

制御工学III講義ノート

2022年度前期（制御工学III）

島根大学総合理工学部
機械・電気電子工学科

吉田 和信

Copyright ©2022 Kazunobu Yoshida. All rights reserved.

目次

第 1 章 RC 回路系のステップ応答	1
1.1 1 次遅れ系	1
1.2 2 次遅れ系	2
1.3 むだ時間のある 2 次遅れ系のステップ応答	3
1.4 演習問題	4
第 2 章 RC 回路系に対する制御系の設計 (1)	7
2.1 モード分解法による安定化	7
2.2 IMC 制御系の構成	9
2.3 シミュレーション及び実験結果	10
2.4 演習問題	10
第 3 章 RC 回路系に対する制御系の設計 (2)	13
3.1 逆ベースコントローラ設計	13
3.2 SIMC 法による PI コントローラの設計	14
3.3 シミュレーション及び実験結果	15
3.4 演習問題	17
第 4 章 台車系に対する制御系の設計 (1)	19
4.1 駆動系の速度フィードバック補償	19
4.2 PI 補償器の利用	24
4.3 演習問題	24
第 5 章 台車系に対する制御系の設計 (2)	27
5.1 P 制御	27
5.2 PI 制御	29
5.3 IP 制御	31
5.4 IMC 法による制御	33
5.5 演習問題	35
第 6 章 台車系に対する制御系の設計 (3)	37
6.1 モード分解法による安定化	37
6.2 IMC 制御系の構成	39
6.3 シミュレーション及び実験結果	40
6.4 演習問題	42

第 7 章	倒立振り子系に対する制御系の設計 (1)	43
7.1	運動方程式と問題の記述	43
7.2	制御系の設計法	45
7.3	シミュレーション及び実験結果	48
7.4	演習問題	50
第 8 章	倒立振り子系に対する制御系の設計 (2)	51
8.1	IP 型制御系の設計法	51
8.2	IMC 構造を持つ制御系の設計法	53
8.3	シミュレーション及び実験結果	54
8.4	演習問題	55
第 9 章	ボールビーム系に対する制御系の設計 (1)	57
9.1	運動方程式と問題の記述	57
9.2	線形制御系の設計法	59
9.3	シミュレーション及び実験結果	64
9.4	演習問題	66
第 10 章	ボールビーム系に対する制御系の設計 (2)	69
10.1	問題の記述	69
10.2	飽和制御系の設計法	69
10.3	シミュレーション及び実験結果	73
10.4	演習問題	75
第 11 章	ボールビーム系に対する制御系の設計 (3)	77
11.1	IP 型制御系の設計法	77
11.2	IMC 構造を持つ制御系の設計法	79
11.3	シミュレーション及び実験結果	80
11.4	演習問題	85
第 12 章	水槽系に対する制御系の設計 (1)	87
12.1	水槽系実験装置とそのモデリング	87
12.2	演習問題	90
第 13 章	水槽系に対する制御系の設計 (2)	91
13.1	モード分解法による安定化	91
13.2	IMC 制御系の構成	93
13.3	シミュレーション及び実験結果	94
13.4	演習問題	97
第 14 章	漏れる水槽系に対する制御系の設計	99
14.1	モード分解法による安定化	99
14.2	IMC 制御系の構成	102
14.3	シミュレーション及び実験結果	102

14.4 演習問題	106
第 15 章 巻上げ式クレーン系に対する制御系の設計	107
15.1 運動方程式と問題の記述	107
15.2 制御系の設計法	108
15.3 シミュレーション及び実験結果	114
15.4 演習問題	118
第 16 章 二輪倒立振子系に対する制御系の設計	121
16.1 運動方程式と問題の記述	121
16.2 制御系の設計法	123
16.3 シミュレーション及び実験結果	125
16.4 姿勢角の計測に関する補足	127
16.4.1 補助輪の角変位 θ_2 から姿勢角 θ を求める方法	127
16.4.2 ジャイロで $\dot{\theta}$ を計測する場合	128
16.5 演習問題	129
付録 A 演習問題の解	133
A.1 第 1 章	133
A.2 第 2 章	133
A.3 第 3 章	135
A.4 第 4 章	135
A.5 第 5 章	136
A.6 第 6 章	136
A.7 第 7 章	137
A.8 第 8 章	139
A.9 第 9 章	140
A.10 第 10 章	141
A.11 第 11 章	143
A.12 第 12 章	145
A.13 第 13 章	145
A.14 第 14 章	147
A.15 第 15 章	149
A.16 第 16 章	150

第1章 RC回路系のステップ応答

Scilab や Arduino を使った制御系の設計・実装方法を説明するにあたり、簡単に作れる RC 回路系を制御対象とする。

RC回路で1次遅れ系または2次遅れ系(制御対象)を作り、それらをマイコンボード Arduino Due (コントローラ)に接続し、ステップ応答を求める。また、Scilabを用いて、対応するシミュレーションを行う。

1.1 1次遅れ系

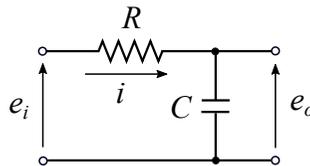


図 1.1: RC 回路系 (1 次遅れ系)

図 1.1 において、入力を電圧 e_i 、出力を電圧 e_o とすると、伝達関数は次式となる。回路系の伝達関数の求め方については、「システムと制御」の講義ノート [2] を参照されたい。

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T = RC \quad (1.1)$$

T は時定数である。回路系の構成には次の抵抗とコンデンサを用いた¹。

$$R = 2 \text{ k}\Omega \quad (\text{炭素被膜抵抗, 誤差 } \pm 5\%)$$

$$C = 1,000 \text{ }\mu\text{F} \quad (\text{電解コンデンサ, 誤差 } \pm 20\%)$$

よって、時定数の公称値は $T = 2 \text{ s}$ である。

入力として $e_i(t) = 1 \text{ V}$ の電圧 (ステップ関数) を与えたときの出力の応答 $e_o(t)$ を図 1.2 に示す。実験結果を実線で、シミュレーション結果 (公称伝達関数 $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{2s+1}$ を使用) を破線で示す。

実験結果とシミュレーション結果には、抵抗値や静電容量の誤差などによる違いが見られる。シミュレーション結果を実験結果に合わせるように、試行錯誤的に伝達関数のパラメータ

¹電解コンデンサには極性があるので、配線時に注意する。また、Arduino の入力インピーダンス (コンデンサと並列の抵抗となる) のオーダーに近い程、大きな値の抵抗は使用しない (入力インピーダンスが無視できなくなるので)。

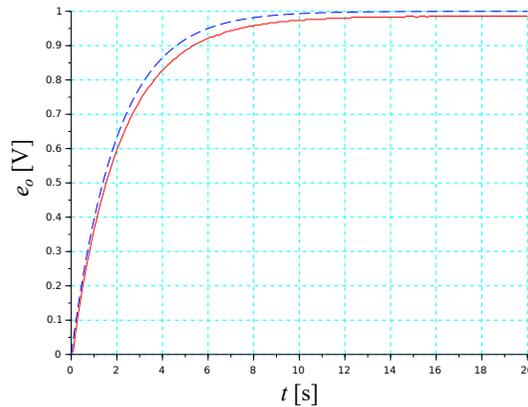


図 1.2: RC 回路系 (1 次遅れ系) のステップ応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果 (伝達関数 $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{2s+1}$))

を変えながら繰り返しシミュレーションを行い, 次の伝達関数を得た.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{0.986}{2.2s + 1} \quad (1.2)$$

回路系の時定数は $T = 2.2\text{s}$, ステップ応答の最終値 (伝達関数 $G(s)$ に対して $G(0)$) は 0.986 である.

1.2 2 次遅れ系

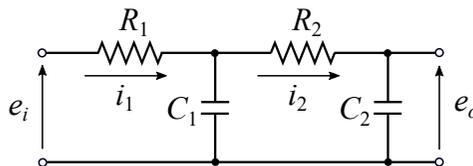


図 1.3: RC 回路系 (2 次遅れ系)

図 1.3 において, 入力を電圧 e_i , 出力を電圧 e_o とすると, 伝達関数は次式となる [2].

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{T_{11}T_{22}s^2 + (T_{11} + T_{22} + T_{12})s + 1} \quad (1.3)$$

ただし

$$T_{11} = R_1C_1, \quad T_{22} = R_2C_2, \quad T_{12} = R_1C_2$$

(1.3) 式の伝達関数を

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (1.4)$$

と表し、さらに、時定数 T_1 , T_2 は次式で表されると仮定する。

$$T_1 = T_{11}\alpha, \quad T_2 = T_{22}\frac{1}{\alpha} \quad (1.5)$$

このとき、(1.3), (1.4) 式から、 α に関する方程式が得られる。

$$T_{11}\alpha^2 - (T_{11} + T_{22} + T_{12})\alpha + T_{22} = 0 \quad (1.6)$$

α はこの方程式を解くことによって次式と求まる。

$$\alpha = \frac{T_{11} + T_{22} + T_{12} \pm \sqrt{D}}{2T_{11}} \quad (1.7)$$

ここで

$$D = (T_{11} + T_{22} + T_{12})^2 - 4T_{11}T_{22} = (T_{11} - T_{22})^2 + T_{12}\{T_{12} + 2(T_{11} + T_{22})\} \quad (1.8)$$

2 次遅れ系としての特徴を持たせるため、 $T_1 \simeq T_2$ としたい ($T_1 \gg T_2$ の場合、ほぼ時定数 T_1 を持つ 1 次遅れ系で近似できる)。このための一つの方法は、上式から、 $T_{11} = T_{22}$ とし、さらに、 T_{12} をできるだけ小さく設定すればよいことがわかる ((1.8) 式から、 D が 0 に近づき、 α が 1 に近づく)。

回路系の構成には次の抵抗とコンデンサを用いた。

$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 200 \text{ k}\Omega \quad (\text{炭素被膜抵抗, 誤差 } \pm 5\%)$$

$$C_1 = 1,000 \text{ }\mu\text{F}, \quad C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F} \quad (\text{電解コンデンサ, 誤差 } \pm 20\%)$$

時定数の公称値は次式と計算される。

$$T_1 = 2.21 \text{ s}, \quad T_2 = 1.81 \text{ s}$$

入力として $e_i(t) = 1 \text{ V}$ の電圧 (ステップ関数) を与えたときの出力の応答 $e_o(t)$ を図 1.4 に示す。実験結果を実線で、シミュレーション結果を破線で示す。

実験結果とシミュレーション結果には、抵抗値や静電容量の誤差などによる違いが見られる。シミュレーション結果を実験結果に合わせるように、試行錯誤的に伝達関数のパラメータを調整し、繰り返しシミュレーションを行い、次の伝達関数を得た。

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{0.983}{(2.21s + 1)(2.13s + 1)} \quad (1.9)$$

本回路系では、 $T_1 = 2.21 \text{ s}$, $T_2 = 2.13 \text{ s}$, ステップ応答の最終値 $\left. \frac{E_o(s)}{E_i(s)} \right|_{s=0} = 0.983$ である。

1.3 むだ時間のある 2 次遅れ系のステップ応答

次の伝達関数を持つ系を考える。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-Ls} \quad (1.10)$$

パラメータ k , T_1 , T_2 , L は正の定数である。 L はむだ時間である。 L が Arduino プログラムのサンプリング周期 Δt の整数倍のとき、すなわち、ある整数 N に対して $L = N\Delta t$ のと

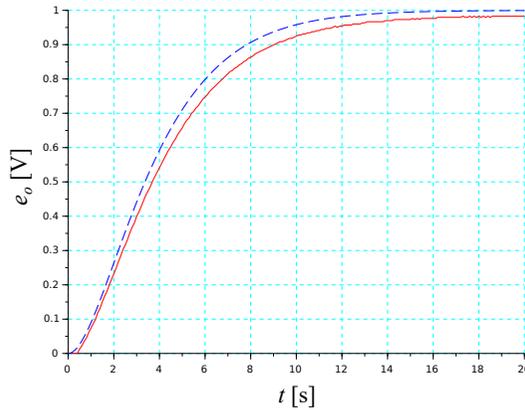


図 1.4: RC 回路系 (2 次遅れ系) のステップ応答 (実験結果: 実線, シミュレーション結果 (伝達関数 $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(2.21s+1)(1.81s+1)}$ を使用): 破線)

き, Arduino プログラムでむだ時間を実現するには, 入力 $u(t)$ または出力 $y(t)$ を N サンプル遅延させればよい.

制御系の設計やシミュレーションでは, e^{-Ls} は, そのままでは扱いにくいので, しばしば, 有限次元の伝達関数で近似される. このとき, 以下のパデ近似がよく利用される.

$$e^{-Ls} \simeq \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls} \quad (1 \text{ 次パデ近似}) \quad (1.11)$$

$$e^{-Ls} \simeq \frac{1 - \frac{1}{2}Ls + \frac{1}{12}(Ls)^2}{1 + \frac{1}{2}Ls + \frac{1}{12}(Ls)^2} \quad (2 \text{ 次パデ近似}) \quad (1.12)$$

パデ近似の次数が増えれば, 近似される周波数バンドが広がる. ただし, 高次のパデ近似は伝達関数の極が密集したものとなり, 精度よく数値計算することが難しくなるので注意する [3].

前節の RC 回路系 (2 次遅れ系) に対して, 入力電圧 $u(t) = 1 \text{ V}$ を $L = 1 \text{ s}$ 遅らせて入力したときの出力 $y(t) = e_o(t)$ の応答を図 1.5 に示す. Arduino プログラムでサンプリング周期を $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ と設定した. よって, 整数 N は $N = 10$ である. 実験結果を実線で, シミュレーション結果を破線で示す. シミュレーションでは, (1.9) 式のパラメータを用い, むだ時間は 1 次パデ近似で近似した. 両者はほぼ重なっている.

1.4 演習問題

1. 図 1.1 の RC 回路系 (1 次遅れ系) の伝達関数 $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ を導出せよ.
2. 図 1.3 の RC 回路系 (2 次遅れ系) の伝達関数 $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ を導出せよ.
3. (1.6) 式を導出せよ.

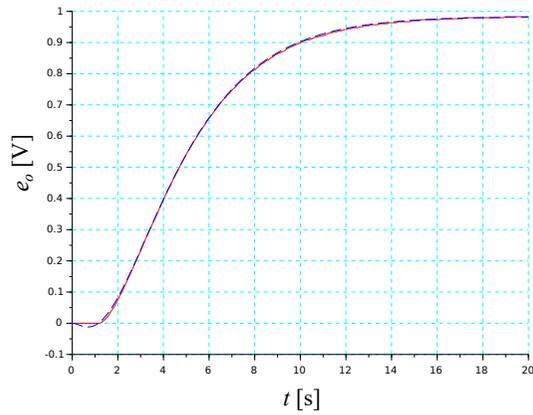


図 1.5: むだ時間のある RC 回路系 (2 次遅れ系) のステップ応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果 (むだ時間は 1 次パデ近似で近似))

4. 図 1.3 の RC 回路系 (2 次遅れ系) の伝達関数は次式で表される.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

抵抗とコンデンサに以下を用いた場合の T_1 , T_2 を計算せよ.

$$R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 1,000 \mu\text{F}$$

第2章 RC回路系に対する制御系の設計 (1)

第1章で扱ったRC回路系に対する制御系の設計法を考える。

まず、制御対象を1次遅れ系+むだ時間系（1次パデ近似）で近似し、モード分解法を用いて、1次遅れ系の部分の動特性を改善する（速応性を上げる）状態フィードバック制御を求める。これによって得られるコントローラは積分特性を持たないので、モデル誤差や外乱がある場合、出力に定常偏差が残る。この問題を解決するために、制御系全体に対してIMC（Internal Model Control, 内部モデル制御）法を適用し、コントローラに積分特性を持たせる。また、RC回路系（むだ時間のある2次遅れ系）に対する実験によって、制御系の性能を検討する。

2.1 モード分解法による安定化

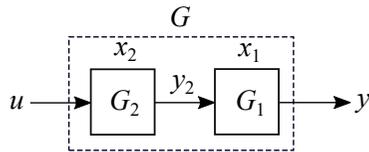


図 2.1: 制御対象のブロック線図

第1章で取り上げたRC回路系（一般に、むだ時間のある2次遅れ系を考える）の伝達関数を1次遅れ + むだ時間（1次パデ近似）で近似する（図 2.1）。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (2.1)$$

ここで

$$G_1(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad G_2(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls}$$

$G_1(s)$ が1次遅れ系、 $G_2(s)$ がむだ時間系（1次パデ近似）を表す。

問題は、出力 $y(t)$ を一定の目標値 r_f に速やかに近づける制御則を求めることである。一般性を失うことなく、 $r_f = 0$ とする。

モード分解法は、制御対象の一部の極を状態フィードバックによって移動するというものである。むだ時間がある場合、むだ時間は本来改善できないので、むだ時間を表す $G_2(s)$ の極

は不変とし, $G_1(s)$ の極のみを移動するというモード分解法が妥当な制御方法であることが知られている [4].

$G_2(s)$ を

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} + d \quad (2.2)$$

と整理し, $G_2(s)$ の状態を x_2 とすると, この状態方程式は次式で表されることに注意する [2].

$$\dot{x}_2(t) = -a_0 x_2(t) + u(t) \quad (2.3)$$

$$y_2(t) = b_0 x_2(t) + du(t) \quad (2.4)$$

同様に, $G_1(s)$ の状態を x_1 とし, (2.1) 式を状態方程式で表すと次式を得る.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{k}{T} & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.6)$$

$G_1(s)$ の極 $-\frac{1}{T}$ のみを移動させる状態フィードバックを求めめるため, 上式を対角化する.

座標変換

$$z = Sx, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4T}{2T-L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

を適用すると次式を得る.

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \frac{2T+L}{2T-L} \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k}{T} & -\frac{4k}{2T-L} \end{bmatrix} z(t) \quad (2.9)$$

z_1 部分系の極 (固有値) を指定極 $p_1 < 0$ に配置する状態フィードバック制御は次式と求まる.

$$u(t) = F_1 z_1(t), \quad F_1 = \frac{2T-L}{2T+L} \left(p_1 + \frac{1}{T} \right) \quad (2.10)$$

$u(t)$ の計算には $z_1(t)$ が必要であるが, これは測定できないので, その推定 $\hat{z}_1(t)$ を用いる.

