

# 台車移動幅の制限を考慮した直列および並列型二重倒立振子の安定化制御

吉田 和信\*

\* 島根大学

## Stabilizing Control for a Series- or Parallel-type Double Inverted Pendulum with Restricted Travel

Kazunobu Yoshida\*

\*Shimane University

**Abstract:** For the problem of stabilizing a parallel-type double inverted pendulum with restricted travel, a saturating control law is developed that satisfies the amplitude constraint on the cart and has a large region of attraction. The analysis and design is performed based on the linearized model of the system. The control law has two design parameters:  $T$  and  $k$ , which are both positive. When  $k$  approaches  $\infty$ , the region of attraction becomes larger. These parameters are chosen to optimize the transient response of the system considering the input constraint, observation noise, etc. The effectiveness of the control law is demonstrated by simulations and experiments. The design technique can also be used to stabilize a series-type inverted pendulum with restricted travel.

### 1. はじめに

倒立振子系は、種々の制御則の検証用モデルとして普及している。また、この系は、劣駆動、非線形、不安定という性質を持つ興味深い制御対象であるので、現在もこの系の制御法に関する研究が行われている。

本稿では、台車の振幅制限を考慮した二重倒立振子系の安定化問題を考える。二重倒立振子系には、並列型と直列型があるが、本稿で示す設計法はいずれにも適用できるものである。

Lin ら<sup>1)</sup> は、与えられた姿勢から一重倒立振子系を安定化する際に、できるだけ台車の移動幅を小さくする線形制御則を開発した。Lin らの制御則は、制御系の四つの極のうち、二つの実部を非常に小さくし（負の方向に大きくし）、一つを  $-\omega_1$  ( $\omega_1$  は振子の固有角振動数) とし、残りの一つを  $-\epsilon < 0$  とするものである。  $\epsilon$  を 0 に近づけると、台車の移動幅はその理論的な限界に近づく。ただし、 $-\epsilon$  の極のため、台車の運動に遅いモードが現れる。

文献<sup>2)</sup> で、台車の振幅制限がある一重倒立振子系を安定化する飽和制御則の設計法が示された。これは、まず台車部のみを安定化し、問題を入力制約問題にしたのち、不安定部分系 (1 次系) を安定化する飽和制御を求めることによって得られる。この制御は、定ゲイン状態フィードバックを単に飽和させるというもので、そのゲインは、閉ループ極を  $\{-1/T, -1/T, -\omega_1, -k\}$  に配置するゲインである。ここで、 $T > 0, k > 0$  は設計パラメータである。また、この制御則は、不安定部分系の安定化領域を最大化する制御則である (倒立振子の線形化モデルに基づく結論)。  $T$  を小さくした場合、上記の極配置は、Lin らの制御則と類似したものとなるが、この制御則の場合、不安定部分系の安定化領域を最大化するために  $k$  を小さくする必要がない。

本稿では、台車に振幅制限がある二重倒立振子系の安定化問題に対して文献<sup>2)</sup> の方法を適用して、振幅制限を満足し、安定化領域を大きくする飽和制御則を求める。理論解析は、文献<sup>1, 2)</sup> と同様に倒立振子の線形化モデルに基づいて行う。1 重倒立振子系の場合と同様に、制御則は不安定部分系 (この場合 2 次系) を安定化する飽和制御を求めることによって得られる。このとき、Hu ら<sup>3)</sup> が提案した、入力制限を有する反安定 (すべての固有値の実部が正) な 2 次系の安定化領域を大きくする飽和制御を利用する。

本制御則は二つの設計パラメータ  $T > 0, k > 0$  を持つ。  $T$  は台車サーボ系の時定数であり、 $k$  は線形の範囲における不安定部分系の極を指定する

パラメータである。  $k \rightarrow \infty$  のとき、不安定部分系の安定化領域はその上限に近づく。

本制御則の有効性は、シミュレーションおよび実験によって検証される。

以下で、 $I_p$  は  $p$  次単位行列を、 $A'$  は  $A$  の転置行列を表す。

### 2. 制御対象の数学モデルと問題の記述

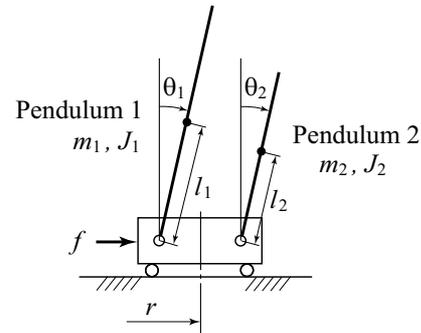


Fig.1 Parallel-type double inverted pendulum system.

