B}_2} \hat{w}_u$$

ただし、 \hat{w}_u は

$$\hat{w} = S_1 S_0 \left(\hat{x} - \begin{bmatrix} r_f \\ 0 \\ r_f \\ r_f \end{bmatrix} \right)$$

の第 4 要素であり、 k は正の定数である。

14.2.2 IMC 制御系の構成法

上記の制御則は積分特性を持たないため、外乱や状態推定誤差によって台車の位置 r に偏差が発生する可能性がある。一方、飽和制御と積分器の組み合わせでリセットウィンドアップが生じることが知られている。この問題点を改善するため、IMC 構造を導入してコントローラに積分特性を持たせる方法を採用する。

上記の制御系で入力を r_f 、出力を r としたときの入出力関係を

$$r = P(r_f) \tag{14.20}$$

と表し、図 14.3 の IMC 制御系を構成する。 P_M は P のモデルであり、 $C_0(s)$ は安定な伝達関数（フィルタ）である。平衡点近くでコントローラ C が積分特性を持つように、 $C_0(0) = 1$ とする。実際、このとき、 $P_M(0) = 1$ から

$$C_0(0)P_M(0) = 1 \tag{14.21}$$

となり、コントローラは積分特性を持つ。

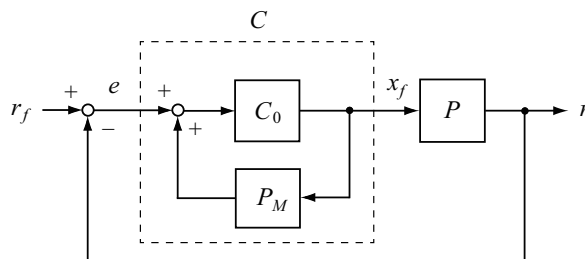


図 14.3: IMC 制御系のブロック線図

N を振幅 v_{max} で飽和させる飽和要素とし、 C_0 を図 14.4 に示すように構成すれば、 P に与える目標関数の速度が制限されるので、 $|\dot{r}|$ の上限も小さくできる。 T_f はフィルタの時定数であり、 $N = 1$ のとき $C_0 = \frac{1}{T_f s + 1}$ となる。

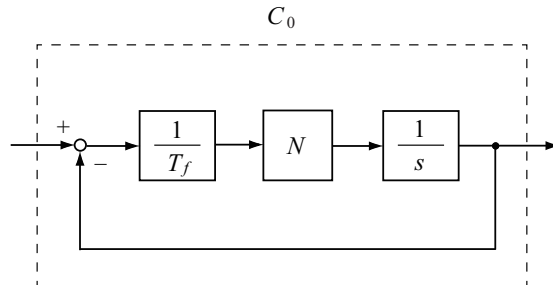


図 14.4: IMC フィルタのブロック線図

14.3 数値結果

制御対象のパラメータは以下である。

$$L = 0.55 \text{ m}, \quad \omega_n = 4.223 \text{ rad/s}$$

制御則のパラメータは次のように与えた。

$$T = 0.2 \text{ s}, \quad \zeta = 0.3, \quad k = 1$$

$$T_f = 0.2 \text{ s}, \quad v_{max} = 0.1 \text{ m/s or } 0.05 \text{ m/s}$$

数値シミュレーション結果を図 14.5, 図 14.6 に示す。シミュレーションの条件は以下のとおりである。

$$r_f = 0.5 \text{ m}, \quad x(0) = 0$$

また、プラントの入力 u に外乱 $d = 0.05$ を加えた場合のシミュレーション結果を図 14.7, 図 14.8 に示す。これらから、IMC フィードバック制御の効果がわかる。