$y(t)$ が測定可能なので, $x_1(t)$ は (2.6) 式から

$$x_1(t) = \frac{T}{k} y(t) \quad (2.11)$$

と得られる. また, $x_2(t)$ の推定 $\hat{x}_2(t)$ は次式 (低次元オブザーバで, (2.5) 式の第2式である. $G_2(s)$ のモードを制御しないためオブザーバゲインを 0 としている [6]) を実時間で解くことにより計算する.

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = -\frac{2}{L} \hat{x}_2(t) + u(t) \quad (2.12)$$

結局, $\hat{z}_1(t)$ は (2.7) 式から

$$\hat{z}_1(t) = x_1(t) + \frac{4T}{2T-L} \hat{x}_2(t) \quad (2.13)$$

と得られる.

r_f が 0 でない場合, 上記の制御則を $y(t)$ が r_f に収束するように次式とする.

$$u(t) = F_1 \hat{z}_1(t) + u_0 \quad (2.14)$$

ただし

$$u_0 = \frac{r_f}{T_{y,u_0}(0)} \quad (2.15)$$

$T_{y,u_0}(0)$ は u_0 から y までの伝達関数 $T_{y,u_0}(s)$ の $s=0$ の値 (ステップ応答の最終値) である. $T_{y,u_0}(s)$ は次式で計算できる.

$$T_{y,u_0}(s) = \tilde{C} \{sI_2 - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})\}^{-1} \tilde{B} \quad (2.16)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{2T+L}{2T-L} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \frac{k}{T} & -\frac{4k}{2T-L} \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 IMC 制御系の構成

上記の制御則は積分特性を持たないため, 外乱やモデル誤差によって出力 $y(t)$ に偏差が生じる可能性がある. 一方, 積分器を導入した場合, 入力飽和との組み合わせでリセットウィンドアップが生じることが知られている [5]. この問題点を改善するため, IMC 構造を導入してコントローラに積分特性を持たせる方法を採用する [8].

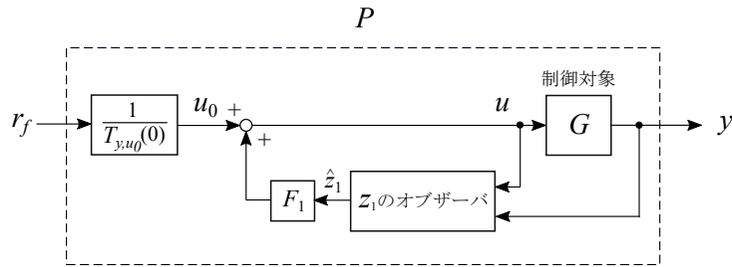


図 2.2: P の構造を表すブロック線図

上記の制御系で入力を r_f , 出力を y としたときの入出力関係を

$$y = P(r_f) \quad (2.17)$$

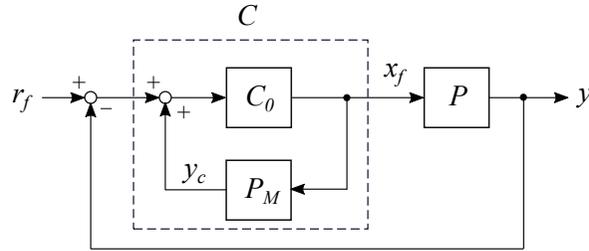
と表す. 図 2.2 に P の構造を示す. P に対して, 図 2.3 の IMC 制御系を構成する. P_M は P のモデルであり, $C_0(s)$ は安定な伝達関数 (フィルタ) である. ここでは, $C_0(s)$ を次の 1 次遅れ系とする.

$$C_0(s) = \frac{1}{T_f s + 1} \quad (2.18)$$

$T_f > 0$ はフィルタの時定数である. このとき

$$C_0(0) = 1 \quad (2.19)$$

であるので, コントローラ C は積分特性を持つ. 実際, $P_M(0) = 1$ から $C_0(0)P_M(0) = 1$ となり, $C(s) = \frac{C_0(s)}{1 - C_0(s)P_M(s)}$ が 0 の極を持つことがわかる.

図 2.3: P に対する IMC 制御系のブロック線図

2.3 シミュレーション及び実験結果

制御対象 (RC 回路系) の伝達関数を次式とする.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-L_0 s}, \quad T_1 \geq T_2 \quad (2.20)$$

各パラメータは前章のものを用いる.

$$k = 0.983, \quad T_1 = 2.21 \text{ s}, \quad T_2 = 2.13 \text{ s}, \quad L_0 = 1 \text{ s}$$

Skogestad のハーフルール (小さい方の時定数 T_2 を, 半分ずつ, 近似する伝達関数の T と L に分配する) [9] によって, 上式を 1 次遅れ系+むだ時間で近似する.

$$G(s) = \frac{k}{T s + 1} e^{-L s} \quad (2.21)$$

ここで

$$T = T_1 + \frac{T_2}{2} = 3.275 \text{ s}, \quad L = L_0 + \frac{T_2}{2} = 2.065 \text{ s} \quad (2.22)$$

目標値 r_f , 指定極 p_1 , フィルタの時定数 T_f は以下のように与えた.

$$r_f = 1 \text{ V}, \quad p_1 = -0.4, \quad T_f = 0.2 \text{ s}$$

図 2.4, 2.5 に, シミュレーション結果 (破線) と実験結果 (実線) を示す. 出力 $y(t)$ は, オーバーシュートが小さく抑えられ, 目標値に収束していることがわかる.

2.4 演習問題

1. (2.1) 式の $G(s)$ に対応する状態方程式が (2.5), (2.6) 式となることを示せ.
2. (2.7) 式の座標変換によって, 状態方程式 (2.5), (2.6) 式が (2.8), (2.9) 式に変換されることを示せ.
3. z_1 部分系の極を指定極 p_1 に配置する状態フィードバック制御が (2.10) 式となることを示せ.

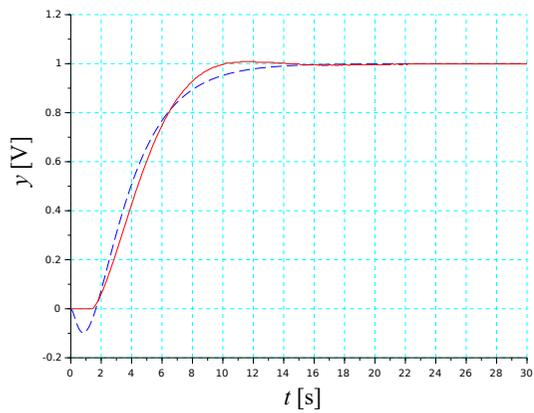


図 2.4: 出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

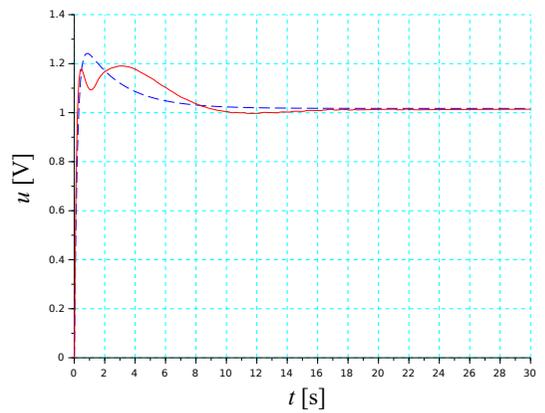


図 2.5: 入力 $u(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

第3章 RC回路系に対する制御系の設計 (2)

直列補償器を用いて、目標入力から出力までの伝達関数を指定した伝達関数にするという逆ベースコントローラ設計法がある。得られる制御系は開ループ制御系なので、実用的な設計法ではないが、IMC法を利用して（前章で示したIMC法の使い方とは異なる）、同じ伝達関数を持つ閉ループ制御系を与える補償器を設計できる。本章では、この方法による、PI（比例＋積分）コントローラの設計法を説明する。また、RC回路系（むだ時間のある2次遅れ系）に対する実験によって、制御系の性能を検討する。

3.1 逆ベースコントローラ設計

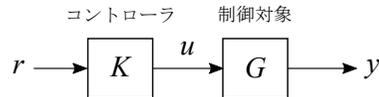


図 3.1: 開ループ制御系

図 3.1 のように、コントローラ $K(s)$ を制御対象 $G(s)$ の前に置いて、 r から y までの伝達関数を指定した伝達関数 ($T_d(s)$) にすることを考える。 $T_d(s)$ を指定し

$$T_d(s) = G(s)K(s) \quad (3.1)$$

を満たす $K(s)$ を求める設計法を逆ベースコントローラ設計という。この設計法では、いかに適切な $T_d(s)$ を指定するかが重要な問題となる。

$G(s)$ をむだ時間のある1次遅れ系とする。すなわち

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (3.2)$$

$$G_1(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad G_2(s) = e^{-Ls}$$

むだ時間 $G_2(s)$ を変更することはできないので、 $T_d(s)$ を次式と与える。

$$T_d(s) = f(s)G_2(s) \quad (3.3)$$

$f(s)$ はフィルタと呼ばれ、望ましい出力応答を実現するように選定される。ここでは、次式と選ぶ。

$$f(s) = \frac{1}{T_c s + 1} \quad (3.4)$$

$T_c > 0$ は制御系の応答の速さを決定する設計パラメータとして使われる。(3.1), (3.2), (3.3)式から

$$K(s) = f(s)G_1(s)^{-1} \quad (3.5)$$

を得る.

3.2 SIMC 法によるPIコントローラ的设计

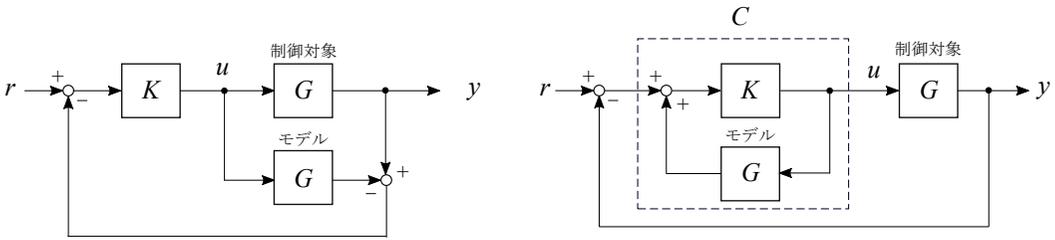


図 3.2: IMC 制御系

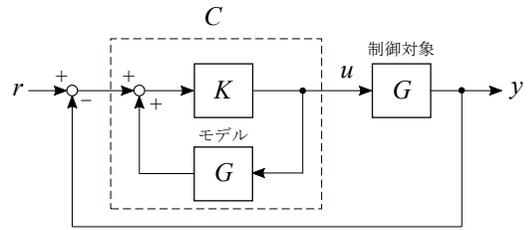


図 3.3: IMC 制御系 (等価変換)

前節で述べた逆ベースコントローラ設計は開ループ制御系を与えるので、 $G(s)$ にモデル誤差がある場合、これを修正する機能を持たない。そこで、図 3.2 のように、制御対象のモデル $G(s)$ (モデル誤差がないとして、同じ記号を用いた) を利用して、フィードバック系を構成する。この制御方式は、内部モデル制御 (Internal Model Control, IMC) と呼ばれ、制御対象とモデルが一致する場合、フィードバック信号が 0 となるので、開ループ制御系 (図 3.1) となるが、モデル誤差がある場合、制御対象の出力とモデルの出力との差がフィードバックされるフィードバック制御系となる。

図 3.2 は図 3.3 と等価変換され、フィードバック制御系のコントローラ $C(s)$ が次式と求まる。

$$C(s) = \frac{K(s)}{1 - K(s)G(s)} \quad (3.6)$$

(3.2), (3.5) 式を上式に代入すると

$$C(s) = G_1(s)^{-1} \frac{1}{f(s)^{-1} - G_2(s)} \quad (3.7)$$

を得る。さらに、 $G_2(s)$ を 1 次テイラー級数近似する。

$$G_2(s) = e^{-Ls} \simeq 1 - Ls \quad (3.8)$$

(3.8) 式を (3.7) 式に代入すると次式を得る。

$$C(s) = \frac{T_s + 1}{k} \frac{1}{(T_c + L)s} = \frac{T}{k(T_c + L)} \left(1 + \frac{1}{T_s} \right) \quad (3.9)$$

これは次式の形でよく知られている PI コントローラである¹。

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (3.10)$$

¹P は比例 (Proportional), I は積分 (Integral) を表す。

K_P は比例ゲイン, T_I は積分時間と呼ばれる. (3.9) 式と (3.10) 式の比較から, K_P, T_I は

$$K_P = \frac{T}{k(T_c + L)}, \quad T_I = T \quad (3.11)$$

となる. Skogestad[9] は, T が大きいとき (制御対象が積分特性に近い特性を持つとき), 入力外乱 (制御対象 $G(s)$ の入力側に入る外乱) に対する出力の応答を改善するために, コントローラの積分器のゲインを大きくする必要があるとして, 上式を修正した次式を提案した.

$$K_P = \frac{T}{k(T_c + L)}, \quad T_I = \min \{T, 4(T_c + L)\} \quad (3.12)$$

(3.12) 式による PI コントローラ設計法を SIMC (Skogestad/Simple IMC) 法という. また, Skogestad[9] は, T_c の設定値として次式を推奨している.

$$T_c = L \quad (3.13)$$

一般に, T_c をより小さくすれば, 制御系はモデル誤差に弱くなり, その応答は振動的になる. 逆に, T_c をより大きくすれば, 制御系の応答速度は遅くなるが, モデル誤差に強い制御系となる.

3.3 シミュレーション及び実験結果

むだ時間のある 2 次遅れ系 (RC 回路系) を制御対象とする.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-L_0 s}, \quad T_1 \geq T_2 \quad (3.14)$$

各パラメータは前章のものを用いる.

$$k = 0.983, \quad T_1 = 2.21 \text{ s}, \quad T_2 = 2.13 \text{ s}, \quad L_0 = 1 \text{ s}$$

Skogestad のハーフルール [9] によって, 上式を 1 次遅れ系+むだ時間で近似する.

$$G(s) = \frac{k}{T s + 1} e^{-L s} \quad (3.15)$$

ここで

$$T = T_1 + \frac{T_2}{2} = 3.275 \text{ s}, \quad L = L_0 + \frac{T_2}{2} = 2.065 \text{ s} \quad (3.16)$$

目標値 r_f と T_c は以下のように与えた.

$$r_f = 1 \text{ V}, \quad T_c = L = 2.065 \text{ s}$$

設計された PI コントローラのパラメータは以下のとおりである.

$$K_P = 0.807, \quad T_I = 3.28 \text{ s} \quad (3.17)$$

以下のシミュレーションと開ループ系の特性値 (ω_P など) の計算では, むだ時間 $e^{-L_0 s}$ を 1 次パデ近似した.

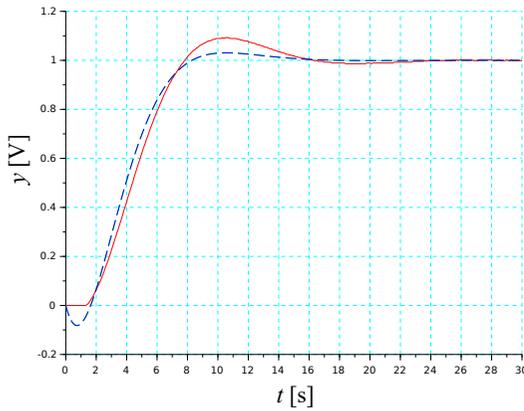


図 3.4: SIMC 法による出力 $y(t)$ の応答
(実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

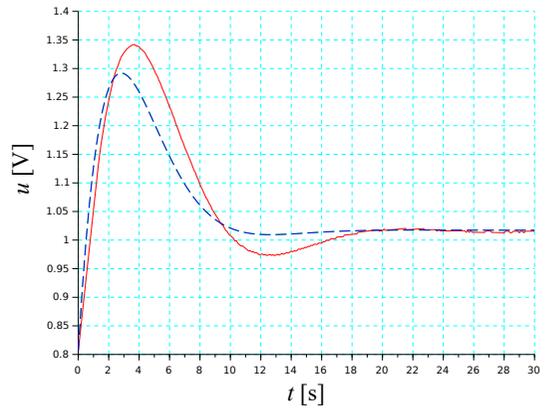


図 3.5: SIMC 法による入力 $u(t)$ の応答
(実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

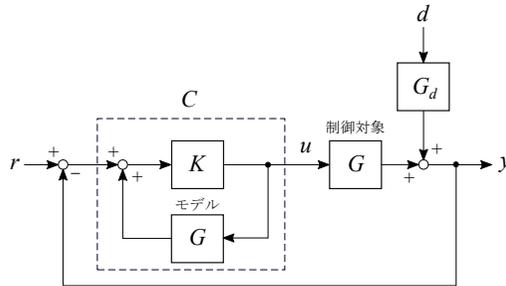


図 3.6: IMC 制御系

制御系のゲイン交差周波数 ω_P , 位相余裕 ϕ_M , 位相交差周波数 ω_Q , ゲイン余裕 G_M は以下のとおりである。

$$\omega_P = 0.242 \text{ rad/s}, \quad \phi_M = 61.9^\circ, \quad \omega_Q = 0.969 \text{ rad/s}, \quad G_M = 4 \quad (3.18)$$

図 3.4, 3.5 に, シミュレーション結果 (破線) と実験結果 (実線) を示す。出力 $y(t)$ は, オーバーシュートが比較的小さく抑えられ, 目標値に収束していることがわかる。

次に, 図 3.6 に示すように, 外乱 d も加わる場合を検討する。 $G_d(s) = 1$ のとき, d は $G(s)$ の出力側に入る外乱 (出力外乱) となり, $G_d(s) = G(s)$ のとき, 入力側に入る外乱 (入力外乱) となる (図 3.6 を等価変換せよ)。

$t = 30 \text{ s}$ からステップ状の出力外乱 $d = 0.5$ を加えた場合のシミュレーション結果 (破線) と実験結果 (実線) を図 3.7, 図 3.8 に示す。コントローラが積分特性を持つので, 外乱が印加された後でも, 出力が目標値に収束しているのがわかる。

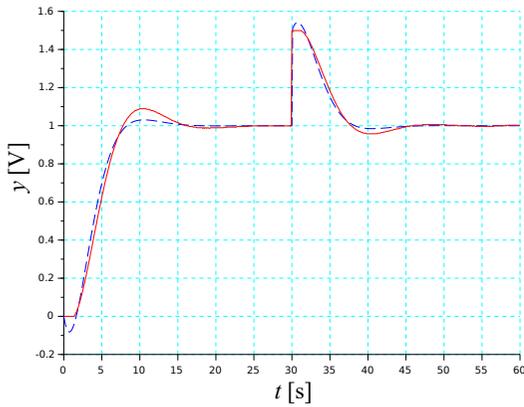


図 3.7: SIMC 法による出力 $y(t)$ の応答
(実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

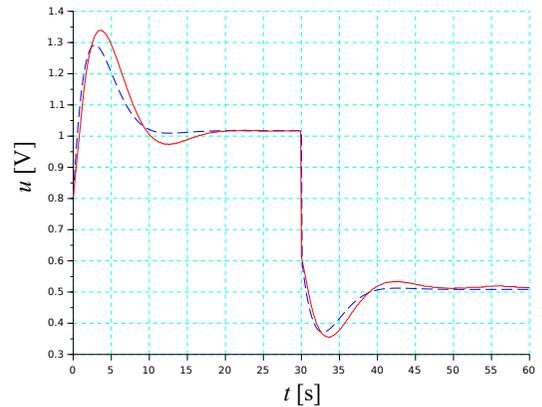


図 3.8: SIMC 法による入力 $u(t)$ の応答
(実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

3.4 演習問題

1. (3.5) 式を導出せよ.
2. (3.9) 式を導出せよ.
- 3.* (3.18) 式に示される開ループ伝達関数の特性値は, 開ループ伝達関数 $L(s)$ を

$$L(s) = C(s)G(s), \quad C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right), \quad G(s) = \frac{k}{T s + 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} L s}{1 + \frac{1}{2} L s} \right)$$

とにおいて Scilab で計算した. これらの特性値を計算する Scilab プログラムを作成し, このことを確かめよ ([11] 参照).²

²* は発展的問題を表す.