並列型二重倒立振子系を Fig.1 に示す。  $r(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$  はそれぞれ台車の変位、振り 1 の角変位、振り 2 の角変位を表す。  $(m_1, l_1, J_1)$  および  $(m_2, l_2, J_2)$  はそれぞれ振り 1 および振り 2 の質量、ピボットから重心までの距離、重心まわりの慣性モーメントである。  $g$  は重力加速度である。

並列型二重倒立振子系の線形化運動方程式は次式で表される。

$$m_1 l_1 \ddot{r} + (m_1 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 - m_1 l_1 g \theta_1 = 0 \quad (1)$$

$$m_2 l_2 \ddot{r} + (m_2 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 g \theta_2 = 0 \quad (2)$$

$$\dot{r} = u \quad (3)$$

(1), (2), (3) 式はそれぞれ振り 1, 振り 2, 台車に対する運動方程式である。  $u(t)$  は線形化後の入力である。系は可制御、すなわち、両振子の固有角振動数  $\omega_1, \omega_2$  は異なると仮定する。

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad (4)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{m_i l_i g}{m_i l_i^2 + J_i}}, \quad i = 1, 2$$

$r(t)$  には次の制限が課せられているとする。

$$|r(t)| \leq a, \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

$a > 0$  は台車の最大許容振幅である。

問題は、(1), (2), (3) 式で表される制御対象に対して、(5) 式の制限を満たし、安定化領域を大きくする安定化制御則を求めることである。

### 3. 設計法

#### 3.1 入力制約問題への変換

$v(t)$  を台車系の新しい入力とする。 $r(t), v(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $r(s), v(s)$  で表す。また、 $v(s)$  から  $r(s)$  までの伝達関数を  $G(s)$  で表す。

$G(s)$  が次の 2 次遅れ系となるように  $u(t)$  を与える。

$$G(s) = \frac{r(s)}{v(s)} = \frac{1}{(1+Ts)^2} \quad (6)$$

ここで、 $T > 0$  は設計パラメータである。(6) 式の時間領域における表現は次式となる。

$$\ddot{r} = -\frac{1}{T^2}r - \frac{2}{T}\dot{r} + \frac{1}{T^2}v \quad (7)$$

よって、(6) 式を成立させる  $u(t)$  は (3), (7) 式から

$$u = -\frac{1}{T^2}r - \frac{2}{T}\dot{r} + \frac{1}{T^2}v \quad (8)$$

となる。このとき、 $G(s)$  の 1 ノルム  $\|G(s)\|_1$  について次式が成立する。

$$\|G(s)\|_1 = \int_0^\infty |g(t)|dt = 1 \quad (9)$$

ただし、 $g(t)$  は  $G(s)$  のインパルス応答である。

原点から、 $|v(t)| \leq a$  を満たす  $v(t)$  によって到達可能な (7) 式の解  $[r(t) \ \dot{r}(t)]'$ ,  $\forall t \geq 0$  すべての集合を  $\mathcal{R}(T)$  とする。

(9) 式ゆえ、(5) 式の条件は次の二つの条件が成立すれば満たされる (付録 A 参照)。

$$[r(0) \ \dot{r}(0)]' \in \mathcal{R}(T) \quad (10)$$

$$|v(t)| \leq a, \quad \forall t \geq 0 \quad (11)$$

いま

$$\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

を定義する。このとき、振子 1 と振子 2 の運動方程式 (1), (2) 式は次式と書かれる。

$$M\ddot{\theta} - K\theta = L\dot{r} \quad (12)$$

ただし

$$M = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + J_1 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 + J_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} m_1 l_1 g & 0 \\ 0 & m_2 l_2 g \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \\ -m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

結局、台車系が 2 次遅れ系となるように補償された後の系の数学モデルは (7), (12) 式で表される。また、これらを書き直すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{1}{T^2}r - \frac{2}{T}\dot{r} + \frac{1}{T^2}v \\ \ddot{\theta} &= M^{-1}K\theta + M^{-1}L \left( -\frac{1}{T^2}r - \frac{2}{T}\dot{r} + \frac{1}{T^2}v \right) \end{aligned} \quad (13)$$