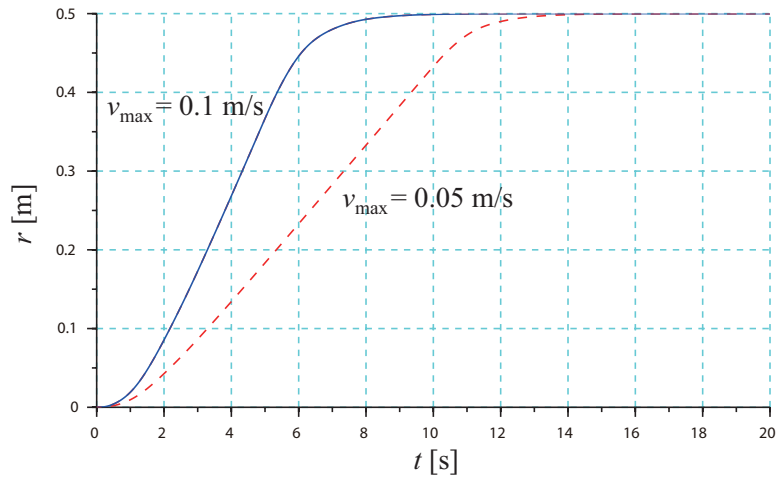


図 14.5: シミュレーション結果

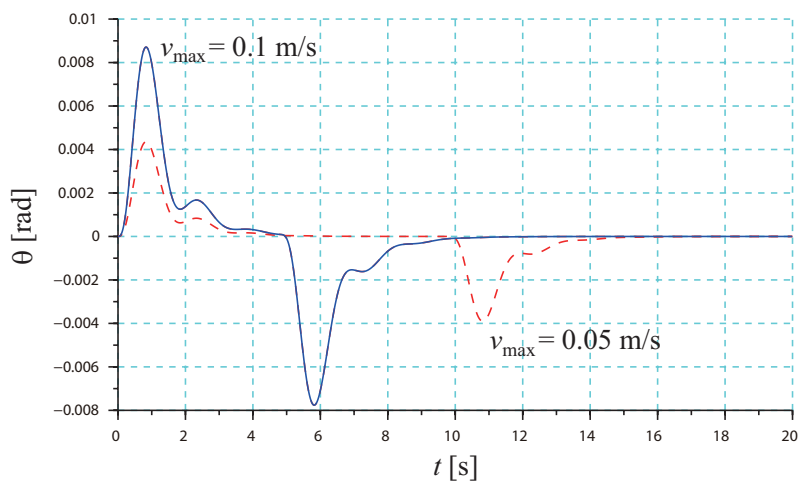


図 14.6: シミュレーション結果

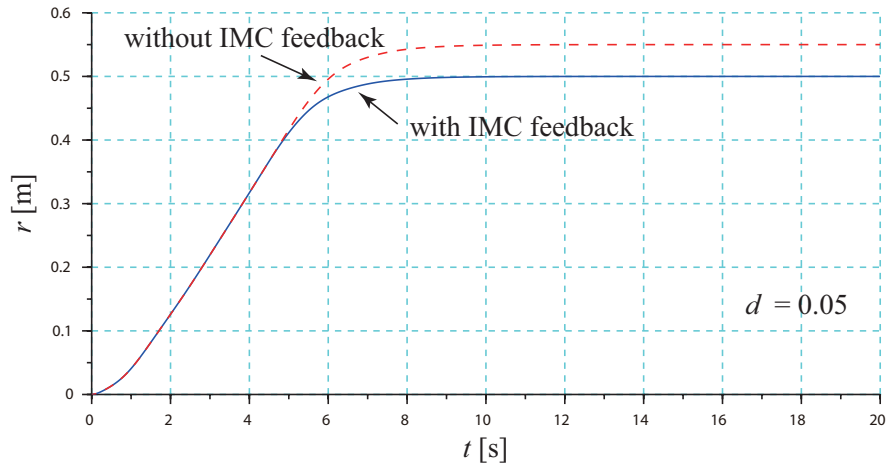


図 14.7: シミュレーション結果

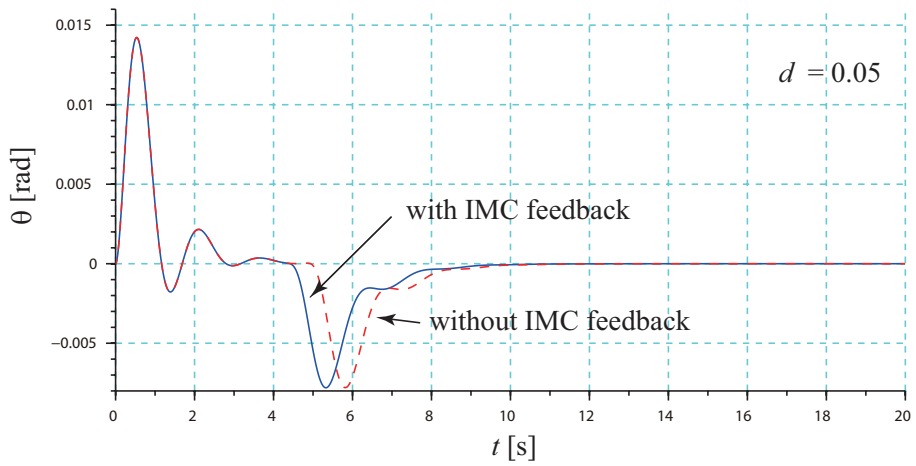


図 14.8: シミュレーション結果

関連図書

- [1] 小郷, 美多, システム制御理論入門, 実教出版, 1979.
- [2] 中野 道雄, 美多 勉, 制御基礎理論-古典から現代まで-, 昭晃堂, 1982.
- [3] 奥山 佳史ほか, 制御工学-古典から現代まで-, 朝倉書店, 2001.
- [4] 森 泰親, 制御工学, コロナ社, 2001.
- [5] 吉田 和信, Matlab/Octave による制御系の設計, 科学技術出版, 2003.
- [6] 吉田 和信, システムと制御入門, 2009,
[http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/syscon\(2009\)_rev.pdf](http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/syscon(2009)_rev.pdf)
- [7] 森 泰親, わかりやすい現代制御理論, 森北出版, 2013.

制御工学 II 講義ノート

2020 年 9 月 27 日

Copyrights © 2020 吉田 和信

著者 吉田 和信

番号

氏名

1/4

1. 図1のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。 α は定数である。

- (1) ブロック線図に示すように状態を定義したときの系の状態方程式と出力方程式を求めよ。
 (2) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を求めよ。
 (3) 系が可制御となるための α の条件を求めよ。

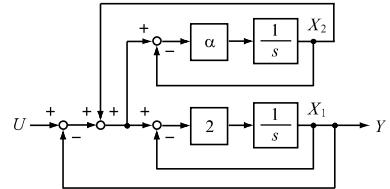


図1: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= 2(-X_1(s) + X_2(s) - X_1(s) + U(s)) \\ &= -4X_1(s) + 2X_2(s) + 2U(s) \\ sX_2(s) &= \alpha(-X_2(s) + X_2(s) - X_1(s) + U(s)) \\ &= -\alpha X_1(s) + \alpha U(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

これを時間領域で表し、さらに、ベクトル表示すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ \alpha & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 4s + 2\alpha} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -\alpha & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{2(s+\alpha)}{s^2 + 4s + 2\alpha} \end{aligned}$$

(3) 可制御性の条件