第4章 台車系に対する制御系の設計（1）

ギヤド DC モータで駆動される台車系の位置決め制御を考える。モータ駆動系（ドライバ+ギヤド DC モータ）の入出力特性は、入力（電圧）の大きさに依存して変化するが、高ゲインフィードバック補償を用いれば、ある程度、この特性を一定にすることができる。まず、位置決め制御系を設計する前に、駆動系の入出力特性（伝達関数）を同定し、高ゲインの速度フィードバック制御によって、入力電圧に比例したモータ回転速度が得られるようにする。

4.1 駆動系の速度フィードバック補償

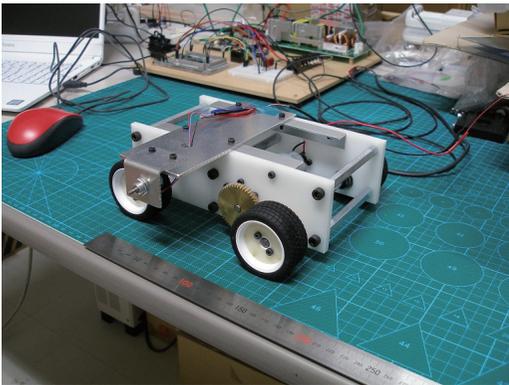


図 4.1: 台車系実験装置

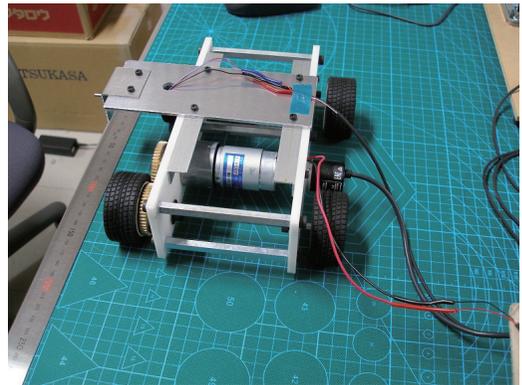


図 4.2: 台車系実験装置

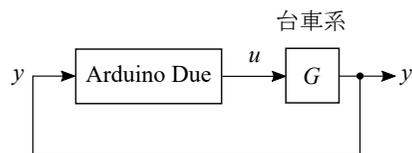


図 4.3: Arduino による制御系の実装

図 4.1, 図 4.2 に示す台車系実験装置の位置決め制御を考える。台車は、8 W のギヤド DC モータ（ツカサ電工 TG-321B-SV-50, 24V）で駆動され、Arduino Due（A/D, D/A コンバータ、パルスカウンタを持つマイコンボード）の出力電圧の電流増幅には定格 13A の PWM 方式のドライバ（Cytron CYTRON-MD10C）を用いる。モータシャフトに連結したロータリーエンコーダ（オムロン E6A2-CW3C 500P/R）によって台車の変位を測定している。制御系の構成を図 4.3 に示す。Arduino Due が出力する電圧（0 ~ 3.3 [V]）をモータドライバに入力

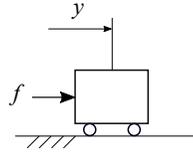


図 4.4: 台車系のモデル図

しモータを回転させる（本ドライバは速度指令電圧（0～5[V]）と回転方向指令電圧（Low, High）を入力するようになっている）。そして、ロータリーエンコーダの信号を Arduino Due が持つパルスカウンタによって計測し Arduino Due に記録する。

図 4.4 に台車系のモデル図を示す。 y [m] は台車の変位， f [N] は駆動系が発生する力を示す（ f は運動方程式には現れない）。本ギヤド DC モータは回転摩擦が小さい，制御性が良いという優れた特性を持っており，台車系の入出力関係は，ほぼ，次の微分方程式に従う。

$$\dot{y}(t) = ku(t) \quad (4.1)$$

t [s] は時間， $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ [m/s] であり， $u(t)$ [V] はドライバに入力される電圧を表す。 k [m/s/V] は正の定数である。

微分演算子 s を用いて，(4.1) 式を次式で表す（演算子を用いるとき，例えば， $y(t)$ は $y(s)$ と記す）。

$$sy(s) = ku(s) \quad (4.2)$$

いま

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (4.3)$$

と定義すると，上式から

$$G(s) = \frac{k}{s} \quad (4.4)$$

を得る。 $G(s)$ を $u(s)$ から $y(s)$ までの伝達関数という。伝達関数と入出力の関係は，図 4.5 のようにブロック線図で表すこともできる。ブロック線図では，矢印が信号，ブロックが伝達関数を表す。また，ブロック線図には，信号の加減算を行う加え合わせ点，信号の複写を行う引き出し点がある（図 4.6）。



図 4.5: システムのブロック線図 ($y(s) = G(s)u(s)$ を表す)

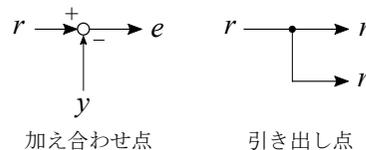


図 4.6: 加え合わせ点 ($e(s) = r(s) - y(s)$) と引き出し点

k を同定するために，ドライバの入力として，次の正弦波関数

$$u(t) = 0.4 \sin 0.3t \text{ [V]} \quad (4.5)$$

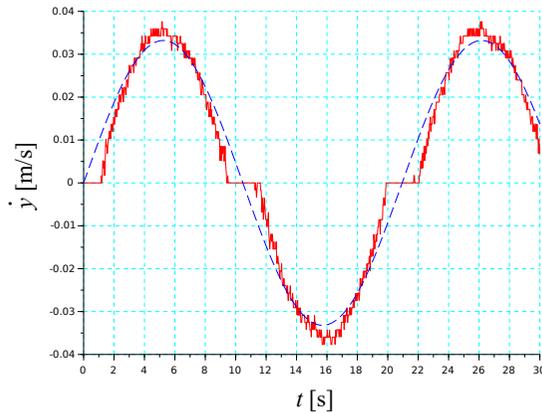


図 4.7: $u(t) = 0.4 \sin 0.3t$ [V] に対する $\dot{y}(t)$, 実線: $\dot{y}(t)$, 破線: $0.083u(t)$

を与えたときの実験結果 ($\dot{y}(t)$) を図 4.7 に示す. $\dot{y}(t)$ は, 時刻 t において計測された $y(t)$ と 1 サンプル前 (サンプリング周期 $\Delta t = 1$ [ms]) に計測された $y(t - \Delta t)$ から近似計算した (差分近似という). すなわち, 次式で求めた.

$$\dot{y}(t) \simeq \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.6)$$

図 4.7 において, $\dot{y}(t)$ のグラフ (実線) と $u(t)$ に係数 k をかけたグラフ (破線) を合わせるように係数 k を調整し

$$k = 0.083 \text{ [m/s/V]} \quad (4.7)$$

を得た. 一般に, k の値は入力 $u(t)$ の振幅の大きさに依存して変化するが, ここでは, (4.7) 式の値を使用する.

図 4.7 から, 本駆動系には不感帯 ($|u(t)| < 0.1$ [V] でモータが止まる) があることがわかる. また, 全体的にも, 出力波形が入力波形からずれている.

次に, 本駆動系の特性を改善するために, 図 4.8 のような速度フィードバック制御系を構成する.

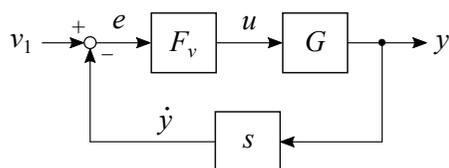


図 4.8: 速度フィードバック補償

同図において, F_v は正の定数, v_1 は新たな入力である. ブロック線図から, v_1 から y までの伝達関数が以下のように計算できる.

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (4.8)$$

$$u(s) = F_v e(s) \quad (4.9)$$

$$e(s) = v_1(s) - sy(s) \quad (4.10)$$

上式から, $\frac{y(s)}{v_1(s)}$ を求めると次式となる.

$$\frac{y(s)}{v_1(s)} = \frac{F_v G(s)}{1 + s F_v G(s)} = \frac{1}{\frac{1}{F_v G(s)} + s} \quad (4.11)$$

特に, $|F_v G(s)| \gg 1$ のとき

$$\frac{y(s)}{v_1(s)} \simeq \frac{1}{s} \quad (4.12)$$

となり, 入出力の伝達関数が, $G(s)$ に関わらず, フィードバック経路の伝達関数(この場合 s) の逆数となる. すなわち, $G(s)$ の特性が変化しても, 常に, (4.12) 式が成り立つという優れたロバスト性 ($G(s)$ の変化が制御系の特性にあまり影響しないこと) を持つ制御系が得られる. これが H. S. Black[12] によって提案された高ゲインフィードバック補償の原理である.

(4.4) 式を (4.11) 式に代入すると次式を得る.

$$\frac{y(s)}{v_1(s)} = \frac{F_v k}{1 + F_v k s} \quad (4.13)$$

理論上, $F_v \rightarrow \infty$ が望ましいが, 実際には, 駆動系のバンド幅(制御できる周波数の範囲), 駆動系のがた, $\dot{y}(t)$ が不完全な時間微分であることなどの制約から, F_v を大きくするには限界がある. 本実験装置では,

$$F_v = 35 \quad (4.14)$$

と設定した. この値は, 種々の F_v に対して実験を行い, 安定した応答が得られる範囲で大きなものとして選ばれた. バンド幅は (4.23) 式の第1式から $\omega_b = F_v k$ となる. (4.7), (4.14) 式を (4.13) 式に代入すると次式を得る.

$$\frac{y(s)}{v_1(s)} = \frac{K_a}{s}, \quad K_a = \frac{F_v k}{1 + F_v k} = 0.744 \quad (4.15)$$

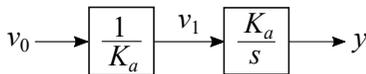


図 4.9: 入出力関係の簡単化

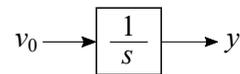


図 4.10: 図 4.9 の等価変換

簡単のため, 新たな入力 v_0 を導入し

$$v_1 = \frac{1}{K_a} v_0 \quad (4.16)$$

とすると (図 4.9), v_0 から y までの伝達関数が次式となる (図 4.10).

$$\frac{y(s)}{v_0(s)} = \frac{1}{s} \quad (4.17)$$

(4.17) 式から

$$s y(s) = v_0(s) \quad (4.18)$$

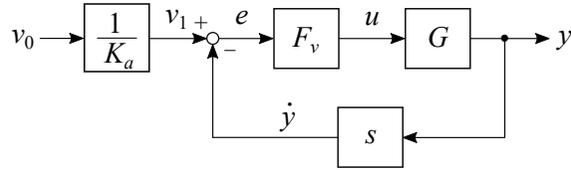


図 4.11: 速度フィードバック補償+ゲイン補償器

これを時間領域で表すと次式を得る.

$$\dot{y}(t) = v_0(t) \quad (4.19)$$

以上の駆動系の補償を図 4.11 にまとめて示す.

図 4.11 の補償を行った上で, 以下の $v_0(t)$ (この振幅 0.035 は図 4.7 の \dot{y} とほぼ同じ振幅になるように決定された)

$$v_0(t) = 0.035 \sin 0.3t \text{ [m/s]} \quad (4.20)$$

を与えたときの $\dot{y}(t)$ の応答を図 4.12 に示す. 同図から, $\dot{y}(t)$ が $v_0(t)$ に高い精度で追従していることがわかる. すなわち, (4.19) 式が高い精度で実現されていると言える. また, 図 4.13 に, 図 4.12 に対応するドライバの速度指令電圧 $|u(t)|$ [V] と図 4.7 に対応する $|u(t)|$ [V] を示す. 速度フィードバック補償により, 特に低速範囲で, より高い電圧がドライバに入力され, モータが止まる時間が短くなっているのがわかる.

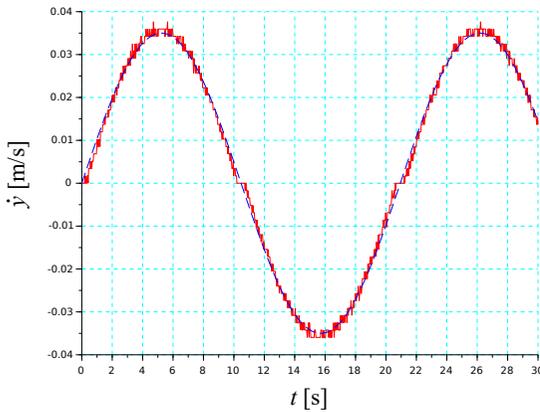


図 4.12: $v_0(t) = 0.035 \sin 0.3t$ [m/s] に対する $\dot{y}(t)$, 実線: $\dot{y}(t)$, 破線: $v_0(t)$

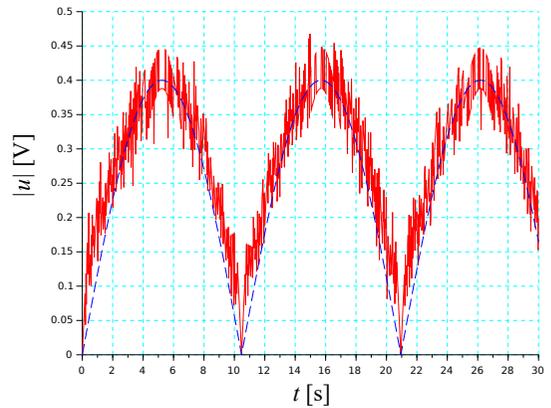


図 4.13: 図 4.12 に対応する $|u(t)|$ (実線) 及び図 4.7 に対応する $|u(t)|$ (破線)

また, $v_0(t)$ を

$$v_0(t) = 0.03 \text{ [m/s]} \quad (4.21)$$

と与えたときの $y(t)$ の応答を図 4.12 に示す. $y(t)$ は $v_0(t)$ の時間積分 $\int_0^t v_0(\tau) d\tau = 0.03t$ にほぼ一致している.

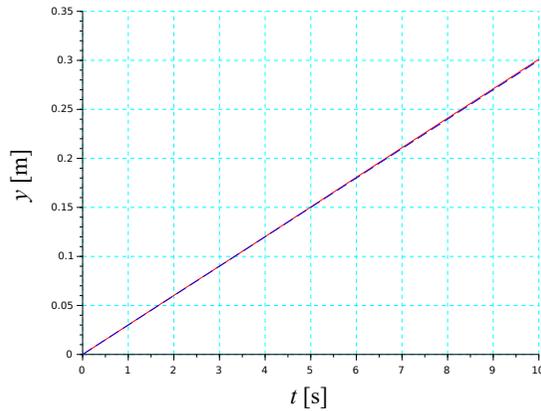


図 4.14: $v_0(t) = 0.03$ [m/s] に対する $y(t)$, 実線: $y(t)$, 破線: $\int_0^t v_0(\tau) d\tau = 0.03t$ [m]

4.2 PI 補償器の利用

上記では F_v を定数としたが, 図 4.15 に示すようにローパスフィルタ付き PI 補償器

$$F_v(s) = \frac{K_p(T_1s + 1)}{T_1s} \cdot \frac{1}{T_2s + 1} \quad (4.22)$$

ただし, 指定するバンド幅を ω_b とすると

$$K_p k = \omega_b, \quad \frac{1}{T_1} \leq \omega_b \leq \frac{1}{T_2} \quad (4.23)$$

を用いれば, 制御性能を向上させたい低周波数域 ($0 \leq \omega < \frac{1}{T_1}$) でより高ゲインとし, ノイズの影響を緩和したい高周波数域 ($\omega > \frac{1}{T_2}$) でゲインをより小さくすることができる [9] (p.25). これにより, $0 \leq \omega < \omega_b$ で $\frac{y(s)}{v_0(s)} \simeq \frac{1}{s}$ となる. $F_v(s) \frac{k}{s}$ のボード線図のゲイン特性を図 4.16 に示す.

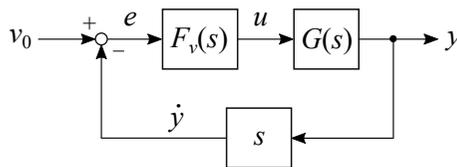


図 4.15: 速度フィードバック補償+PI 補償器

4.3 演習問題

1. (4.11) 式を導出せよ.
2. (4.15) 式を導出せよ.