状態  $x(t)$  を次式で定義する。

$$x := [r \ \dot{r} \ \theta' \ \dot{\theta}']' \quad (14)$$

このとき、(13) 式は次の状態方程式で表される。

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (15)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2}{T} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M^{-1}L \left[ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2}{T} \right] \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

問題の解は、次のより簡単な入力制約問題を解くことによって得られる。「(15) 式の系に対して、(10), (11) 式の条件の下で、安定化領域を大きくする安定化制御則を求めよ。」

#### 3.2 部分状態フィードバック制御による安定化

座標変換によって、(15) 式を安定な部分系と不安定な部分系に分離し、3.1 節の問題を不安定な部分系 (2 次系) を入力  $v$  の制限下で安定化するというさらに簡単な問題に変換して解く。

$A_{22}$  は  $\pm\omega_1, \pm\omega_2$  なる固有値を持ち、可制御性の仮定から、 $\omega_1 \neq \omega_2$  である。よって、 $A_{22}$  は相似変換によって対角化可能である。

まず

$$VA_{22}V^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega^- & 0 \\ 0 & \Omega^+ \end{bmatrix}$$

$$\Omega^- = \text{diag}\{-\omega_1, -\omega_2\}, \quad \Omega^+ = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2\}$$

とする  $V$  を用いた行列

$$S_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

によって、 $A$  を相似変換する。

$$\bar{A} = S_1 A S_1^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ VA_{21} & VA_{22}V^{-1} \end{bmatrix}$$

さらに、この行列を次のように分割した部分行列を定義する。

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cc|c} A_s & 0 & 0 \\ \hline \bar{A}_{21} & A_u & 0 \end{array} \right] := \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & 0 & 0 \\ * & \Omega^- & 0 \\ * & 0 & \Omega^+ \end{array} \right]$$

シルベスター方程式

$$-A_u X + X A_s + \bar{A}_{21} = 0 \quad (16)$$

の解  $X$  を用いた行列

$$S_2 = \left[ \begin{array}{cc} I_4 & 0 \\ X & I_2 \end{array} \right] \quad (17)$$

によって、 $\bar{A}$  は次式のようにブロック対角化される (付録 B 参照)。

$$\tilde{A} = S_2 \bar{A} S_2^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{array} \right]$$

$A_s$  と  $A_u$  は共通の固有値を持たないので、(16) 式は一意的に解ける<sup>4)</sup>。

すなわち、座標変換

$$w = Sx \quad (18)$$

$$S = S_2 S_1$$

によって、状態方程式 (15) は次のように変換される。

$$\dot{w} = \tilde{A}w + \tilde{B}v \quad (19)$$

ただし

$$\tilde{B} = SB = \left[ \begin{array}{c} B_s \\ B_u \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array}$$

$w$  を次のように分割する。

$$w = \left[ \begin{array}{c} w_s \\ w_u \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \quad (20)$$

座標変換 (18) 式によって、系は次の二つの部分系に分離された。

$$\dot{w}_s = A_s w_s + B_s v \quad (21)$$

$$\dot{w}_u = A_u w_u + B_u v \quad (22)$$

$w_s$  部分系は漸近安定であり、 $w_u$  部分系は反安定である。よって、 $|v(t)| \leq a$  の下で  $w_u$  部分系を漸近安定化する制御則  $v = f_1(w_u)$  は系全体を漸近安定化する。さらに、(10) 式の条件が成立すれば、制御則は  $r(t)$  の制限 (5) 式を満たす。よって、この制御則は元の問題の解となる。

3.1 節の入力制約問題は、6 次系から 2 次系の問題にさらに簡単化された。「(22) 式の反安定な 2 次系に対して、入力制限  $|v(t)| \leq a$  を満たし安定化領域を大きくする安定化制御則を求めよ。」