$$\begin{aligned} |M_C| &= \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8+2\alpha \\ \alpha & -2\alpha \end{vmatrix} \\ &= -4\alpha - \alpha(-8+2\alpha) = 4\alpha - 2\alpha^2 = 2\alpha(2-\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

から、 $\alpha \neq 0$ かつ $\alpha \neq 2$ を得る。

1. の続き

(4) 以下, $\alpha = 0$ とする。(1) で求めた状態方程式と出力方程式を対角正準形に変換せよ。

(5) 対角正準形から系の可制御性と可観測性を判定せよ。

(4) 状態方程式は次式となる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A の特性方程式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+4 & -2 \\ 0 & s \end{vmatrix} = (s+4)s = 0$$

よって, A の固有値は $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$ である。

$(\lambda_i I - A)v_i = 0$ から固有ベクトル v_i を求めると

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって, 座標変換行列は

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって, 対角正準形の行列は以下となる。

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(5) \tilde{B} に 0 の要素があるので, 不可制御である。

\tilde{C} に 0 の要素がないので, 可観測である。

番号

氏名

3/4

2. 図 2 のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。 α は定数である。

- (1) ブロック線図に示すように状態を定義したときの系の状態方程式と出力方程式を求めよ。
 (2) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を求めよ。
 (3) 系が安定となるための α の条件を求めよ。

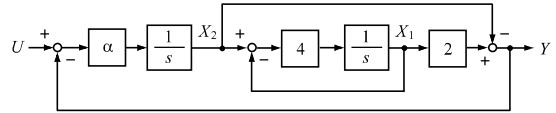


図 2: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$sX_1(s) = 4(-X_1(s) + X_2(s))$$

$$sX_2(s) = \alpha(-Y(s) + U(s)) = \alpha(-2X_1(s) + X_2(s) + U(s))$$

$$Y(s) = 2X_1(s) - X_2(s)$$

これを時間領域で表し、さらに、ベクトル表示すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2\alpha & \alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -4 \\ 2\alpha & s-\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + (4-\alpha)s + 4\alpha} \begin{bmatrix} s-\alpha & 4 \\ -2\alpha & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha(-s+4)}{s^2 + (4-\alpha)s + 4\alpha} \end{aligned}$$