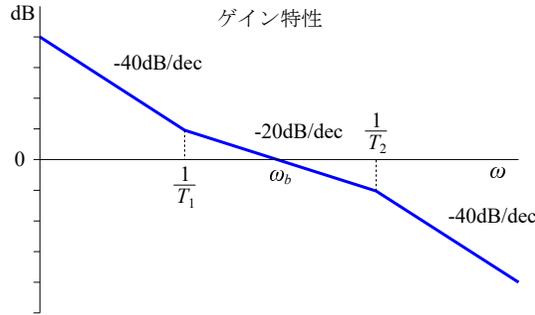


図 4.16: $F_v(s) \frac{k}{s}$ のボード線図 (ゲイン特性)

3. 実験で使用したロータリーエンコーダ (A, B 相, 500P/R) は, 1 回転するとカウンタ値が 2000 カウント変化する. モータのギヤ比は 1/50 であり, タイヤの直径は 54.5 [mm] である. 1 カウント当たりの台車の変位を計算せよ (これが台車変位計測の分解能となる). (答) 0.00171 [mm]
4. 図 4.17 は, 駆動系 $P(s)$ の入力側に入る外乱 d を逆システム $P(s)^{-1}$ とローパスフィルタ (外乱オブザーバ) を用いて推定した \hat{d} を入力側に戻して外乱を除去する機構である [10]. 図 4.17 は図 4.18 へ等価変換できることを示せ.

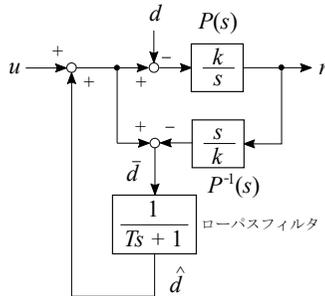


図 4.17: 外乱オブザーバによる外乱除去補償

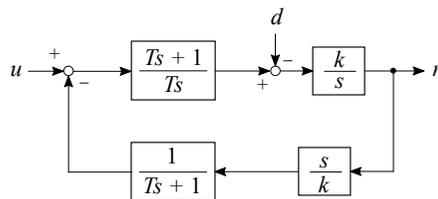


図 4.18: 等価変換されたブロック線図 (PI 補償器による高ゲインフィードバック制御系: $\sqrt{\frac{k}{T}} < \frac{1}{T}$, すなわち, $kT < 1$ のとき低周波数域 $0 \leq \omega < \sqrt{\frac{k}{T}}$ で $\frac{r(s)}{u(s)} \simeq \frac{k}{s}$ となる)

第5章 台車系に対する制御系の設計（2）

台車系の位置決め制御問題に対して，基本的なフィードバック制御（P 制御，PI 制御，IP 制御）を紹介し，それぞれの方法による制御実験結果について考察する¹．P 制御は偏差（目標値と出力（台車の位置）との差），PI 制御は偏差＋偏差の時間積分，IP 制御は出力＋偏差の時間積分をそれぞれフィードバックする制御方法である．P 制御だけでは，台車系の機械摩擦によって，定常的な偏差（定常偏差）が残るので，これを小さくするために I 制御を追加する．また，一般に，駆動系の入力には制限があるが，I 制御と入力制限の組み合わせで，制御系の安定性が悪くなるリセットwindアップと呼ばれる現象が発生する．これに対する有効な制御法として，P 制御系に IMC 法を適用する方法を紹介する．

5.1 P 制御

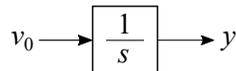


図 5.1: 速度フィードバック補償された台車系の伝達関数

前章の速度フィードバック補償によって，台車系の入力 v_0 から出力 y （台車の変位）までの伝達関数は次式となった．

$$\frac{y(s)}{v_0(s)} = \frac{1}{s} \quad (5.1)$$

このシステムは，入力 $v_0(t)$ を時間積分して出力 $y(t)$ とするので，積分器（その伝達関数は $1/s$ ）と呼ばれる．

一定の入力，例えば， $v_0(t) = 1$ に対する出力 $y(t)$ が一定値に収束するとき，システムは安定といい，一定値に収束しないとき，不安定という． $y(0) = 0$ ， $v_0(t) = 1$ に対する (5.1) 式の解は $y(t) = t$ となるので，このシステムは不安定である．

一定の目標値を与え，その目標値に $y(t)$ が収束する安定な制御系の構成を考える．そのような制御系で使われる簡単な制御は，P 制御と呼ばれる図 5.2 のブロック線図で示されるものである．

図 5.2 において， F_1 は正の定数の設計パラメータである．すなわち，P 制御は次式の $v_0(t)$ を与える．

$$v_0(t) = F_1(r_f - y) \quad (5.2)$$

このように，出力を入力側に戻す制御をフィードバック制御という．

¹P は比例 (Proportional)，I は積分 (Integral) を示す

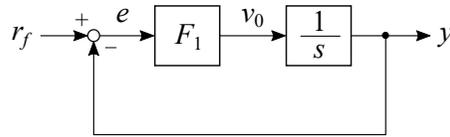


図 5.2: P 制御系

また, 図 5.2 から, r_f から y までの伝達関数が次式と求まる.

$$\frac{y(s)}{r_f(s)} = \frac{F_1}{s + F_1} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5.3)$$

ここで

$$T = \frac{1}{F_1} \quad (5.4)$$

と置いた. T [s] を時定数といい, T を小さく設定すれば, 制御系の応答が速くなる一方, 制御入力 v_0 が大きくなる. P 制御は, (5.2) 式が示すように, 偏差 $e = r_f - y$ に比例した v_0 を与える. 実際, $y(0) = 0$, $r_f = 1$ に対する (5.3) 式の解は $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ となり, $y(t)$ が 1 に収束するので, 制御系は安定であることがわかる.

伝達関数の分母を 0 とする s を伝達関数の極という. 極を p で表す. (5.1), (5.3) 式の極は, それぞれ, 0 , $-\frac{1}{T}$ である. e^{pt} をモードといい, モードが出力に現れる. 極の実部が負のとき, $e^{pt} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ となる. 極によってシステムの安定性を判別でき, 安定性条件は次式とかける.

$$\operatorname{Re} p < 0 \quad (5.5)$$

よって, この条件からも, (5.1) 式のシステムは不安定, (5.3) 式のシステムは安定と判別される.

フィードバック制御によって, 極を移動する制御法を極配置法という. 1 次系 (1 階の微分方程式系) の場合, 出力のフィードバックで極配置が可能であるが, n 次系 (n 階の微分方程式系) の場合, すべての極 (n 個ある) を移動させるには, 出力だけでなく内部変数 (状態) もフィードバックする必要がある.

$T = 0.5$ [s] と設定し, 矩形波状の目標値

$$r_f = 0.02 \operatorname{sgn}(\sin \omega t) \text{ [m]}, \quad \omega = 0.5 \text{ [rad/s]} \quad (5.6)$$

を与えたときの出力 $y(t)$ の応答を図 5.3 に示す. ただし, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ は次式で定義される符号関数である.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

台車系の不感帯 (速度フィードバック補償をしても残っている) のため, 実験結果とシミュレーション結果は一致せず, 実験結果では 1.3 [mm] 程度の定常偏差が残った. この不感帯は, 補償された台車系の数学モデル (5.1) には含まれていない. このような, 数学モデルの実システムとの違いをモデル誤差という.

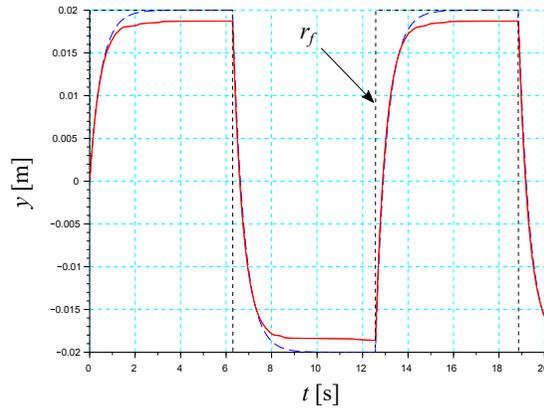


図 5.3: P 制御系の応答：実験結果（実線），シミュレーション結果（破線），目標値（点線）

5.2 PI 制御

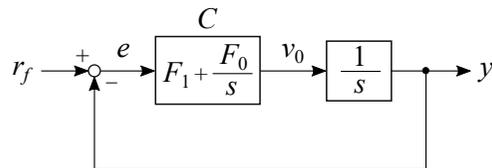


図 5.4: PI 制御系のブロック線図

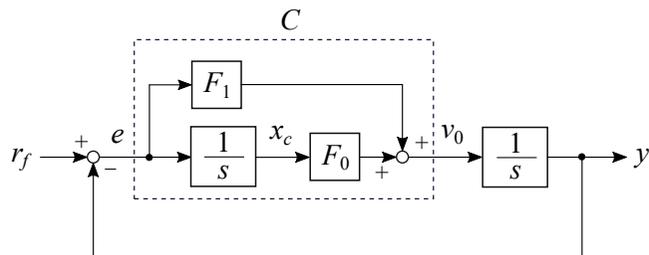


図 5.5: PI 制御系のブロック線図

P 制御に積分動作を追加した PI 制御を考える．PI 制御系のブロック線図を図 5.4 に，また，その等価変換を図 5.5 に示す． $v_0(t)$ は次式で計算される．

$$v_0(t) = F_1 e(t) + F_0 \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.8)$$

ここで，係数 F_0 ， F_1 は設計パラメータである．

前節で考察したように，P 制御だけでは，定常偏差が残る場合がある．そこで，偏差を積分した項を追加して PI 制御とし，定常偏差を 0 にする作用を制御系に持たせた．すなわち，ステップ状の目標値 r_f が与えられたとき，制御系が安定となるように設計されていれば，出力

$y(t)$ が一定値に収束し、コントローラの内部変数 $x_c(t)$ も一定値に収束する。これは、コントローラ内の積分器の入力である偏差 $e(t)$ が 0 に収束することを意味する。しかし、偏差を積分する I 制御の効果は遅れる傾向があり、一般に、I 制御の追加により、制御系の安定性が悪くなる（しばしば出力が振動的になる）。

図 5.5 から、 r_f から y までの伝達関数は

$$\frac{y(s)}{r_f(s)} = \frac{F_1 s + F_0}{s^2 + F_1 s + F_0} \quad (5.9)$$

となり、2次（次数は分母の s の次数）となる。この場合、分子にも s の多項式が現れる。ちなみに、分子 = 0 となる s を伝達関数の零点という。 $y(t)$ の応答は伝達関数の極だけでなく、零点にも関係する。(5.9) 式から、零点は極とは独立に配置できないことがわかる。

今回も、極配置法でコントローラの係数 F_0 , F_1 を設計する。

T を正の定数として、極を $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}\}$ に配置する。すなわち、(5.9) 式の分母を次式とする係数を求める。

$$s^2 + F_1 s + F_0 = \left(s + \frac{1}{T}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{T}s + \frac{1}{T^2} \quad (5.10)$$

これから

$$F_0 = \frac{1}{T^2}, \quad F_1 = \frac{2}{T} \quad (5.11)$$

このとき、(5.9) 式の伝達関数は次式となる。

$$\frac{y(s)}{r_f(s)} = \frac{2Ts + 1}{(Ts + 1)^2} \quad (5.12)$$

この伝達関数の零点は $-\frac{1}{2T}$ である。

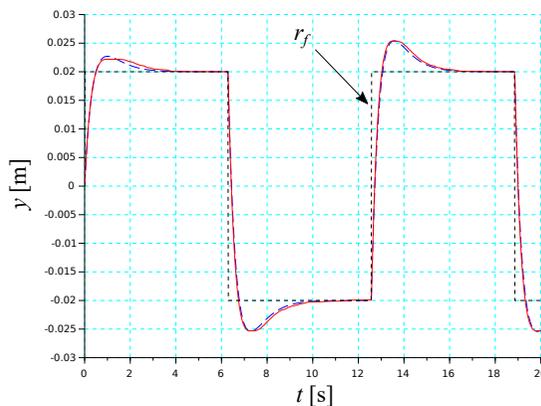


図 5.6: PI 制御系の応答：実験結果（実線），シミュレーション結果（破線），目標値（点線）

$T = 0.5$ [s] と設定し、(5.6) 式の矩形波状の目標値を与えたときの実験結果を図 5.6 に示す。積分動作の効果で、 $y(t)$ の応答が目標値にはほぼ収束している（偏差は 0.1 mm 程度）。しかし、伝達関数に零点があるため、応答にオーバーシュート（行き過ぎ）が現れる。

5.3 IP 制御

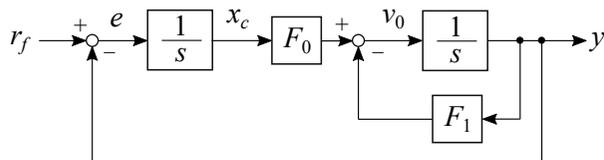


図 5.7: IP 制御系のブロック線図

図 5.7 の IP 制御を考える．PI 制御との違いは，P 制御の演算が偏差 e ではなく出力 y に対して行われているところである． $v_0(t)$ は次式で計算される．

$$v_0(t) = -F_1 y(t) + F_0 \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.13)$$

第 1 項から r_f を外すことによって， $v_0(t)$ の急な変化を避け，オーバーシュートを起こりにくくしている．

図 5.7 から， r_f から y までの伝達関数は次式と計算される．

$$\frac{y(s)}{r_f(s)} = \frac{F_0}{s^2 + F_1 s + F_0} \quad (5.14)$$

これは，(5.9) 式と同じ分母を持つが，零点を持たない．

前節と同様に，(5.14) 式の極を $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}\}$ に配置する係数は

$$F_0 = \frac{1}{T^2}, \quad F_1 = \frac{2}{T} \quad (5.15)$$

となる．このとき，(5.14) 式の伝達関数は次式の 2 次遅れ系となる．

$$\frac{y(s)}{r_f(s)} = \frac{1}{(Ts + 1)^2} \quad (5.16)$$

$T = 0.5$ [s] と設定し，(5.6) 式の矩形波状の目標値を与えたときの実験結果を図 5.8 に示す．PI 制御と同様に，偏差を積分する効果によって，定常偏差を 0.1 mm 程度まで小さく抑えている．さらに， $y(t)$ の応答にオーバーシュートは見られない．

$v_0(t) = \dot{y}(t)$ [m/s] は台車の速度を表す．モータ出力の限界や安全性などの理由から，台車の速度が制限されることがある．許容される最大速度を v_{max} とし， $v_0(t)$ に次式の振幅制限が課せられているとする (図 5.9) ．

$$v_0(t) = \text{sat}(v_1(t), v_{max}) \quad (5.17)$$

ここで， $\text{sat}(\cdot, \cdot)$ は次式で定義される飽和関数である．

$$\text{sat}(x, a) = \begin{cases} a & \text{if } x > a \\ x & \text{if } |x| \leq a \\ -a & \text{if } x < -a \end{cases} \quad (5.18)$$

上記と同じ設計条件 $T = 0.5$ [s] で， $v_{max} = 0.015$ [m/s] とし，矩形波状の目標値

$$r_f = 0.02 \text{sgn}(\sin \omega t) \text{ [m]}, \quad \omega = 0.25 \text{ [rad/s]} \quad (5.19)$$

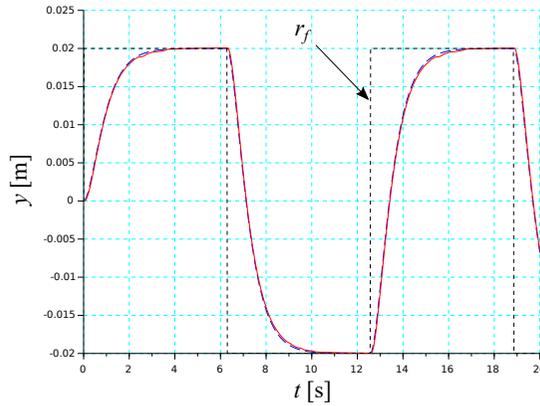


図 5.8: IP 制御系の応答 : 実験結果 (実線), シミュレーション結果 (破線), 目標値 (点線)

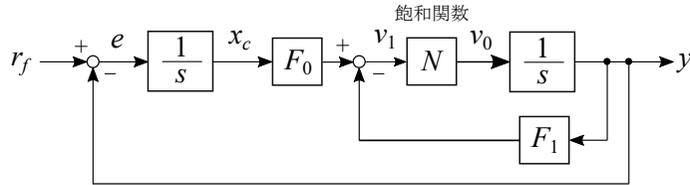


図 5.9: 飽和関数 N がある IP 制御系のブロック線図

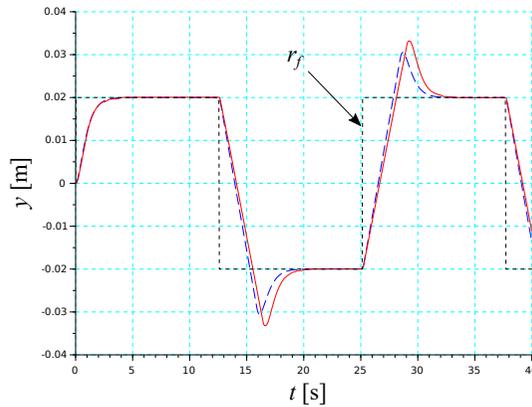


図 5.10: v_0 が飽和する場合の IP 制御系の応答 : 実験結果 (実線), シミュレーション結果 (破線), 目標値 (点線)

を与えたときの出力 $y(t)$ の応答を図 5.10 に示す. $y(t)$ の応答にオーバーシュートが現れ, 応答の収束性が悪くなっている. これは, リセットwindアップと呼ばれ², 積分器を持つコントローラ出力が飽和することで, 偏差の修正動作が遅れ, 制御系の安定性が悪くなる (場合

²リセットは積分器の古い表現である.