この問題に対する一つの解は Hu ら<sup>3)</sup> によって次式として得られている。

$$v = -\text{sat}(kB_u' P w_u, a), \quad k > \frac{1}{2} \quad (23)$$

ただし、 $P$  は次のリカッチ方程式の一意的正定解である。

$$A_u' P + P A_u - P B_u B_u' P = 0 \quad (24)$$

$\text{sat}(\cdot, a)$  は振幅  $a$  を持つ飽和関数であり、次式で定義される。

$$\text{sat}(\xi, a) = \text{sgn}(\xi) \min\{|\xi|, a\} \quad (25)$$

ちなみに、 $v = -B_u' P w_u$  は、(22) 式の系に対して評価関数

$$J = \int_0^\infty v(t)^2 dt \quad (26)$$

を最小化する最適レギュレータ問題の解である。(23) 式は (22) 式の系を漸近安定化し、 $k \rightarrow \infty$  のとき、その安定化領域が入力制限下における最大安定化領域 (null controllable region) に収束することが知られている<sup>3)</sup>。 $w = Sx$  の関係式を用いて、(23) 式を元の状態  $x$  によって表すと次式となる。

$$v = -\text{sat}(kFx, a), \quad k > \frac{1}{2} \quad (27)$$

$$F = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ B_u' P] S$$

制御入力  $u(t)$  は、(27) 式の  $v(t)$  を (8) 式に代入して得られる。

注意 1 最適レギュレータの性質から、 $v = -B_u' P w_u$  は  $w_u$  部分系の極を  $\{-\omega_1, -\omega_2\}$  に配置する状態フィードバック制御として、極配置問題を解くことによって求めることもできる。

注意 2  $v = -B_u' P w_u$  によって  $w_u$  部分系の極が  $\{-\omega_1, -\omega_2\}$  に配置されることから、 $v$  から  $B_u' P w_u$  までの開ループ伝達関数は

$$B_u' P (sI - A_u)^{-1} B_u = \frac{2(\omega_1 + \omega_2)s}{(s - \omega_1)(s - \omega_2)}$$

となり、零点  $\{0\}$  と極  $\{\omega_1, \omega_2\}$  を持つことがわかる。これから、(23) 式を線形の範囲で使用した  $v = -kB_u' P w_u$ ,  $k \geq 0$  に対する  $w_u$  部分系の根軌跡は Fig.2 となる。 $k = 1$  のとき、極は  $\{-\omega_1, -\omega_2\}$  となる。 $k \rightarrow \infty$  のとき、二つの極のうち一つは 0 に近づき、もう一つは  $-\infty$  へ発散する。

#### 4. 実験結果

実験装置の概観を Fig.3 に示す。台車は DC モータ (定格出力 8 W) とブリーペルト機構で駆動され、台車の位置  $r(t)$  と振り角  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  はポ

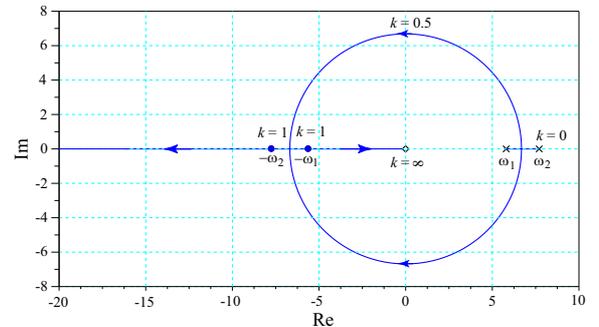


Fig.2 Root loci of the  $w_u$  subsystem.

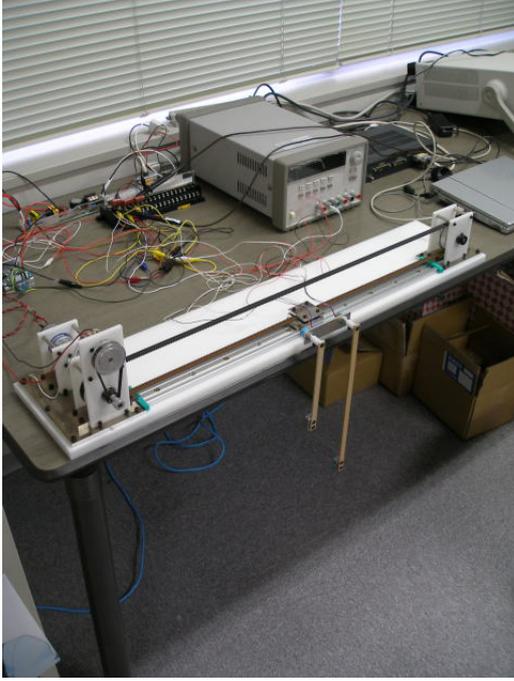


Fig.3 View of the experimental system.