(3) 系の特性方程式は、 $G(s)$ の分母 $= 0$ なので

$$s^2 + (4-\alpha)s + 4\alpha = 0$$

ラウス・フルビッツの安定判別法から、安定性条件は

$$4-\alpha > 0, \quad 4\alpha > 0$$

すなわち

$$0 < \alpha < 4$$

を得る。

2. の続き

(4) $\alpha = 0.6$ とする。 $u(t) = \mathbf{1}(t)$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ に対する応答 $y(t)$ を求めよ。

(4) $x(0) = 0$ なので, $y(t)$ の s 領域解は次式で計算できる。

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) = G(s)U(s)$$

これから

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\alpha(-s+4)}{s^2 + (4-\alpha)s + 4\alpha} \times \frac{1}{s} = \frac{0.6(-s+4)}{s^2 + 3.4s + 2.4} \times \frac{1}{s} = \frac{0.6(-s+4)}{s(s+1)(s+2.4)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{15}{7} \frac{1}{s+1} + \frac{8}{7} \frac{1}{s+2.4} \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換すると次式を得る。

$$y(t) = \left(1 - \frac{15}{7}e^{-t} + \frac{8}{7}e^{-2.4t} \right) \mathbf{1}(t)$$

番号

氏名

1/4

1. 図 1 のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。ただし、以下で、状態方程式には出力方程式も含まれる。 L は正の定数である。

- (1) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。
 (2) 系の零点と極を求めよ。
 (3) 状態をブロック線図に示すように選んだときの状態方程式を求めよ。

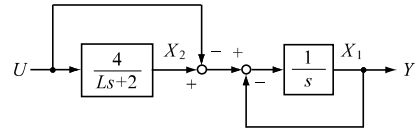


図 1: ブロック線図

- (1) ブロック線図から

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{4}{Ls+2} - 1 \right) \frac{1}{s+1} = \frac{-Ls+2}{Ls+2} \frac{1}{s+1} = \frac{-Ls+2}{(Ls+2)(s+1)}$$

- (2) 零点: 伝達関数の分子 $= -Ls+2=0$ の根として $\frac{2}{L}$
 極: 伝達関数の分母 $= (Ls+2)(s+1)=0$ の根として $-\frac{2}{L}$, -1 と求まる。

- (3) ブロック線図から

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{4}{Ls+2}$$

これを变形すると

$$(Ls+2)X_2(s) = 4U(s)$$

時間領域に直して整理すると

$$\dot{x}_2 = -\frac{2}{L}x_2 + \frac{4}{L}u \tag{1}$$

また、ブロック線図から \dot{x}_1 は次式とかけらる。

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - u \tag{2}$$

- ①, ②式から次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{4}{L} \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

1. の続き

(4) (3) の状態方程式を可制御正準形 (状態を z とする) に変換する座標変換行列 T ($x = Tz$) とその逆行列 T^{-1} を求めよ。

(4) A 行列の特性多項式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s + \frac{2}{L} \end{vmatrix} = (s+1) \left(s + \frac{2}{L} \right) = s^2 + \left(1 + \frac{2}{L} \right) s + \frac{2}{L}$$

可制御性行列は

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 + \frac{4}{L} \\ \frac{4}{L} & -\frac{8}{L^2} \end{bmatrix}$$

これらから、変換行列は次式となる。

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} -1 & 1 + \frac{4}{L} \\ \frac{4}{L} & -\frac{8}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{L} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & -1 \\ \frac{4}{L} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

また T^{-1} は次式と計算される。

$$T^{-1} = \frac{L^2}{8 + 4L} \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & 1 \\ -\frac{4}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix}$$

番号

氏名

3/4

1. の続き

(5) 系の可制御正準形 (状態を z とする) を求め, 対応するブロック線図を描け。

(5) 系の伝達関数から直接求めることができる。

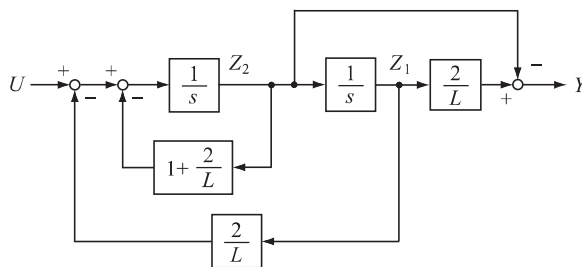
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-Ls + 2}{(Ls + 2)(s + 1)} = \frac{-s + \frac{2}{L}}{s^2 + (1 + \frac{2}{L})s + \frac{2}{L}}$$