によっては不安定になる) 現象として知られている。PI 制御でもリセットwindアップが発生する。

5.4 IMC 法による制御

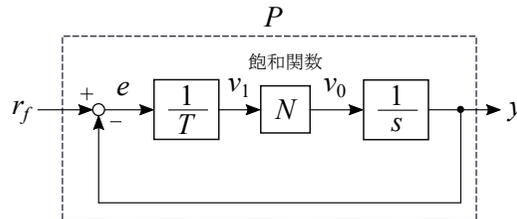


図 5.11: 飽和関数 N がある P 制御系のブロック線図

図 5.11 に示す飽和要素 (飽和関数のブロック) がある P 制御系を考える。この場合, 飽和要素があるにも関わらず制御系は安定となることが知られている。

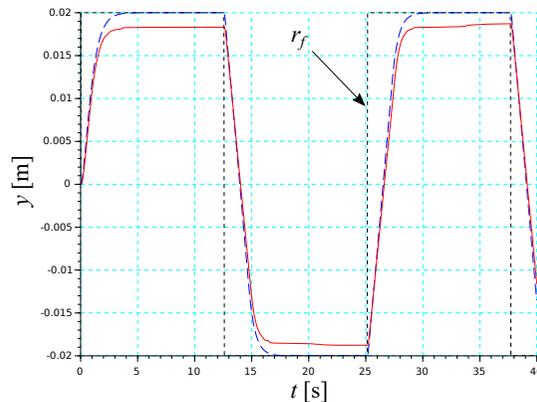


図 5.12: v_0 が飽和する場合の P 制御系の応答: 実験結果 (実線), シミュレーション結果 (破線), 目標値 (点線)

$T = 0.5$ [s], $v_{max} = 0.015$ [m/s] と設定し, (5.19) 式の矩形波状の目標値を与えたときの実験結果を図 5.12 に示す。出力の応答にオーバーシュートは現れないが, コントローラが積分特性を持たないため, 実験結果では, 出力 $y(t)$ が目標値 $r_f(t)$ に収束していない。

そこで, IMC (内部モデル制御, Internal Model Control) 構造を導入して, コントローラに積分特性を持たせる。

上記の制御系で入力を r_f , 出力を y としたときの入出力関係を

$$y = P(r_f) \quad (5.20)$$

と表し, 図 5.13 の IMC 制御系 [8] を構成する。 P_M は P のモデルであり, $C_0(s)$ は安定な伝

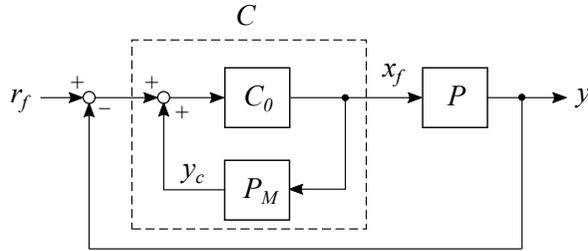


図 5.13: IMC 制御系のブロック線図

達関数 (IMC フィルタ) である. IMC コントローラ C の出力 x_f が P の入力となる.

$$y = P(x_f) \quad (5.21)$$

平衡点近くでは P , P_M は線形系 ($v_0(t)$ が飽和しない) となり, 伝達関数表現できる. それらを $\bar{P}(s)$, $\bar{P}_M(s)$ と記す. 平衡点近くでコントローラ C が積分特性を持つように次式とする.

$$C_0(0) = 1 \quad (5.22)$$

実際, このとき, $\bar{P}_M(0) = 1$ から $C_0(0)\bar{P}_M(0) = 1$ となり

$$C(s) = \frac{C_0(s)}{1 - C_0(s)\bar{P}_M(s)} \quad (5.23)$$

が 0 の極を持つ. ここでは, $C_0(s)$ を次の 1 次遅れ系とする.

$$C_0(s) = \frac{1}{T_f s + 1} \quad (5.24)$$

$T_f > 0$ はフィルタの時定数である.

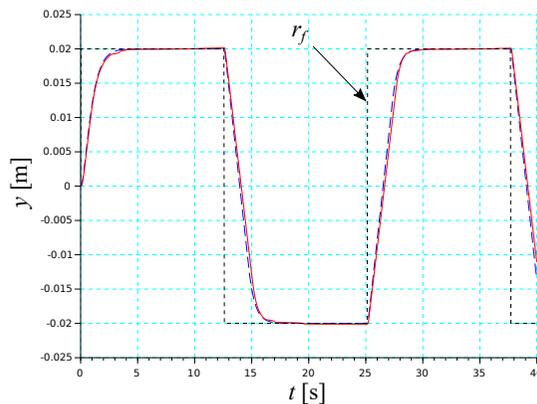


図 5.14: v_0 が飽和する場合の IMC 制御系の応答: 実験結果 (実線), シミュレーション結果 (破線), 目標値 (点線)

この IMC 制御系において, $T = 0.5$ [s], $v_{max} = 0.015$ [m/s], $T_f = 0.5$ [s] と設定し, (5.19) 式の矩形波状の目標値を与えたときの実験結果を図 5.14 に示す. 図 5.14 から, 出力が目標値に収束していることが確認できる. また, オーバーシュートも抑えられている.

IMC 制御系では, $y \neq y_c$ のときだけ, 積分特性を持つコントローラ C が現れ, 必要な修正動作を行うようになっている. このため, リセットウィンドアップが発生しにくいという特長がある. また, $C_0(s)$ と P の安定性により, $P = P_M$ であれば, 制御系も安定となる. ただし, $P \neq P_M$ (一般にそうであるが) の場合の安定性を理論的に保証するのは難しい.

5.5 演習問題

1. 図 5.2 のブロック線図から (5.3) 式の伝達関数を導出せよ.
2. 図 5.5 のブロック線図から (5.9) 式の伝達関数を導出せよ.
3. 図 5.7 のブロック線図から (5.14) 式の伝達関数を導出せよ.
4. 次の用語を説明せよ.
(1) P 制御 (2) PI 制御 (3) IP 制御 (4) 内部モデル制御 (5) リセットウィンドアップ

第6章 台車系に対する制御系の設計（3）

台車系の入力にむだ時間と振幅制限がある場合の位置決め制御問題を考える。まず，制御対象を積分器+むだ時間（1次パデ近似）で近似し，モード分解法を用いて，積分器の部分を安定化する状態フィードバック制御を求める。これによって得られるコントローラは積分特性を持たないので，モデル誤差や外乱がある場合，出力に定常偏差が残る。この問題を解決するために，制御系全体に対してIMC法を適用し，コントローラに積分特性を持たせる。比較のため，SIMC法で設計したPI補償器による制御実験も行う。

6.1 モード分解法による安定化

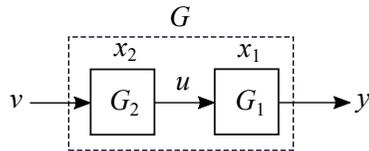


図 6.1: 制御対象のブロック線図

台車系の入力部にむだ時間がある場合の制御を考える（図 6.1）。

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (6.1)$$

ここで

$$G_1(s) = \frac{k}{s}, \quad G_2(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls} \quad (6.2)$$

$G_1(s)$ が台車系， $G_2(s)$ がむだ時間系（1次パデ近似）を表す。今回，入力部にむだ時間があるという設定なので，第4章で行った速度フィードバック補償は行えないことに注意する。

物理的な理由（モータ出力に制限があるなど）または運転条件（安全面から台車の速度を制限したいなど）から，入力 $v(t)$ には次の制限が課せられているとする。

$$|v(t)| \leq v_{max} \quad (6.3)$$

v_{max} は与えられる正の定数である。

問題は，出力 $y(t)$ （台車の変位）を一定の目標値 r_f に速やかに近づける制御則を求めることである。一般性を失うことなく， $r_f = 0$ とする。

モード分解法は，制御対象の一部の極を状態フィードバックによって移動するというものである。むだ時間がある場合，むだ時間は本来改善できないので，むだ時間を表す $G_2(s)$ の極

は不変とし、 $G_1(s)$ の極のみを移動するというモード分解法が妥当な制御方法であることが知られている [4].

以下では、まず、 $G_1(s)$ の極のみを移動する状態フィードバック制御を単に飽和させるという制御を求める。一般に、系を安定にする線形状態フィードバック制御を単に飽和させたとき、制御系の安定性は保証されない。しかし、 $G_1(s) = \frac{k}{s}$ の場合、制御入力が飽和しても安定となることが知られている。

$G_2(s)$ を

$$G_2(s) = \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} + d \quad (6.4)$$

と整理し、 $G_2(s)$ の状態を x_2 とすると、この状態方程式は次式で表されることに注意する [2].

$$\dot{x}_2(t) = -a_0 x_2(t) + v(t) \quad (6.5)$$

$$u(t) = b_0 x_2(t) + dv(t) \quad (6.6)$$

同様に、 $G_1(s)$ の状態を x_1 とし、(6.1) 式を状態方程式で表すと次式を得る。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (6.8)$$

$G_1(s)$ の極 0 のみを移動させる状態フィードバックを求めるため、上式を対角化する。

座標変換

$$z = Sx, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

を適用すると次式を得る。

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$y = \begin{bmatrix} k & -2k \end{bmatrix} z(t) \quad (6.11)$$

z_1 部分系の極 (固有値) を指定極 $p_1 < 0$ に配置する状態フィードバック制御 ($v_l(t)$ で表す) は次式と求まる。

$$v_l(t) = F_1 z_1(t), \quad F_1 = p_1 \quad (6.12)$$

$v(t)$ は $v_l(t)$ を単に飽和させた制御として次式とする。

$$v(t) = \text{sat}(v_l(t), v_{max}) \quad (6.13)$$

$v(t)$ の計算には $z_1(t)$ が必要であるが、これは測定できないので、その推定 $\hat{z}_1(t)$ を用いる。

$y(t)$ が測定可能なので、 $x_1(t)$ は (6.8) 式から

$$x_1(t) = \frac{1}{k} y(t) \quad (6.14)$$

と得られる。また、 $x_2(t)$ の推定 $\hat{x}_2(t)$ は次式（低次元オブザーバで、(6.7) 式の第 2 式である。 $G_2(s)$ のモードを制御しないためオブザーバゲインを 0 としている [6]）を実時間で解くことにより計算する。

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = -\frac{2}{L}\hat{x}_2(t) + v(t) \quad (6.15)$$

結局、 $\hat{z}_1(t)$ は (6.9) 式から

$$\hat{z}_1(t) = x_1(t) + 2\hat{x}_2(t) \quad (6.16)$$

と得られる。

r_f が 0 でない場合、上記の制御則で $y(t)$ が r_f に収束するように $v_l(t)$ を次式とする¹。

$$v_l(t) = F_1 \hat{z}_1(t) + v_0 \quad (6.17)$$

ただし

$$v_0 = \frac{r_f}{T_{y,v_0}(0)} \quad (6.18)$$

$T_{y,v_0}(0)$ は v_0 から y までの伝達関数 $T_{y,v_0}(s)$ の $s=0$ の値（ステップ応答の最終値）である。 $T_{y,v_0}(s)$ は次式で計算できる。

$$T_{y,v_0}(s) = \tilde{C}\{sI_2 - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})\}^{-1}\tilde{B} \quad (6.19)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} k & -2k \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.2 IMC 制御系の構成

上記の制御則は積分特性を持たないため、外乱やモデル誤差によって出力 $y(t)$ に偏差が生じる可能性がある。一方、積分器を導入した場合、入力飽和との組み合わせでリセットウィンドアップが生じることが知られている [5]。この問題点を改善するため、IMC 構造を導入してコントローラに積分特性を持たせる方法を採用する [8]。

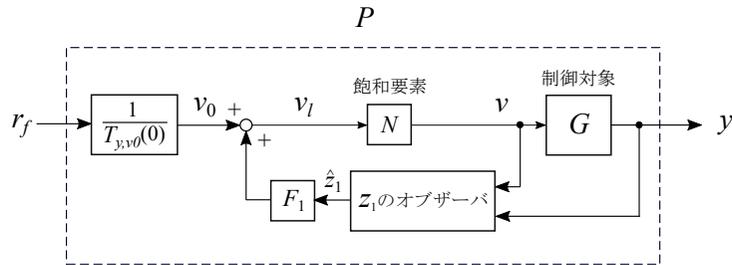


図 6.2: P の構造を表すブロック線図

¹ $\frac{y(s)}{v_0(s)} = T_{y,v_0}(s)$ である。ラプラス変換の最終値の定理から、 $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s T_{y,v_0}(s) \frac{v_0}{s} = r_f$ (v_0 はステップ関数なので、そのラプラス変換は $\frac{v_0}{s}$)。これを v_0 について解くと (6.18) 式を得る。

上記の制御系で入力を r_f 、出力を y としたときの入出力関係を

$$y = P(r_f) \quad (6.20)$$

と表す。図 6.2 に P の構造を示す。 P に対して、図 6.3 の IMC 制御系を構成する。 P_M は P のモデルであり、 $C_0(s)$ は安定な伝達関数 (フィルタ) である。 IMC コントローラ C の出力 x_f が P の入力となる。

$$r = P(x_f) \quad (6.21)$$

平衡点近くでは P , P_M , C が線形系となり、伝達関数表現できる。それらを $\bar{P}(s)$, $\bar{P}_M(s)$, $\bar{C}(s)$ と記す。ここでは、 $C_0(s)$ を次の 1 次遅れ系とする。

$$C_0(s) = \frac{1}{T_f s + 1} \quad (6.22)$$

$T_f > 0$ はフィルタの時定数である。このとき

$$C_0(0) = 1 \quad (6.23)$$

であるので、コントローラ C は平衡点近くで積分特性を持つ。実際、 $\bar{P}_M(0) = 1$ から $C_0(0)\bar{P}_M(0) = 1$ となり、 $\bar{C}(s) = \frac{C_0(s)}{1 - C_0(s)\bar{P}_M(s)}$ が 0 の極を持つことがわかる。

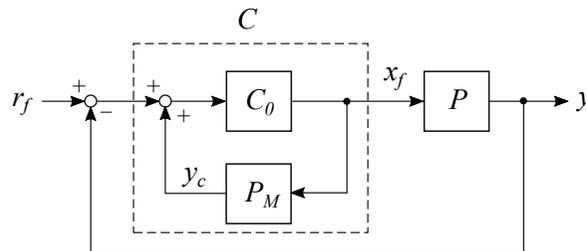


図 6.3: P に対する IMC 制御系のブロック線図

6.3 シミュレーション及び実験結果

まず、台車系の伝達関数 $G_1(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s}$ の k を同定する²。ステップ入力 $u = 0.4 \text{ V}$ に対する台車系の変位 $y(t)$ を図 6.4 に示す。10 秒間で y が 0.518 [m] 移動した。これから、 k が

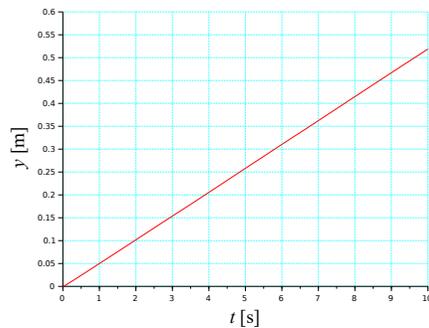
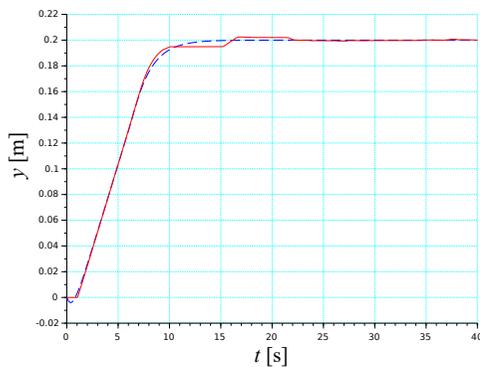
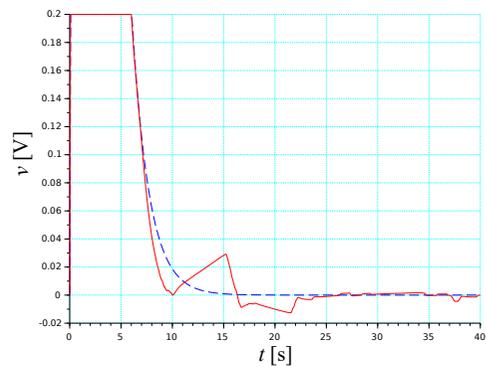
$$k = \frac{0.518 \text{ [m]}}{10 \text{ [s]} \times 0.4 \text{ [V]}} \simeq 0.13 \text{ [m/sV]} \quad (6.24)$$

と得られた。

むだ時間は $L = 1 \text{ [s]}$ とし、入力 $v(t)$ を Arduino プログラムで遅延させることで作った。サンプリング周期は $\Delta t = 0.01 \text{ [s]}$ とした³。

²台車系の不感帯を小さくするため、ドライバの速度指令電圧は 0.12 [V] を上乘せし $|u| + 0.12 \text{ [V]}$ とした。

³速度フィードバック補償を行う場合、近似微分の精度を上げるため、 $\Delta t = 0.001 \text{ [s]}$ としたが、 $L = N\Delta t$ の N を不都合な程大きくしないため (N が大きくなるとメモリーや実行時間が大きくなる) この値とした。

図 6.4: 台車系のステップ応答: $u(t) = 0.4$ [V]図 6.5: 出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)図 6.6: 入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

目標値 r_f , $v(t)$ の振幅制限 v_{max} , 指定極 p_1 , フィルタの時定数 T_f は以下のように与えた.

$$r_f = 0.2 \text{ [m]}, \quad v_{max} = 0.2 \text{ [V]}, \quad p_1 = -0.6, \quad T_f = 0.2 \text{ [s]} \quad (6.25)$$

実験およびシミュレーション結果を図 6.5, 図 6.6 に示す. 入力 $v(t)$ が飽和しているにもかかわらず, 出力 $y(t)$ はオーバーシュートなく, ほぼ目標値に収束している. IMC 構造による積分特性のため, 定常偏差が小さくなり (1 [mm] 以下), リセットwindアップを回避できている.

比較のため, PI 制御系 (図 6.7) に対する実験およびシミュレーション結果を図 6.8, 図 6.9 に示す. r_f と v_{max} は上記と同じとした. SIMC 法 [15] を用いて PI 補償器 $C(s)$ を設計した.