Table 1 Parameters of the pendulums

$i$	$m_i$ [kg]	$l_i$ [m]	$J_i$ [kg m <sup>2</sup> ]
1	0.0176	0.129	$8.22 \times 10^{-5}$
2	0.0207	0.228	$3.04 \times 10^{-4}$

テンショメータで計測される。各振子のパラメータは Table 1 のとおりである。

あらかじめ、DC モータ・ドライバ系に速度フィードバック補償を行うことによって、ドライバの入力電圧  $v_{in}(t)$  と台車速度  $\dot{r}(t)$  との関係が

$$\dot{r}(t) \approx K_a v_{in}(t)$$

となるようにした(付録 C 参照)。ここで、 $K_a$  は実験的に同定された定数である。 $G(s)$  の時定数  $T$  は、 $T = 0.15$  s と与えた。計測されない状態  $\dot{r}(t)$ 、 $\dot{\theta}_1(t)$ 、 $\dot{\theta}_2(t)$  は同一次元オブザーバで推定した。オブザーバゲインは、オブザーバ極が  $v = -Fx$  とした場合の閉ループ極 ( $A - BF$  の固有値) の  $\alpha > 1$  倍となるように設計した。

$a = 0.15$  m,  $\alpha = 3$  とし、 $k = 1$ , または  $k = 2$  とした場合の安定化制御実験の結果を Fig.4 に示す。 $k = 2$  の方が、台車と各振子角の振幅が小さくなっている。

## 5. おわりに

台車系の伝達関数を 2 次遅れとする補償を行ったうえで、座標変換によって系を安定な部分系と不安定な部分系 (2 次系) に分離することによって、台車の振幅制限を持つ倒立振子の安定化問題を入力制限を持つ 2 次系の安定化問題に単純化し、この問題の解として飽和制御則を求めた。

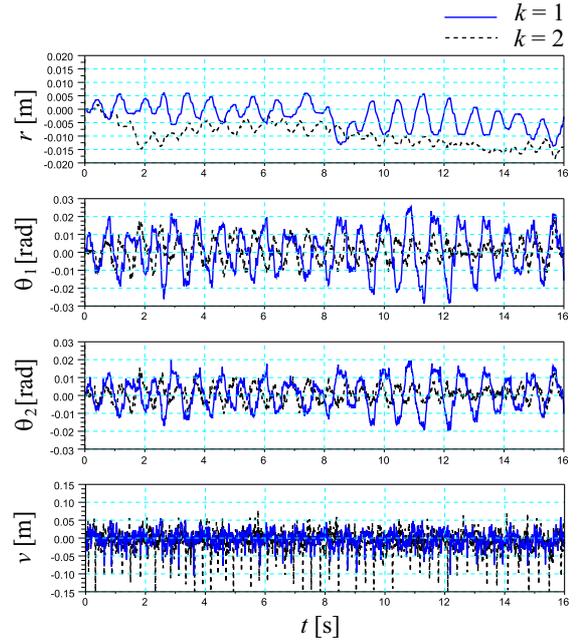


Fig.4 Experimental results for  $k = 1$  and  $k = 2$ .

安定な部分系は極  $\{-1/T, -1/T, -\omega_1, -\omega_2\}$  を持ち、不安定な部分系はパラメータ  $k$  を持つ飽和制御によって制御される。パラメータ  $T, k$  を調整することによって、良好な応答特性を持つ制御系が設計できる。実際には、これらのパラメータは制御系の速応性、アクチュエータの性能、観測ノイズなどを考慮して設計される。

### A (10), (11) 式が成立すれば, (5) 式が満たされることの証明

(10), (11) 式の条件は次式で置き換えられる

$$[r(-\infty) \quad \dot{r}(-\infty)]' = 0, \quad |v(t)| \leq a, \quad \forall t > -\infty$$

これらから、 $r(t)$  は次式で計算される。

$$r(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)v(\tau)d\tau$$

変数変換  $\eta = t - \tau$  を用いると

$$r(t) = \int_0^{\infty} g(\eta)v(t-\eta)d\eta$$

を得る。これと (9) 式から、次の不等式が得られる。

$$|r(t)| \leq \int_0^{\infty} |g(\eta)| \cdot |v(t-\eta)|d\eta \leq a$$

### B 座標変換行列 $S_2$ が (17) 式によって与えられることの証明

次のように、直接計算することによって示せる。

$$S_2 \bar{A} S_2^{-1} = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ X & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ A_{21} & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ -X & I_2 \end{bmatrix}$$