これから

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{L} & -1 - \frac{2}{L} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & -1 \end{bmatrix} z$$

上式をブロック線図で表すと下図となる。



1. の続き

(6) 極配置法を用いて安定化制御則 $u = -Fx$ の F を求めよ。ただし、指定極は $\{-\frac{2}{L}, -2\}$ とする。

(6) A 行列の特性多項式は

$$|sI - A| = s^2 + \left(1 + \frac{2}{L}\right)s + \frac{2}{L}$$

指定極の特性多項式は

$$\left(s + \frac{2}{L}\right)(s + 2) = s^2 + \left(2 + \frac{2}{L}\right)s + \frac{4}{L}$$

よって、 F は次式となる。

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F}T^{-1} = \left[\frac{4}{L} - \frac{2}{L} \quad 2 + \frac{2}{L} - \left(1 + \frac{2}{L}\right) \right] T^{-1} \\ &= \left[\frac{2}{L} \quad 1 \right] \frac{L^2}{8 + 4L} \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & 1 \\ -\frac{4}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2 + L} \begin{bmatrix} 2 - L & L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. 図1のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。 α は定数である。
- (1) ブロック線図に示すように状態を定義したときの系の状態方程式と出力方程式を求めよ。
 - (2) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を求めよ。
 - (3) 系が可制御となるための α の条件を求めよ。

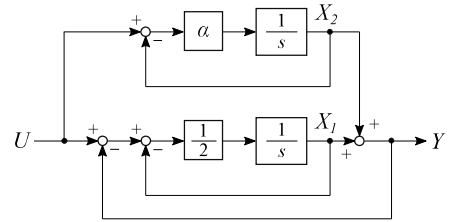


図1: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$\begin{aligned}
 sX_1(s) &= \frac{1}{2}(-X_1(s) - (X_1(s) + X_2(s)) + U(s)) \\
 &= -X_1(s) - \frac{1}{2}X_2(s) + \frac{1}{2}U(s) \\
 sX_2(s) &= \alpha(U(s) - X_2(s)) \\
 &= -\alpha X_2(s) + \alpha U(s)
 \end{aligned}$$

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

これを時間領域で表し、さらに、ベクトル表示すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \alpha \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & \frac{1}{2} \\ 0 & s+\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \alpha \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s+\alpha & -\frac{1}{2} \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{(\frac{1}{2} + \alpha)s + \alpha}{(s+1)(s+\alpha)}
 \end{aligned}$$

(3) 可制御性の条件

$$\begin{aligned}
 |MC| &= \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(1+\alpha) \\ \alpha & -\alpha^2 \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha) = \frac{1}{2}\alpha \neq 0
 \end{aligned}$$

から、 $\alpha \neq 0$ を得る。

1. の続き

(4) 以下, $\alpha = \frac{1}{2}$ とする。(1) で求めた状態方程式と出力方程式を対角正準形に変換せよ。

(5) 対角正準形から系の可制御性と可観測性を判定せよ。

(4) 状態方程式は次式となる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

A の特性方程式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & \frac{1}{2} \\ 0 & s+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (s+1) \left(s+\frac{1}{2} \right) = 0$$

よって, A の固有値は $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ である。

$(\lambda_i I - A)v_i = 0$ から固有ベクトル v_i を求めると

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって, 座標変換行列は

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって, 対角正準形の行列は以下となる。

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) \tilde{B} に 0 の要素がないので, 可制御である。

\tilde{C} に 0 の要素があるので, 不可観測である。

番号

氏名

3/4

2. 図 2 のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。 α , λ_1 , λ_2 は定数である。
- (1) ブロック線図に示すように状態を定義したときの系の状態方程式と出力方程式を求めよ。
 - (2) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を求めよ。
 - (3) 系が可観測となるための α の条件を求めよ。

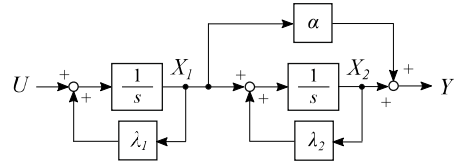


図 2: ブロック線図

- (1) ブロック線図から

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= \lambda_1 X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) &= X_1(s) + \lambda_2 X_2(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = \alpha X_1(s) + X_2(s)$$