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (6.26)$$

$$K_P = \frac{1}{k(T_c + L)}, \quad T_I = 4(T_c + L), \quad T_c = L \quad (6.27)$$

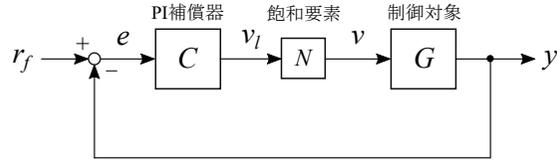
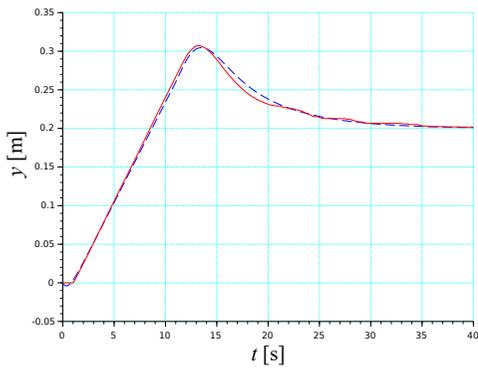
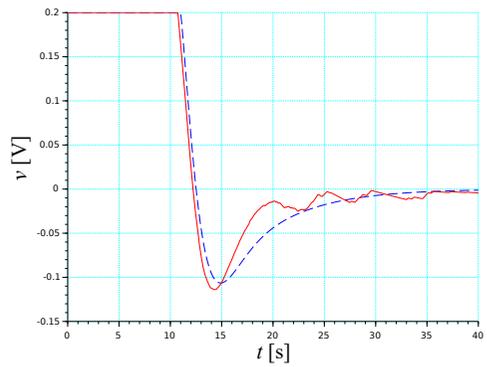


図 6.7: PI 制御系

補償器の積分作用によって、 $y(t)$ はほぼ目標値に収束しているが、リセットwindアップによる大きなオーバーシュートが見られる。

図 6.8: 出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)図 6.9: 入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

6.4 演習問題

1. (6.1) 式の $G(s)$ に対応する状態方程式が (6.7), (6.8) 式となることを示せ。
2. 座標変換 (6.9) によって、状態方程式 (6.7), (6.8) が (6.10), (6.11) に変換されることを示せ。
3. z_1 部分系の極を指定極 p_1 に配置する状態フィードバック制御が (6.12) 式となることを示せ。

第7章 倒立振り子系に対する制御系の設計 (1)

台車系に振り子を取り付けた装置を倒立振り子系といい、特に、現代制御理論の検証用によく利用される。本章では、状態フィードバック制御による倒立振り子系の安定化問題を考える。予め、台車系を安定化した後、振り子部（2次系）を安定化するという2段階法によって問題を解く。これによって、4次系に対する安定化問題を2次系に対する安定化問題に単純化する。台車系は、第5章で紹介した速度フィードバック・ゲイン補償及びIP制御によって、ロバストに安定化する。振り子部については、最適レギュレータを利用する方法または不安定モードのみを制御する方法によって、望ましい極の位置を求め、極配置法により状態フィードバックゲインを求める。また、これらの方法によって設計した制御則を適用したシミュレーション及び実験結果を示す。

7.1 運動方程式と問題の記述

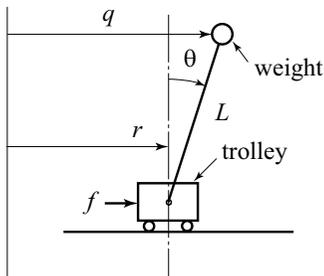


図 7.1: 倒立振り子系



図 7.2: 倒立振り子系実験装置

図 7.1 のように、台車系に自由に回転する振り子を取り付けた装置を倒立振り子系という。台車を水平方向に動かすことによって、振り子を倒立点で安定化するという制御問題を考える。

M [kg] は台車の質量、 m [kg] は振り子の重りの質量、 L [m] は振り子長、 f [N] は台車駆動力である。また、 r [m] は台車の変位、 θ [rad] は真上から測った振り子の角変位である。振り子の棒の質量及び各部分の散逸力（摩擦力）は無視する。

ラグランジュ法などにより系の運動方程式は次式と求まる [16]。

$$mL^2\ddot{\theta}(t) - mgL \sin \theta(t) + mL\ddot{r}(t) \cos \theta(t) = 0 \quad (7.1)$$

$$(M+m)\ddot{r}(t) + mL\ddot{\theta}(t)\cos\theta(t) - mL\dot{\theta}(t)^2\sin\theta(t) = f(t) \quad (7.2)$$

g [m/s²] は重力加速度である. (7.1), (7.2) 式はそれぞれ θ と r に関する運動方程式である. $|\theta|$ が十分小さいとして, (7.1) 式を

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{L}\theta(t) - \frac{1}{L}\ddot{r}(t) \quad (7.3)$$

と線形化し, 次の変数を導入する.

$$q(t) = r(t) + L\theta(t) \quad (7.4)$$

ω_n を

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (7.5)$$

と定義し¹, (7.3) 式に注意すると次式を得る.

$$\ddot{q}(t) = \ddot{r}(t) + L\ddot{\theta}(t) = g\theta = \omega_n^2(q(t) - r(t)) \quad (7.6)$$

(7.6) 式から, r から q までの伝達関数 ($G_1(s)$ と記す) を求めると次式を得る.

$$G_1(s) = \frac{q(s)}{r(s)} = \frac{-\omega_n^2}{s^2 - \omega_n^2} \quad (7.7)$$

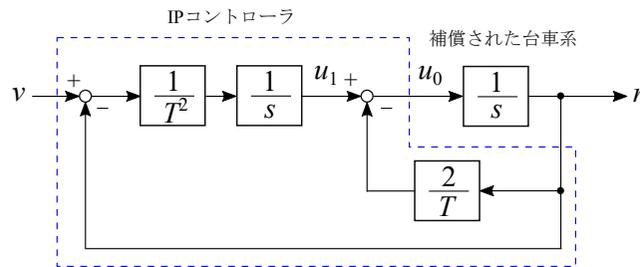


図 7.3: 2次遅れ系に補償された台車系のブロック線図

また, r に関する運動方程式については, まず, $M \gg m$ と仮定して振り子からの力の項 ((7.2) 式左辺の第2項と第3項) を無視する. さらに, 新たな入力を $v(t)$ とし, 図 7.3 に示すように, 速度フィードバック・ゲイン補償及び IP 制御 (第5章参照) により入出力の伝達関数が次式の2次遅れ系 ($G_2(s)$ と記す) となるように補償しておく.

$$G_2(s) = \frac{r(s)}{v(s)} = \frac{1}{(Ts+1)^2} \quad (7.8)$$

T [s] > 0 は2次遅れ系の時定数で設計パラメータである. T は駆動系のバンド幅の範囲で, できるだけ小さく与える. (7.7), (7.8) 式から, 図 7.4 のブロック線図を得る.

問題は, 倒立振り子系を安定化させ, かつ出力を $q=0$ から $q=r_f$ へ移動させる制御系を設計することである. 一般性を失うことなく, $r_f=0$ とおく.

¹ ω_n は振り子を下振りにしたときの固有角振動数である.

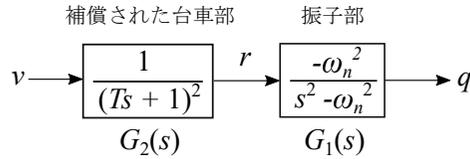


図 7.4: 台車系を補償した後の倒立振り子系のブロック線図

本問題は出力を目標値に追従させるサーボ問題である。サーボ問題が解けるための必要条件は、制御対象の伝達関数が原点に零点を持たないことである²。本問題の場合、入出力の伝達関数は

$$\frac{q(s)}{v(s)} = \frac{-\omega_n^2}{(Ts+1)^2(s^2-\omega_n^2)} \quad (7.9)$$

であり、零点を持たないのでこの条件を満たす。

7.2 制御系の設計法

状態を

$$x = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r & u_1 \end{bmatrix}' \quad (7.10)$$

と選ぶと、(7.7), (7.8) 式 (図 7.4) は次の状態方程式で表される。 u_1 は図 7.3 の IP コントローラ内の変数である。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (7.11)$$

$$q(t) = Cx(t) \quad (7.12)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

制御則は、次の簡単な状態フィードバック制御

$$v(t) = -Fx(t), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

とし、フィードバックゲイン F を極配置法によって設計する。一入力系の場合、制御系の極 ($A - BF$ の固有値で 4 つある) を指定すれば F が一意に決まるので、 F の設計問題を極配置問題に置き換えることができる。

$G_2(s)$ はすでに十分安定化されているので、この極 $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}\}$ は変えないことにする。 $G_1(s)$ の極 $\{-\omega_n, \omega_n\}$ の配置法について、以下の二つの方法を検討する。

²制御対象が原点に零点を持つとき、 $\frac{1}{s}$ を含むコントローラを前に置くと、極零点消去が生じ、0 極が制御できない不安定極として残る。

(1) 最適レギュレータを利用する方法

$G_1(s)$ 部分系では, $r(t)$ が入力, $q(t)$ が出力である. $r(t)$ の振幅を小さく抑えながら振り子を安定化する制御を求めたい. そのため, 次の2次形式評価関数を最小化する制御を考える.

$$J = \int_0^{\infty} \{ \rho q(t)^2 + r(t)^2 \} dt, \quad \rho > 0 \quad (7.14)$$

$\rho \rightarrow 0$ のとき, 入力エネルギー ($r(t)$ の2乗積分) を最小にする最適制御が得られる.

$G_1(s)$ 部分系の状態を

$$x_u = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

とすると, この状態方程式は次式で表される.

$$\dot{x}_u(t) = A_u x_u(t) + B_u r(t) \quad (7.16)$$

$$q(t) = C_u x_u(t) \quad (7.17)$$

ただし

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad C_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

最適制御は次式で与えられる [17], [18].

$$r(t) = -F_\rho x_u(t), \quad F_\rho = B_u' P = - \left[1 + \sqrt{1 + \rho} \quad \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \rho}}}{\omega_n} \right] \quad (7.18)$$

ただし, $P(2 \times 2)$ はリカッチ方程式

$$A_u' P + P A_u + \rho C_u' C_u - P B_u B_u' P = 0 \quad (7.19)$$

の正定行列解である. $\rho \rightarrow 0$ のとき

$$r(t) = -F_0 x_u(t), \quad F_0 = - \left[2 \quad \frac{2}{\omega_n} \right] \quad (7.20)$$

となり, (7.20) 式を (7.16) 式に代入して得られるフィードバック系は次式となる.

$$\dot{x}_u(t) = (A_u - B_u F_0) x_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\omega_n \end{bmatrix} x_u(t) \quad (7.21)$$

この系の極 ($A_u - B_u F_0$ の固有値) は $\{-\omega_n, -\omega_n\}$ である.

以上から, 以下の指定極が得られた.

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\omega_n \right\} \quad (7.22)$$

$A - BF$ の固有値をこれらの指定極とするフィードバックゲイン F は極配置法 [17], [18] によって求めることができる.

(2) 不安定モードのみを制御する方法

まず, 座標変換

$$z_u(t) = S_u x_u(t), \quad z_u = \begin{bmatrix} z_{u1} \\ z_{u2} \end{bmatrix}, \quad S_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_n & -\omega_n \end{bmatrix}, \quad S_u = \frac{1}{2\omega_n} \begin{bmatrix} \omega_n & 1 \\ \omega_n & -1 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

により (7.16) 式を対角化する.

$$\dot{z}_u(t) = \begin{bmatrix} \omega_n & 0 \\ 0 & -\omega_n \end{bmatrix} z_u(t) + \begin{bmatrix} -\frac{\omega_n}{2} \\ \frac{\omega_n}{2} \end{bmatrix} r(t) \quad (7.24)$$

安定な極 $-\omega_n$ は不変とし, 不安定な極 ω_n を $-\mu$ (μ は正の実数) に移動して安定化する. これを行うフィードバック制御は次式である.

$$r(t) = \frac{2}{\omega_n} (\omega_n + \mu) z_{u1}(t) \quad (7.25)$$

実際, 上式を (7.24) 式の 1 番目の式に代入すると次式となる.

$$\dot{z}_{u1}(t) = -\mu z_{u1}(t) \quad (7.26)$$

与えられる初期値 $z_{u1}(0)$ に対する (7.26) 式の解 $z_{u1}(t) = e^{-\mu t} z_{u1}(0)$ を (7.25) 式に代入すると, $r(t)$ が次式と得られる³.

$$r(t) = \frac{2}{\omega_n} (\omega_n + \mu) e^{-\mu t} z_{u1}(0) \quad (7.27)$$

$r(t)$ の振幅を小さくするには, $\mu > 0$ の範囲で

$$\frac{2}{\omega_n} (\omega_n + \mu) \quad (7.28)$$

を小さくすればよい. よって, ϵ を小さい正数とし, $\mu = \epsilon$ とする.

以上から, 以下の指定極が得られた (同様の極配置となる制御則が文献 [19] に示されている).

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\epsilon \right\} \quad (7.29)$$

状態フィードバック制御 $v(t) = -Fx(t)$ では, 状態 $x(t)$ が必要となる. r と θ はセンサーによって計測するので, $q = r + L\theta$ は入手可能である. u_1 はコントローラの内部変数なので入手可能である. \dot{q} は計測しないので, $G_1(s)$ 部分系に対するオブザーバにより推定する. この部分系に対するオブザーバは次式で与えられる [17], [18].

$$\dot{\hat{x}}_u(t) = (A_u - KC_u)\hat{x}_u(t) + B_u r(t) + Kq(t) \quad (7.30)$$

$K(2 \times 1)$ は $A_u - KC_u$ を安定行列にするオブザーバゲインである.

r_f が 0 でない場合, $q(t)$ が r_f に収束するように $v(t)$ を次式とする.

$$v(t) = -Fx(t) + v_0 \quad (7.31)$$

³この制御は z_{u2} 部分系にも入るが, z_{u2} 部分系は安定なので, 有界 (振幅が有限) で 0 に収束する $r(t)$ が入力されても $z_{u2}(t) \rightarrow 0$ となる.

ただし

$$v_0 = \frac{r_f}{T_{q,v_0}(0)} \quad (7.32)$$

$T_{q,v_0}(0)$ は v_0 から q までの伝達関数 $T_{q,v_0}(s)$ の $s=0$ の値 (ステップ応答の最終値) である. $T_{q,v_0}(s)$ は次式で計算できる.

$$T_{q,v_0}(s) = C\{sI_4 - (A - BF)\}^{-1}B \quad (7.33)$$

I_4 は 4×4 の単位行列である.

7.3 シミュレーション及び実験結果

実験に使用した振り子のパラメータは次のとおりである.

$$\omega_n = 6.22 \text{ [rad/s]}, \quad L = \frac{g}{\omega_n^2} = 0.254 \text{ [m]}, \quad g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

ω_n は振り子の自由振動から求めた. L は ω_n から計算した等価的な振り子長である. 台車系の時定数 T は $T = 0.2$ [s] と設定した. オブザーバゲイン K は, $A_u - KC_u$ の固有値が $\{-\omega_n, -\omega_n\}$ となるように与えた. F や K などは Scilab で計算した.

目標値 $r_f(t)$ は, 速度の上限を 0.04 [m/s] とした 1 次遅れ系の出力として与えた. $r_f(t)$ を生成するブロック線図を図 7.5 に示す. T_0 は $T_0 = 0.2$ [s] とした. 関数 $r_0(t)$ として, 次の矩形波を与えた.

$$r_0 = a_0 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.15 \text{ [m]}, \quad \omega = 0.15 \text{ [rad/s]} \quad (7.34)$$

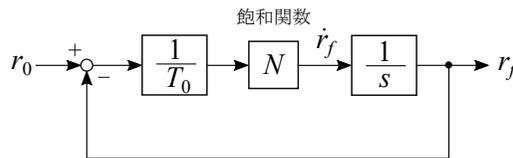


図 7.5: 飽和のある 1 次遅れ系のブロック線図 (飽和関数の振幅制限は 0.04 [m/s] とした)

方法 (1) を適用した場合のシミュレーション及び実験結果を図 7.6, 図 7.7 に示す. 指定極は以下のとおりである.

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\omega_n \right\} = \{-5, -5, -6.22, -6.22\}$$

θ はほぼ真上に保たれ (θ の計測の分解能は 0.00677 [rad] = 0.388° である), 系は良好に安定化されている. しかし, コントローラに積分特性がないため, $q(t)$ に追従誤差が残っている. この偏差の一因として, θ の基準点 (ゼロ点) のずれがある. 実験では, 手で振り子を立たせた状態にして制御を開始したので, θ の基準点がずれた. このずれがフィードバック制御に影響し, 結果として, $q(t)$ に偏差が生じると考えられる. 毎回, このずれが少しずつ違ってくるので, $q(t)$ の応答もそれに応じて変化した.

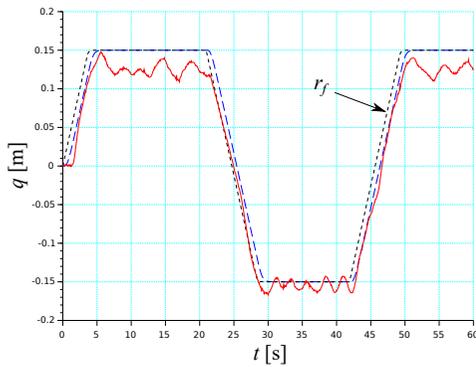


図 7.6: 方法 (1) による出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

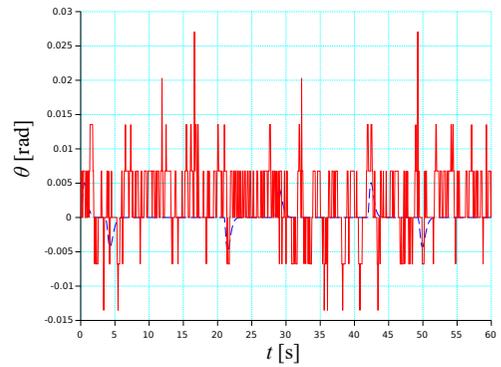


図 7.7: 方法 (1) による振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

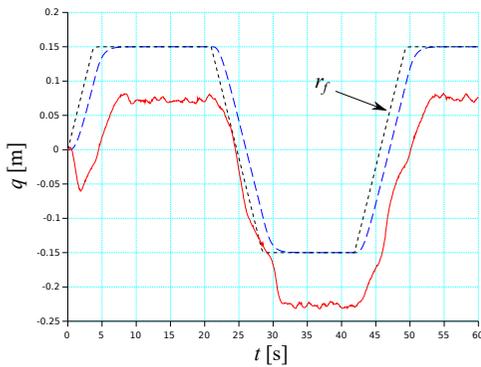


図 7.8: 方法 (2) による出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

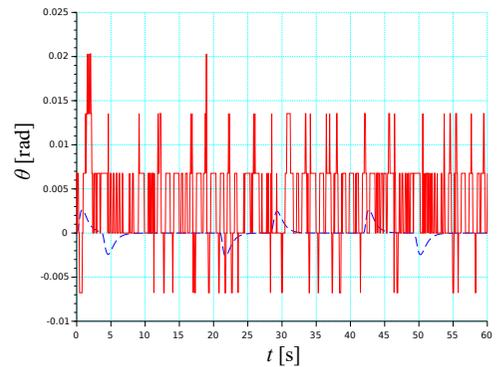


図 7.9: 方法 (2) による振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

方法 (2) を適用した場合のシミュレーション及び実験結果を図 7.8, 図 7.9 に示す. 指定極は以下のとおりである.