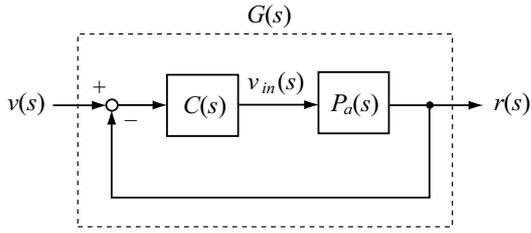


Fig.5 Feedback compensation of the cart system.

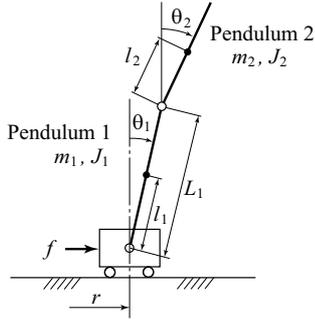


Fig.6 Series-type double inverted pendulum system.

$$= \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ -A_u X + X A_s + \bar{A}_{21} & A_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix}$$

### C 台車駆動系が積分特性を持つ場合の伝達関数 $G(s)$ の構成法

速度制御型の DC モータ・ドライバによって台車が駆動される場合，台車系の運動方程式は次式で表される。

$$\dot{r}(t) = K_a v_{in}(t) \quad (28)$$

ただし， $v_{in}(t)$  はモータドライバ回路の入力電圧， $K_a$  は駆動系のゲインである。(28) 式を伝達関数表示すれば

$$P_a(s) = \frac{r(s)}{v_{in}(s)} = \frac{K_a}{s}$$

となる。 $G(s)$  は Fig.5 のフィードバック系によって構成できる。Fig.5 から，補償器  $C(s)$  は次式で計算される。

$$C(s) = \frac{G(s)}{P_a(s)(1 - G(s))} = \frac{1}{K_a T(Ts + 2)} \quad (29)$$

### D 直列型二重倒立振り子系の場合

直列型二重倒立振り子系を Fig.6 に示す。 $r(t)$ ， $\theta_1(t)$ ， $\theta_2(t)$  はそれぞれ台車の変位，振り子 1 の角変位，振り子 2 の角変位を表す。 $(m_1, L_1, l_1, J_1)$  は振り子 1 の質量，長さ，台車側のピボットから重心までの距離，

重心まわりの慣性モーメントである。 $(m_2, l_2, J_2)$  は振り子 2 の質量，ピボットから重心までの距離，重心まわりの慣性モーメントである。 $g$  は重力加速度である。

直列型二重倒立振り子系の線形化運動方程式は次式で表される。

$$(m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{r} + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \theta_1 = 0 \quad (30)$$

$$m_2 l_2 \ddot{r} + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 g \theta_2 = 0 \quad (31)$$

$$\dot{r} = u \quad (32)$$

(30)，(31)，(32) 式はそれぞれ振り子 1，振り子 2，台車に対する運動方程式である。 $u$  は線形化後の入力である。台車系は，同様に，その運動方程式が (7) 式となるように補償する。

いま

$$\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

を定義する。このとき，振り子 1 と振り子 2 の運動方程式 (30)，(31) 式は次式と書かれる。

$$M \ddot{\theta} - K \theta = L \ddot{r} \quad (33)$$

ただし

$$M = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1 & m_2 L_1 l_2 \\ m_2 L_1 l_2 & m_2 l_2^2 + J_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 L_1) g & 0 \\ 0 & m_2 l_2 g \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 - m_2 L_1 \\ -m_2 l_2 \end{bmatrix}$$

これ以降は，並列型二重倒立振り子系に対する数式が変更なく適用できる。ちなみに，直列型二重倒立振り子系では，可制御性が失われることはない<sup>5)</sup>。

### E 一重倒立振り子系に対する制御則

一重倒立振り子系に対しても上記の設計法が適用できる。参考のため，以下に制御則の計算式を示す。

Fig.7 の一重倒立振り子系の線形化運動方程式は次式で表される。

$$m_1 l_1 \ddot{r} + (m_1 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 - m_1 l_1 g \theta_1 = 0 \quad (34)$$