これを時間領域で表し、さらに、ベクトル表示すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- (2)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & 0 \\ -1 & s - \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \begin{bmatrix} s - \lambda_2 & 0 \\ 1 & s - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha s + 1 - \alpha \lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \end{aligned}$$

- (3) 可観測性の条件

$$|M_O| = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha \lambda_1 + 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \alpha \lambda_2 - (\alpha \lambda_1 + 1) = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1) - 1 \neq 0$$

から、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき $\alpha \neq \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ で可観測となり、 $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき任意の α で可観測となる。

2. の続き

(4) $\alpha = 1$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ とする。 $u(t) = \mathbf{1}(t)$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ に対する応答 $y(t)$ を求めよ。

(4) $x(0) = 0$ なので, $y(t)$ の s 領域解は次式で計算できる。

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) = G(s)U(s)$$

これから

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)(s+1)} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

これを逆ラプラス変換すると次式を得る。

$$y(t) = (1 - e^{-t}) \mathbf{1}(t)$$

番号

氏名

1/4

1. 図1のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。ただし、以下で、状態方程式には出力方程式も含まれる。 ω は正の定数である。

(1) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

(2) $G(s)$ の極を求めよ。

(3) 状態 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ をブロック線図に示すように選んだときの状態方程式を求めよ。

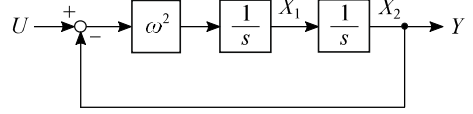


図 1: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{\omega^2}{s^2}}{1 + \frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

(2) 伝達関数の分母 $= s^2 + \omega^2 = 0$ の根として $\pm j\omega$ と求まる。

(3) ブロック線図から次式を得る。

$$\dot{x}_1 = \omega^2(u - x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$y = x_2$$

これらをベクトル行列表現すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1. の続き

(4) (3) の状態方程式を可制御正準形 (状態を z とする) に変換する座標変換行列 T ($x = Tz$) とその逆行列 T^{-1} を求めよ。

(5) (3) の状態方程式の可制御正準形の行列 \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} を求めよ。

(4) A 行列の特性多項式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & \omega^2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + \omega^2$$

可制御性行列は

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

これらから、変換行列は次式となる。

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

また、 T^{-1} は次式と計算される。

$$T^{-1} = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5)

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

番号

氏名

3/4

1. の続き

(6) 極配置法を用いて安定化制御則 $u = -Fx$ の F を求めよ。ただし、指定極は $-\frac{\omega}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ とする。

(6) A 行列の特性多項式は

$$|sI - A| = s^2 + \omega^2$$

指定極の特性多項式は

$$\left(s + \frac{\omega}{\sqrt{2}} - j\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) \left(s + \frac{\omega}{\sqrt{2}} + j\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) = s^2 + \sqrt{2}\omega s + \omega^2$$

よって、 F は次式となる。

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F}T^{-1} = \begin{bmatrix} \omega^2 - \omega^2 & \sqrt{2}\omega - 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\omega} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. の続き

(7) (3) の状態 x を推定する同一次元オブザーバのオブザーバゲイン $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ を求めよ。ただし、オブザーバ極は $\{-2\omega, -2\omega\}$ とする。

(8) (3) の状態 x を推定する同一次元オブザーバの状態方程式 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y})$, $\hat{y} = C\hat{x} = \hat{x}_2$ に対応するブロック線図を示せ。

(7) オブザーバ極は次の行列の固有値である。

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 - k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

この行列の特性多項式は

$$|sI - (A - KC)| = \begin{vmatrix} s & \omega^2 + k_1 \\ -1 & s + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + k_2s + \omega^2 + k_1$$