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\omega_n, -0.2\omega_n \right\} = \{-5, -5, -6.22, -1.244\}$$

本制御則は, 4 番目の極を 0 に近づけると, 安定化領域がより大きくなる (より大きな $|\theta(0)|$ に対して安定化できる) とされる. 実験では, θ の基準点のずれの影響をより受けやすくなることが確認された. 4 番目の極を $-0.1\omega_n$ とすると, $q(t)$ が振動的になり, それ以上 0 に近づけると不安定になった. これらから, 4 番目の極を 0 に近づけすぎると, モデル誤差や状態の計測誤差の影響を受けやすくなると考えられる.

7.4 演習問題

1. 図 7.3 のブロック線図を等価変換して v から r までの伝達関数 $G_2(s) = \frac{r(s)}{v(s)}$ を求めよ.
2. 図 7.4 のブロック線図を状態方程式で表せ. ただし, 状態は次式とする.

$$x = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r & u_1 \end{bmatrix}'$$

3. (7.18) 式の F_ρ を導出せよ.
4. $A_u - KC_u$ の固有値を $\{-\omega_n, -\omega_n\}$ に配置するオブザーバゲイン K を求めよ.
5. 図 7.10 のブロック線図を等価変換して v から r までの伝達関数 $G_2(s) = \frac{r(s)}{v(s)}$ を求めよ⁴.

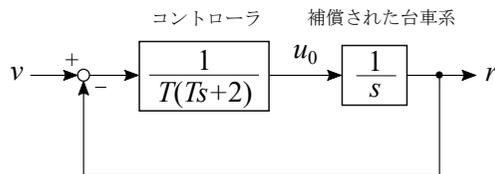


図 7.10: 2次遅れ系に補償する台車系のブロック線図

⁴本方式による台車系の補償は, コントローラがフィルタとしても機能するので, r にセンサノイズがある場合に有効である.

第8章 倒立振り子系に対する制御系の設計 (2)

再度，倒立振り子系に対して前章と同じ問題を考える．出力を目標値に追従させる制御系をサーボ系といい，サーボ系を設計する問題をサーボ問題という．制御工学Iで，フィードバック制御系において，ステップ状の目標値に対する定常偏差を0とするためには，前向き経路の伝達関数が積分器を少なくとも一つ含む必要がある（すなわち1型以上）という議論があった．前章で見たように，コントローラが積分器を持たない場合でも，目標値にゲインをかけて定常偏差を0にできるが，モデル誤差や計測誤差がある場合，0にできない．偏差（目標値と出力との差）をロバストに小さくしたい場合，コントローラに積分特性を持たせることが有効である．ここでは，コントローラに積分特性を持たせる方法として，コントローラに積分器を追加する方法とIMC構造を導入する方法を紹介する．また，これらの方法によって設計した制御則を適用したシミュレーション及び実験結果を示す．

8.1 IP型制御系の設計法

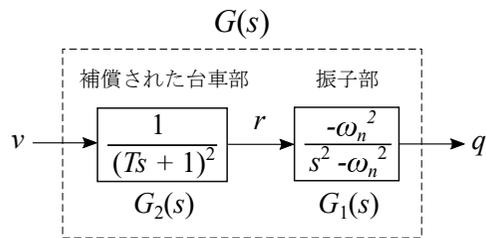


図 8.1: 台車系を補償した後の倒立振り子系のブロック線図

前章と同様に，台車系を2次遅れ系として補償した後の倒立振り子系を制御対象と考え，その伝達関数を $G(s)$ と表す（図 8.1）．

$$G(s) = \frac{q(s)}{v(s)} \quad (8.1)$$

$G(s)$ の状態方程式は (7.11)，(7.12) 式で表される．

前章で設計した制御系のブロック線図を図 8.2 に示す（オブザーバは省略した）．この制御系は，偏差 $r_f(t) - q(t)$ に対する積分項を持たないので，モデル誤差などにより偏差が残るといった問題がある．

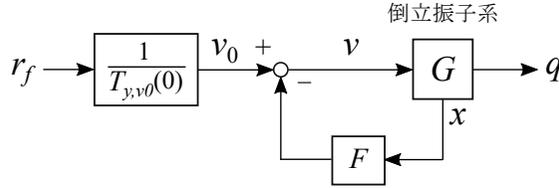


図 8.2: 第 7 章で設計した制御系

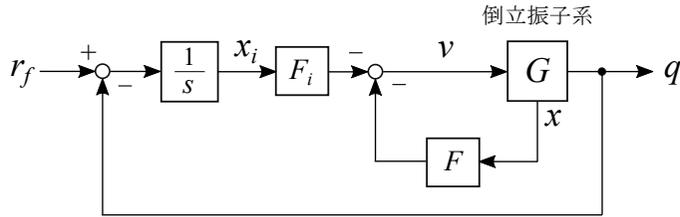


図 8.3: IP 型制御系

そこで、図 8.3 のように偏差を積分する形で積分器を追加した IP 型制御系を考える。追加した積分器の出力を x_i とすると次式を得る。

$$\dot{x}_i(t) = r_f - q = r_f - Cx(t) \quad (8.2)$$

x と x_i を併合した状態を

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} q & \dot{q} & r & u_1 & x_i \end{array} \right]' = \left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_i \end{array} \right]' \quad (8.3)$$

とする。 x_a に関する状態方程式は次式となる。

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a v(t) + B_r r_f \quad (8.4)$$

$$q(t) = C_a x_a(t) \quad (8.5)$$

ただし

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \\ 0 \end{array} \right]$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

制御則は次式の状態フィードバック制御とする。

$$v(t) = -F_a x_a(t) = -Fx(t) - F_i x_i(t) \quad (8.6)$$

ただし, F_a を次式と分割した.

$$F_a = \begin{bmatrix} F & F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & | & f_5 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

F_a の設計には極配置法または最適レギュレータ法が利用できる.

8.2 IMC 構造を持つ制御系の設計法

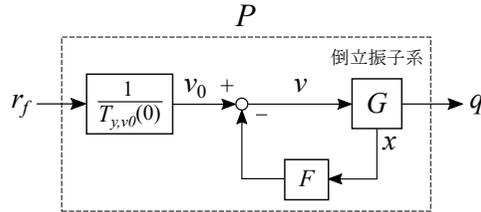


図 8.4: 第 7 章で設計した制御系

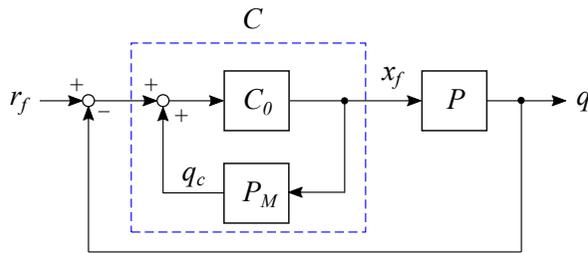


図 8.5: IMC 制御系のブロック線図

次に, 図 8.4 に示すように, 前章で設計した制御系で入力を r_f , 出力を q としたときの入出力関係を

$$q(s) = P(s)r_f(s) \quad (8.8)$$

と表し, 図 8.5 の IMC 制御系 [8] を構成する. $P_M(s)$ は $P(s)$ のモデルである¹. C_0 は安定な系 (IMC フィルタ) であり, 平衡点近くで線形系 $\bar{C}_0(s)$ で近似できるとする. IMC コントローラ C の出力 x_f が $P(s)$ の入力となる.

$$q(s) = P(s)x_f(s) \quad (8.9)$$

コントローラ C が積分特性を持つように次式とする.

$$\bar{C}_0(0) = 1 \quad (8.10)$$

実際, このとき, $P_M(0) = 1$ から $\bar{C}_0(0)P_M(0) = 1$ となり, 平衡点近くで C が

$$C(s) = \frac{\bar{C}_0(s)}{1 - \bar{C}_0(s)P_M(s)} \quad (8.11)$$

と表され, 0 極を持つことがわかる.

¹ $P_M(s)$ の状態はコントローラ内で計算されるので, オブザーバは不要である.

8.3 シミュレーション及び実験結果

実験に使用した振り子のパラメータは前章と同じである.

$$\omega_n = 6.22 \text{ [rad/s]}, \quad L = \frac{g}{\omega_n^2} = 0.254 \text{ [m]}, \quad g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

台車系の時定数 T は $T = 0.2 \text{ [s]}$ と設定した. オブザーバゲイン K は, $A_u - KC_u$ の固有値が $\{-\omega_n, -\omega_n\}$ となるように与えた. F_a や K などは Scilab で計算した.

IP 型制御系における目標値 $r_f(t)$ は, 速度の上限を 1 [m/s] とした 1 次遅れ系の出力として与えた. $r_f(t)$ を生成するブロック線図を図 8.6 に再度示す. T_0 は $T_0 = 0.2 \text{ [s]}$ とした. 関数 $r_0(t)$ として, 次の矩形波を与えた.

$$r_0 = a_0 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.15 \text{ [m]}, \quad \omega = 0.2 \text{ [rad/s]} \quad (8.12)$$

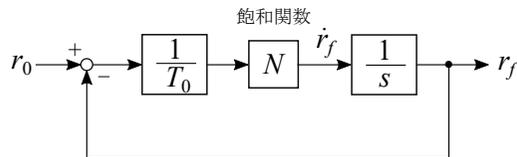


図 8.6: 飽和のある 1 次遅れ系のブロック線図 (飽和関数の振幅制限は 1 [m/s] とした)

IMC 制御系における目標値は $r_f(t) = r_0(t)$ とし, C_0 は上記と同じ飽和のある 1 次遅れ系とした.

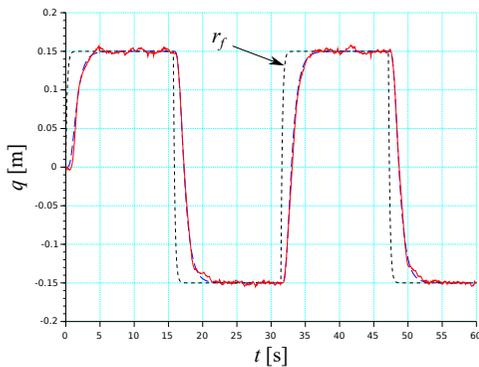


図 8.7: IP 型制御系 (極配置法) の出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

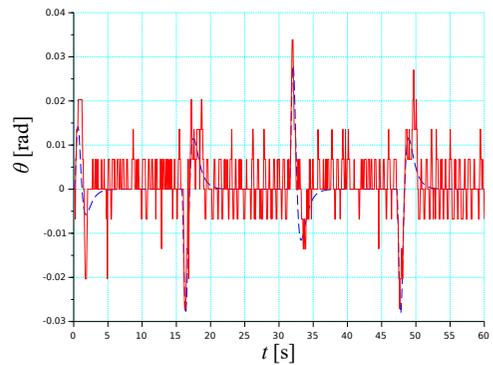


図 8.8: IP 型制御系 (極配置法) の振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

IP 型制御系において, 指定極を

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\omega_n, -0.2\omega_n \right\} = \{-5, -5, -6.22, -6.22, -1.244\}$$

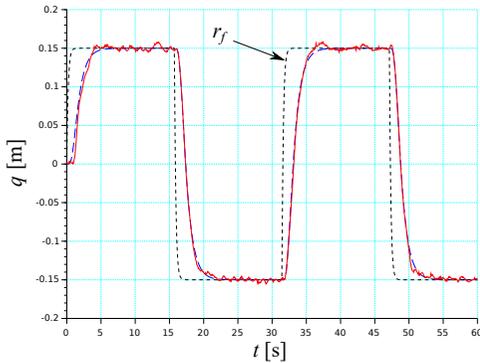


図 8.9: IP 型制御系（最適レギュレータ法）の出力 $q(t)$ の応答（実線：実験結果，破線：シミュレーション結果）

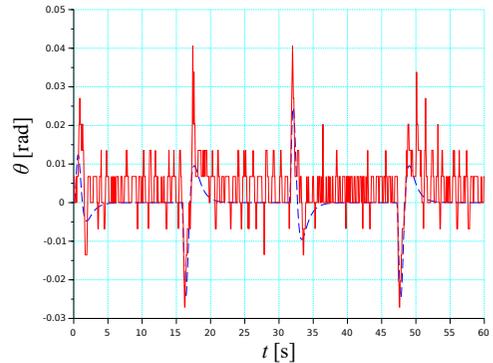


図 8.10: IP 型制御系（最適レギュレータ法）の振り子角 $\theta(t)$ の応答（実線：実験結果，破線：シミュレーション結果）

として極配置法で求めた F_a を用いた場合のシミュレーション及び実験結果を図 8.7，図 8.8 に示す。また，

$$J = \int_0^{\infty} \{x_i(t)^2 + v(t)^2\} dt \quad (8.13)$$

を最小化する最適レギュレータゲインとして求めた F_a を用いた場合のシミュレーション及び実験結果を図 8.9，図 8.10 に示す。この F_a に対する制御系の極は以下のとおりである。

$$\{-5.822 \pm j0.927, -6.755, -3.808, -1.082\}$$

両者とも，偏差を小さく抑えており，良好な目標値追従性を示している。IP 型制御系の場合，追加された積分器の 0 極を $-\omega_n$ へ近づけると応答が振動的になった。安定性が確保される範囲での設計では，それぞれ遅いモードの極（それぞれ， -1.244 ， -1.082 ）が残った。

次に，IMC 構造を持つ制御系において，指定極を

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\omega_n \right\} = \{-5, -5, -6.22, -6.22\}$$

として求めた F を用いた場合のシミュレーション及び実験結果を図 8.11，図 8.12 に示す。IP 型制御系とは異なり，0 極の追加がないので，速応性の優れた制御系が設計できたが，偏差は IP 制御系ほど小さく抑えることができなかった。

8.4 演習問題

- (8.1) 式の $G(s) = -\frac{\omega_n^2}{(Ts+1)^2(s^2-\omega_n^2)}$ は原点に零点を持たない。 $G(s)$ の状態方程式を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad q(t) = Cx(t)$$

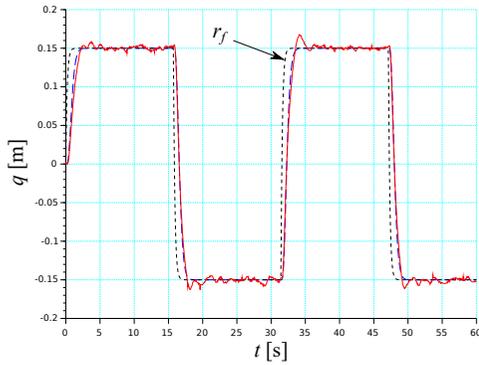


図 8.11: IMC 構造を持つ制御系の出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

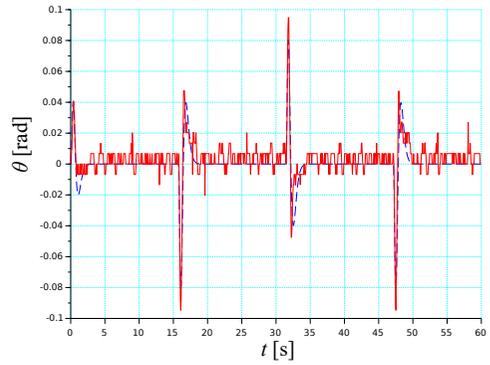


図 8.12: IMC 構造を持つ制御系の振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

とすると, $G(s)$ が原点に零点を持たない条件は

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (8.14)$$

に等しいことが知られている [20]. (8.14) 式を確認せよ.

2. (8.4) 式の状態方程式に対応するブロック線図を描け.
3. 図 8.6 のブロック線図において, $N = 1$ (飽和要素がない) のときの伝達関数は

$$\frac{r_f(s)}{r_0(s)} = \frac{1}{T_0 s + 1} \quad (8.15)$$

である. ステップ入力 $r_0(t) = 2a_0$, $t \geq 0$ に対するこの系の応答 $r_f(t)$ とその時間微分 $\dot{r}_f(t)$ を求めよ. ただし, $T_0 = 0.2$ [s], $a_0 = 0.3$ [m] とする.