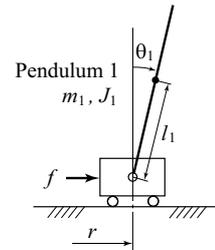


Fig.7 Single inverted pendulum system.

$$\ddot{r} = u \quad (35)$$

台車系は、同様に、その運動方程式が (7) 式となるように補償する。各記号は

$$\theta := \theta_1$$

$$M = m_1 l_1^2 + J_1, \quad K = m_1 l_1 g, \quad L = -m_1 l_1$$

となり、状態を

$$x := [r \quad \dot{r} \quad \theta \quad \dot{\theta}]'$$

と定義すると、状態方程式は次式で表される。

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (36)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} := \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{L}{MT^2} & -\frac{2L}{MT} & \frac{K}{M} & 0 \end{array} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} := \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{T^2} \\ 0 \\ \frac{L}{MT^2} \end{array} \right]$$

$A_{22}$  を次のように対角化する行列を  $V$  とする。

$$VA_{22}V^{-1} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{bmatrix}$$

この  $V$  を用いて次の行列を定義する。

$$S_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

$S_1$  による  $A$  の相似変換は次式となる。

$$\bar{A} = S_1 A S_1^{-1}$$

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_s & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{A}_{21} & A_u & * & * \\ \hline * & 0 & -\omega_1 & \omega_1 \end{array} \right]$$

また、シルベスター方程式

$$-A_u X + X A_s + \bar{A}_{21} = 0 \quad (37)$$

の解  $X$  を用いた行列  $S_2$  を次式で定義する。

$$S_2 = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

結局、(36) 式を安定な部分系と不安定な部分系に分離する座標変換行列は次式となる。

$$S = S_2 S_1$$

$\tilde{B}$  は次のように分割される。

$$\tilde{B} = SB = \left[ \begin{array}{c} B_s \\ B_u \end{array} \right] \begin{matrix} \} 3 \\ \} 1 \end{matrix} \quad (39)$$

(24) 式のリカッチ方程式の正定解は次式となる。

$$P = \frac{2\omega_1}{B_u^2}$$

(27) 式から、制御則は次式となる。

$$v = -\text{sat}(kFx, a), \quad k > \frac{1}{2} \quad (40)$$

$$F = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2\omega_1}{B_u} \right] S$$

本制御則は、文献<sup>2)</sup>で提案された飽和制御則に等しい。

注意 3  $k > 0.5$  のとき、飽和制御 (40) 式によって  $w_u$  部分系は安定化される。このとき、安定化領域は  $\{w_u : |w_u| < a/\omega_1\}$  となり、 $k$  に依存しない。

注意 4 (40) 式を線形の範囲で使用したとき、 $k \geq 0$  に対する  $w_u$  部分系の根軌跡は Fig.8 となる。すなわち、 $k \rightarrow \infty$  のとき、極は  $-\infty$  に行く。

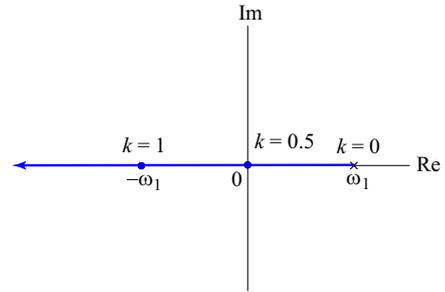


Fig.8 Root loci of the  $w_u$  subsystem.

## 参考文献

- 1) Z. Lin, A. Saberi, M. Gutmann and Y.A. Shamash : Linear controller for an inverted pendulum having restricted travel: a high-and-low gain approach, Automatica, vol.32, no.6, pp.933-937 (1996)
- 2) K.Yoshida and I. Matsumoto : Stabilizing control for an inverted pendulum with restricted travel, Proceedings of the 2009 American Control Conference, pp. 543-548 (2009)
- 3) T. Hu and Z. Lin : Control systems with actuator saturation - Analysis and design, Birkhäuser, pp. 67-74 (2001)
- 4) F.R. Gantmacher : The theory of matrices Vol.I, Chelsea Publishing Company, p.225 (1959)
- 5) 川谷, 山口: 並列型 2 重倒立振り子系の解析とその安定化, 計測自動制御学会論文集, Vol.29, No.5, pp.572-580 (1993)