また、指定極に対する多項式は

$$(s + 2\omega)^2 = s^2 + 4\omega s + 4\omega^2$$

これらの係数の比較から次式を得る。

$$k_1 = 3\omega^2, \quad k_2 = 4\omega$$

すなわち

$$K = \begin{bmatrix} 3\omega^2 \\ 4\omega \end{bmatrix}$$

(8) オブザーバの状態方程式

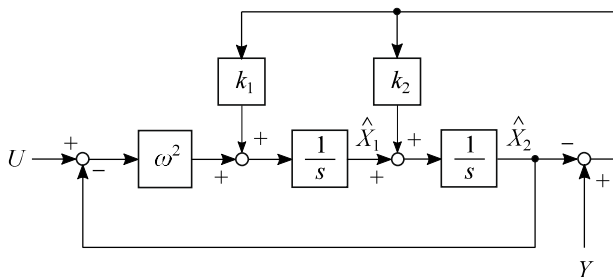
$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_2)$$

すなわち

$$\dot{\hat{x}}_1 = \omega^2(u - \hat{x}_2) + k_1(y - \hat{x}_2)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 + k_2(y - \hat{x}_2)$$

から下図を得る。



番号

氏名

1/4

1. 図1のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。 k は正の定数、 α は定数である。
- (1) ブロック線図に示すように状態を定義したときの系の状態方程式と出力方程式を求めよ。
 - (2) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を求めよ。
 - (3) 系が可制御となるための α の条件を求めよ。

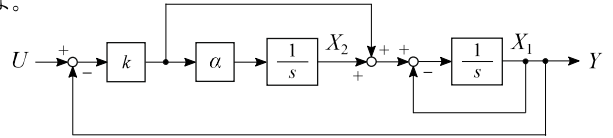


図1: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -X_1(s) + X_2(s) + k(U(s) - X_1(s)) \\ &= -(1+k)X_1(s) + X_2(s) + kU(s) \\ sX_2(s) &= \alpha k(U(s) - X_1(s)) \\ &= -\alpha kX_1(s) + \alpha kU(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

これを時間領域で表し、さらに、ベクトル表示すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -(1+k) & 1 \\ -\alpha k & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k \\ \alpha k \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1+k & -1 \\ \alpha k & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + (1+k)s + \alpha k} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\alpha k & s+1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{k(s+\alpha)}{s^2 + (1+k)s + \alpha k} \end{aligned}$$

(3) 可制御性の条件

$$\begin{aligned} |MC| &= \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & -(1+k)k + \alpha k \\ \alpha k & -\alpha k^2 \end{vmatrix} \\ &= -\alpha k^3 + (1+k)\alpha k^2 - \alpha^2 k^2 = k^2\alpha(1-\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

から、 $\alpha \neq 0$ 、 $\alpha \neq 1$ を得る。

1. の続き

(4) 以下、 $k = 2$ 、 $\alpha = 1$ とする。(1) で求めた状態方程式と出力方程式を対角正準形に変換せよ。

(5) 対角正準形から系の可制御性と可観測性を判定せよ。

(4) 状態方程式は次式となる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A の特性方程式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$$

すなわち、A の固有値は $\lambda_1 = -1$ 、 $\lambda_2 = -2$ である。

$(\lambda_i I - A)v_i = 0$ から固有ベクトル v_i を求めると

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって、座標変換行列は

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

これらから、対角正準形の行列は以下となる。

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) \tilde{B} に 0 の要素があるので、不可制御である。

\tilde{C} に 0 の要素がないので、可観測である。

番号

氏名

3/4

2. 図 2 のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。 b_0 は定数である。

(1) ブロック線図に示すように状態を定義したときの系の状態方程式と出力方程式を求めよ。

(2) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を求めよ。

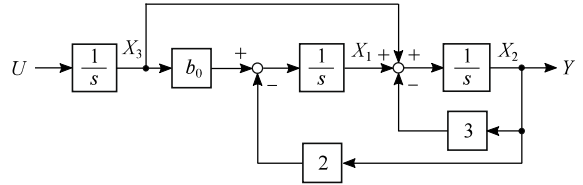


図 2: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= 2X_2(s) + b_0X_3(s) \\ sX_2(s) &= X_1(s) - 3X_2(s) + X_3(s) \\ sX_3(s) &= U(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = X_2(s)$$

これを時間領域で表し、さらに、ベクトル表示すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & b_0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 2 & -b_0 \\ -1 & s+3 & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{s(s^2 + 3s + 2)} \begin{vmatrix} s & -b_0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{s + b_0}{s(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

2. の続き

(3) 系が可観測となるための b_0 の条件を求めよ。

(4) 系が可制御となるための b_0 の条件を求めよ。

(3) 可観測性の条件

$$|M_O| = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 7 & b_0 - 3 \end{vmatrix} = -b_0 \neq 0$$

から、 $b_0 \neq 0$ のとき可観測となる。

(4) 可制御性の条件

$$\begin{aligned} |M_C| &= \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_0 & -2 \\ 0 & 1 & b_0 - 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= b_0^2 - 3b_0 + 2 = (b_0 - 1)(b_0 - 2) \neq 0 \end{aligned}$$

から、 $b_0 \neq 1$ 、 $b_0 \neq 2$ のとき可制御となる。

番号

氏名

1/4

1. 図 1 のブロック線図で表される系について以下の問いに答えよ。ただし、以下で、状態方程式には出力方程式も含まれる。 T_0 は正の定数である。

(1) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

(2) $G(s)$ の極を求めよ。

(3) 状態 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ をブロック線図に示すように選んだときの状態方程式を求めよ。

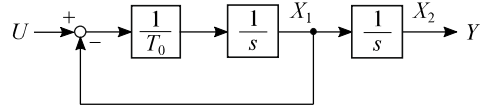


図 1: ブロック線図

(1) ブロック線図から

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{T_0 s} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{T_0 s}} = \frac{1}{s(T_0 s + 1)}$$

(2) 伝達関数の分母 $s(T_0 s + 1) = 0$ の根として $\left\{0, -\frac{1}{T_0}\right\}$ と求まる。

(3) ブロック線図から次式を得る。

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_0}(u - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$y = x_2$$

これらをベクトル行列表現すると次式を得る。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_0} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

1. の続き

(4) (3) の状態方程式を可制御正準形 (状態を z とする) に変換する座標変換行列 T ($x = Tz$) とその逆行列 T^{-1} を求めよ。

(5) (3) の状態方程式の可制御正準形の行列 \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} を求めよ。

(4) A 行列の特性多項式は

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{T_0} & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + \frac{1}{T_0}s$$

可制御性行列は

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0} & -\frac{1}{T_0^2} \\ 0 & \frac{1}{T_0} \end{bmatrix}$$

これらから、変換行列は次式となる。

$$T = M_C W = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0} & -\frac{1}{T_0^2} \\ 0 & \frac{1}{T_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_0} \\ \frac{1}{T_0} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{T_0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

また、 T^{-1} は次式と計算される。

$$T^{-1} = T_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5)

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = T_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_0} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{T_0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = T_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{T_0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_0} & 0 \end{bmatrix}$$

番号

氏名

3/4

1. の続き

(6) 極配置法を用いて安定化制御則 $u = -Fx$ の F を求めよ。ただし、指定極は $\left\{-\frac{1}{T_0}, -\omega\right\}$ とする。 ω は正の定数である。

(6) A 行列の特性多項式は

$$|sI - A| = s^2 + \frac{1}{T_0}s$$

指定極の特性多項式は

$$\left(s + \frac{1}{T_0}\right)(s + \omega) = s^2 + \left(\frac{1}{T_0} + \omega\right)s + \frac{\omega}{T_0}$$

よって、 F は次式となる。

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F}T^{-1} = \left[\frac{\omega}{T_0} - 0 \quad \frac{1}{T_0} + \omega - \frac{1}{T_0} \right] T_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega & \omega T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega T_0 & \omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. の続き

(7) (3) の状態 x を推定する同一次元オブザーバのオブザーバゲイン $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ を求めよ。ただし、オブザーバ極は $\{-\mu, -\mu\}$ とする。 μ は正の定数である。

(7) オブザーバ極は次の行列の固有値である。

$$A - KC = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_0} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_0} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_0} & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

この行列の特性多項式は

$$|sI - (A - KC)| = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{T_0} & k_1 \\ -1 & s + k_2 \end{vmatrix} = \left(s + \frac{1}{T_0}\right)(s + k_2) + k_1 = s^2 + \left(\frac{1}{T_0} + k_2\right)s + k_1 + \frac{k_2}{T_0}$$

また、指定極に対する多項式は

$$(s + \mu)^2 = s^2 + 2\mu s + \mu^2$$

これらの係数の比較から次式を得る。

$$k_1 = \mu^2 - \frac{1}{T_0} \left(2\mu - \frac{1}{T_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{T_0}\right)^2, \quad k_2 = 2\mu - \frac{1}{T_0}$$

すなわち

$$K = \begin{bmatrix} \left(\mu - \frac{1}{T_0}\right)^2 \\ 2\mu - \frac{1}{T_0} \end{bmatrix}$$