第9章 ボールビーム系に対する制御系の設計 (1)

真っすぐな棒（ビーム）の上に置かれた球（ボール）を，棒を傾けることによって，目的の位置まで移動させるという制御問題を考える．このような運動を実現する装置をボールビーム系という．ビーム角やボールの速度が小さい範囲では，その数学モデルが4階の線形微分方程式で近似され，極配置法や最適レギュレータ法で容易に安定化制御則を求めることができるので，この系はさほど難しい制御対象ではないように思える．しかし，ボールに作用する力は，ビーム角が小さくなるにしたがって小さくなるという頼りないもので，通常，転がり摩擦等のため平衡点近くに，ビームが傾いているのにボールが止まる範囲（不感帯）がある．また，装置によってはビーム角に機構上厳しい制限があり，この制限の中で制御を行う必要がある．本章では，ボールビーム系の制御問題に対して，極配置法を利用した二通りの状態フィードバック制御則の設計法を紹介し，それらを用いたシミュレーション及び実験結果を示す．

9.1 運動方程式と問題の記述

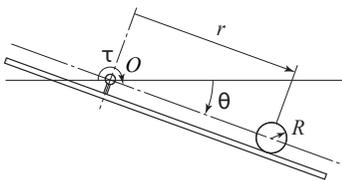


図 9.1: ボールビーム系



図 9.2: ボールビーム系実験装置

ボールビーム系のモデル図と実験装置の写真をそれぞれ図 9.1, 図 9.2 に示す．これは，ビームの角度を変えることによって，ビーム上に置かれたボールの位置を制御する実験装置である．ボールビーム系の実験装置を作るときに注意すべき点は，ビームの角度を正確に制御できること，ボールの真球度とビームの直線性が良く，ボールがビーム上を転がる時の摩擦が小さいこと，ボールの位置を正確に測定できることである．本実験装置では，ビーム駆動系に 1/200 の減速比の歯車系と制御性の良いギヤド DC モータ（ツカサ電工 TG-47H-SV-10-HB,

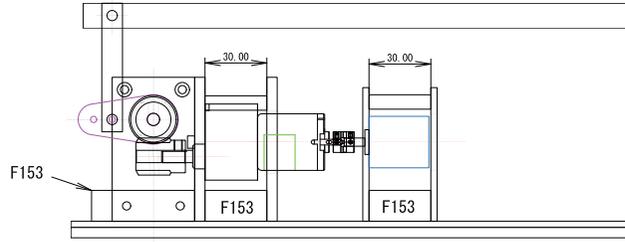


図 9.3: ボールビーム系の駆動部の図面

24V) を使用することで、精密なビーム角制御を可能にした (図 9.3)。また、ボール位置は、低ノイズのレーザー距離センサ (北陽電機 LX2-257AG) を用いて正確に測定可能とした。

ボールとビームは常に接触し、ボールはビーム上を滑ることなく回転するものと仮定する。また、ボールの転がり摩擦や各部分の散逸力 (摩擦力) は無視する。各記号の意味は以下のとおりである。

- $\theta(t)$: ビームの角変位 [rad]
- $r(t)$: 支点から測ったボールの位置 [m]
- $\tau(t)$: ビームに作用するトルク (操作量) [Nm]
- J : ビームの慣性モーメント [kgm^2]
- M : ボールの質量 [kg]
- R : ボールの半径 [m]
- J_b : ボールの慣性モーメント [kgm^2] (球なので $J_b = \frac{2}{5}MR^2$)
- g : 重力加速度 [m/s^2]

ラグランジュ法などによりボールビーム系の運動方程式は次式と得られる。

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + M \right) \ddot{r} - Mg \sin \theta - Mr \dot{\theta}^2 = 0 \quad (9.1)$$

$$(Mr^2 + J + J_b) \ddot{\theta} + 2Mr \dot{r} \dot{\theta} - Mgr \cos \theta = \tau \quad (9.2)$$

記号 M_0 を次式で定義する。

$$M_0 = \frac{M}{\frac{J_b}{R^2} + M} = \frac{M}{\frac{2}{5}M + M} = \frac{5}{7}$$

$|\theta|$, $|\dot{\theta}|$ は十分小さいと仮定し, (9.1) 式を $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ で線形近似すると次式を得る。

$$\ddot{r} = M_0 g \theta \quad (9.3)$$

これを伝達関数表現すると次式を得る。

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{M_0 g}{s^2} \quad (9.4)$$

また, θ の運動方程式 (9.2) については, 十分大きな τ が使えるとし, ボールからの反力の項を無視する。さらに, 新たな入力を $u_0(t)$ とし, 速度フィードバック・ゲイン補償 (第5章

参照) によりビーム駆動系の伝達関数が次式となるように補償しておく.

$$\frac{\theta(s)}{u_0(s)} = \frac{1}{s} \tag{9.5}$$

(9.4), (9.5) 式から, 図 9.4 のブロック線図を得る.

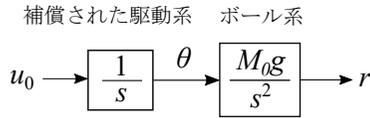


図 9.4: ビームの駆動系を補償した後のボールビーム系のブロック線図

問題は, ボールの位置を静止状態から $r = r_f$ に移動させる制御系を設計することである. 一般性を失うことなく, $r_f = 0$ とおく.

9.2 線形制御系の設計法

(1) 目標値の時間微分を利用しない方法

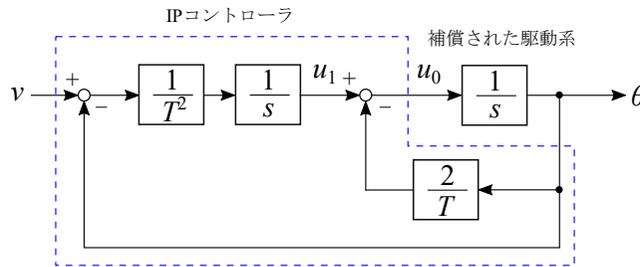


図 9.5: 2次遅れ系に補償された駆動系のブロック線図

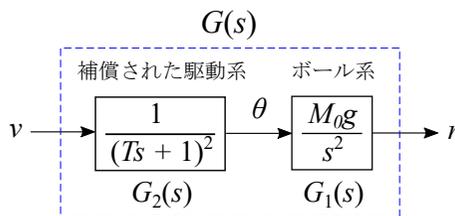


図 9.6: ビームの駆動系を補償した後のボールビーム系のブロック線図

まず, IP コントローラを用いて, ビーム駆動系を時定数 $T > 0$ を持つ 2 次遅れ系となるように補償する (図 9.5).

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{1}{(Ts + 1)^2} \tag{9.6}$$

T は駆動系のバンド幅の範囲でできるだけ小さく与える. この補償を行った後のボールビーム系のブロック線図を図 9.6 に示す. 本装置では, ビーム角 θ に機構上の制限 (約 $|\theta| \leq 0.1$ [rad])

があるので、この制限を満たすような制御則が望ましい。駆動系を図 9.6 のように補償しておけば、 $v(t)$ の振幅を制限することによって、 $\theta(t)$ の振幅も制限できる。すなわち、 $G_2(s)$ の初期状態が 0 という条件の下で

$$|\theta(t)| \leq \theta_{max} \quad \text{if} \quad |v(t)| \leq \theta_{max} \quad (9.7)$$

が成り立つ。ただし、この条件を考慮して制御系の安定性を保証するには、本章とは別の設計法が必要となる。そのような設計法については次章で述べる。

状態を

$$x = \left[r \quad \dot{r} \quad \theta \quad u_1 \right]' \quad (9.8)$$

と選ぶと、図 9.6 の系は次の状態方程式で表される。 u_1 は図 9.5 の IP コントローラ内の変数である。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (9.9)$$

$$r(t) = Cx(t) \quad (9.10)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0g & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

制御則は、次の簡単な状態フィードバック制御

$$v(t) = -Fx(t), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

とし、フィードバックゲイン F は極配置法によって設計する。

$G_2(s)$ はすでに十分安定化されているので、この極 $\{-\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}\}$ は変えないことにする。 $G_1(s)$ の極 $\{0, 0\}$ の配置法については、単純に、与える定数 $\mu > 0$ に対して $\{-\mu, -\mu\}$ と配置する。 μ を小さくすると、 $|\theta(t)|$ が小さくなり、速応性が低下するという傾向がある。

以上から、以下の指定極が得られた。

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\mu, -\mu \right\} \quad (9.12)$$

$r_f \neq 0$ のときは、(9.11) 式で $x(t)$ の代わりに $r = r_f$ に対する平衡点 x_e を引いた状態

$$x(t) - x_e, \quad x_e = \begin{bmatrix} r_f & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \quad (9.13)$$

を用いればよい。

(2) 目標値の時間微分を利用する方法

ボール位置の目標値が時間関数 $r_f(t)$ として与えられる場合のサーボ系の設計法 [21] を紹介する。 $r_f(t)$ は t に関して 4 回連続的に微分可能 (C^4 級) とする。

まず、ビーム駆動系を図 9.7 のように補償しておく。

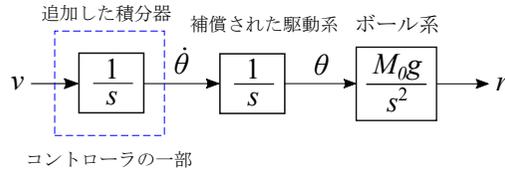


図 9.7: ビームの駆動系を補償した後のボールビーム系のブロック線図

状態を

$$x = \left[r \quad \dot{r} \quad M_0 g \theta \quad M_0 g \dot{\theta} \right]' \quad (9.14)$$

と選ぶと、状態方程式は次式となる.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (9.15)$$

$$r(t) = Cx(t) \quad (9.16)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_0 g \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

制御を

$$v(t) = \frac{1}{M_0 g} \{r_f^{(4)}(t) - F(x(t) - x_d(t))\} \quad (9.17)$$

とする¹. ただし, $x_d(t)$ は次式である.

$$x_d(t) = \left[r_f(t) \quad \dot{r}_f(t) \quad \ddot{r}_f(t) \quad r_f^{(3)}(t) \right]' \quad (9.18)$$

(9.17) 式を (9.15) 式に代入すると次式を得る.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \frac{1}{M_0 g} \{r_f^{(4)}(t) - F(x(t) - x_d(t))\} \quad (9.19)$$

次式に注意する.

$$\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + B \frac{1}{M_0 g} r_f^{(4)}(t) \quad (9.20)$$

(9.19) 式から (9.20) 式を辺々引き, $e(t) = x(t) - x_d(t)$ とおくと次式を得る.

$$\dot{e}(t) = (A - BF)e(t) \quad (9.21)$$

よって, $A - BF$ が安定行列となるように F を与えたとき, $e(t) \rightarrow 0$ すなわち, $x(t) \rightarrow x_d(t)$ となり, これから, $r(t) \rightarrow r_f(t)$ がわかる. F は上記と同様の指定極による極配置法によって求める.

¹ $r_f^{(4)}(t) = \frac{d^4 r_f(t)}{dt^4}$

上記二つの設計法では、状態フィードバック制御のための状態

$$(1) \text{ の場合 : } x = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & u_1 \end{bmatrix}'$$

$$(2) \text{ の場合 : } x = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}'$$

が必要となる。 r と θ はセンサーによって計測するので、これらは入手可能である。 u_1 または $\dot{\theta}$ はコントローラの内部変数なので入手可能である。 \dot{r} は計測しないので、 $G_1(s)$ 部分系に対するオブザーバにより推定する。 $G_1(s)$ の状態方程式表現を次式とする。

$$\dot{x}_b(t) = A_b x_b + B_b \theta(t), \quad r(t) = C_b x_b(t) \quad (9.22)$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 g \end{bmatrix}, \quad C_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_b = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

この系に対するオブザーバは次式で与えられる [17], [18].

$$\dot{\hat{x}}_b(t) = (A_b - K C_b) \hat{x}_b(t) + B_b \theta(t) + K r(t) \quad (9.23)$$

$K(2 \times 1)$ は $A_b - K C_b$ を安定行列にするオブザーバゲインである。

例題 9.1 ボールビーム系の運動方程式 (9.1) 式を導出せよ。

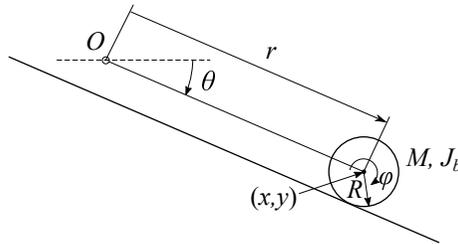


図 9.8: ラグランジュの方程式のための座標系

[解] ボール中心の座標を (x, y) とし、ボールの回転角を φ とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = -r \sin \theta, \quad r = R\varphi \quad (9.24)$$

また、以下に注意する。

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = -\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{r} = R\dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{r}}{R} \quad (9.25)$$

ボールの速度を v で表す。ボールの運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V は次式で計算される。

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_b \frac{\dot{r}^2}{R^2} \quad (9.26)$$

$$V = Mgy = -Mgr \sin \theta \quad (9.27)$$

これらをラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (9.28)$$

に代入すると (9.1) 式が得られる。

例題 9.2 レーザ距離センサ（北陽電機 LX2-257AG）はボールとの距離に応じた電圧を出力する．この距離と電圧との関係は1次関数ではないので，較正曲線を求める必要がある．表 9.1 にボールの位置（基準点をビームを支持する板の一端とした）と電圧データ（これに変換係数 3.3/1024 を掛けると電圧 [V] になる）との関係を示す．

表 9.1: ボールの位置と電圧データの対応表（レーザー距離センサ 北陽電機 LX2-257AG）

位置 [mm]	447.5	348.0	247.5	147.0	47.5	-53.5	-152.0	-203.0
電圧データ	1012.3	880.6	729.0	571.0	429.1	292.3	144.0	68.0

表 9.1 のデータを最小二乗近似する 4 次多項式として次式を得た．

$$y = 0.664x^4 - 1.394x^3 + 0.940x^2 + 0.464x - 0.237 \quad (9.29)$$

データ点と多項式近似曲線の間を関 9.9 に示す．

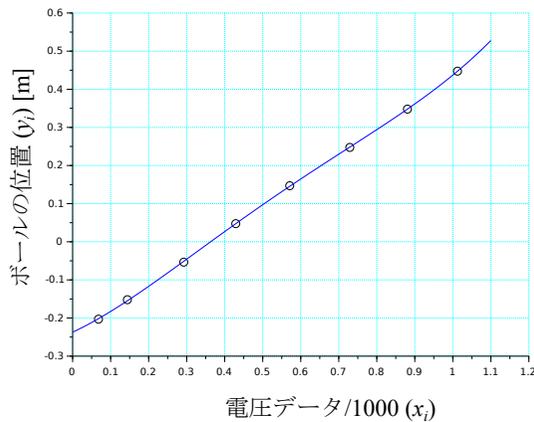


図 9.9: ボールの位置 (y) と電圧データ (x) との関係

一般に， m 組の計測データ (x_i, y_i) から，最小二乗法で n 次の近似多項式を求める式を導出せよ．ただし， $m > n$ とする．

[解] データ (x_i, y_i) , $i = 1 \dots m$ を n 次の多項式で近似することを考える．

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (9.30)$$

多項式の係数 a_0, a_1, \dots, a_n を最小二乗法で求める．すなわち，データ点における誤差の二乗和を最小化するように求める．

$$E = \sum_{i=1}^m e_i^2 \rightarrow \min \quad (9.31)$$

$$e_i = y(x_i) - y_i \quad (9.32)$$

いま

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^n \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

を定義すると, (9.31) 式は次式とかける.

$$\begin{aligned} E &= e'e = (Xa - y)'(Xa - y) \\ &= a'X'Xa - 2a'X'y - y'y \end{aligned} \quad (9.35)$$

次の記号を定義する.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial a_0} & \frac{\partial E}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial E}{\partial a_n} \end{bmatrix}' \quad (9.36)$$

求める多項式の係数 a は次の最小化条件の式を解いて得られる².

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2X'Xa - 2X'y = 0 \quad (9.37)$$

すなわち, 次の線形方程式の解 a として得られる.

$$X'Xa - X'y = 0 \quad (9.38)$$

9.3 シミュレーション及び実験結果

(1) と (2) の方法を用いたシミュレーション及び実験結果を以下に示す. いずれも, 状態フィードバックゲイン F を決定するための指定極を

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -\mu, -\mu \right\}$$

とし, 設計パラメータ T, μ を $T = 0.2$ [s], $\mu = 2.5$ と与えた. また, オブザーバゲイン K は $A_o - KC_o$ の固有値が $\{-8, -8\}$ となるように設計した. F や K などは Scilab で計算した.

目標値 $r_f(t)$ は, 速度の上限を 0.05 [m/s] とした 1 次遅れ系の出力として与えた. $r_f(t)$ を生成するブロック線図を図 9.10 に示す. T_0 は $T_0 = 0.5$ [s] とした. 関数 $r_0(t)$ として, 次の矩形波を与えた.

$$r_0 = a_0 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.15 \text{ [m]}, \quad \omega = 0.2 \text{ [rad/s]} \quad (9.39)$$

²結果として, $\frac{\partial}{\partial a}(a'X'Xa) = 2X'Xa$, $\frac{\partial}{\partial a}(2a'X'y) = 2X'y$ と整理できる.

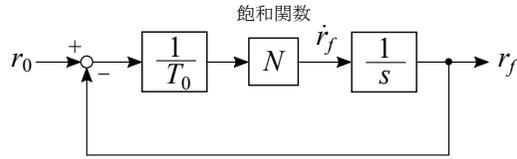


図 9.10: 飽和のある 1 次遅れ系のブロック線図 (飽和関数の振幅制限は 0.05 [m/s] とした)

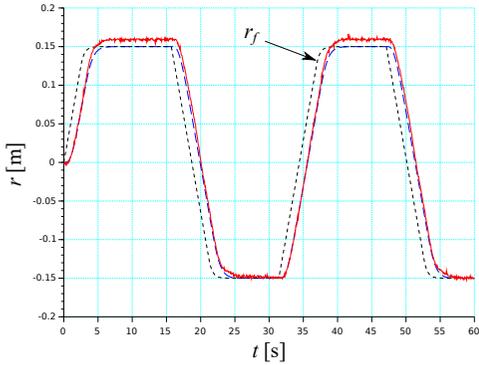


図 9.11: (1) の方法を用いた場合の $r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

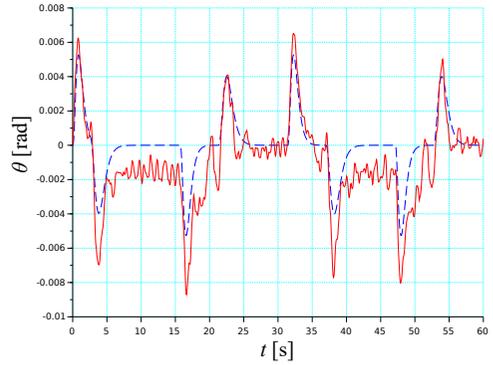


図 9.12: (1) の方法を用いた場合の $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

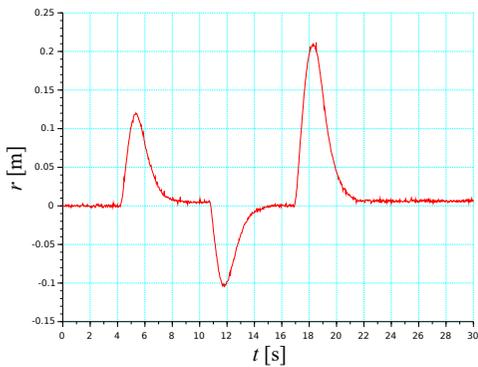


図 9.13: (1) の方法を用いた場合の外乱に対する $r(t)$ の応答

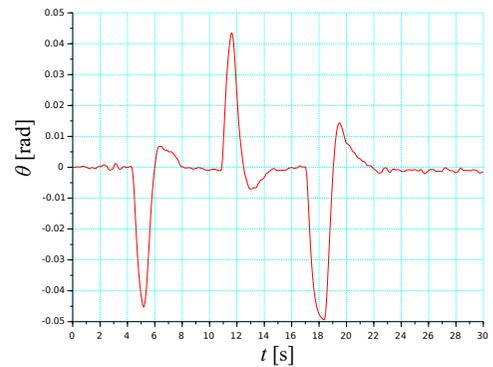


図 9.14: (1) の方法を用いた場合の外乱に対する $\theta(t)$ の応答

(1) の設計法を用いた場合

上記の目標値 $r_f(t)$ に対するシミュレーション及び実験結果を図 9.11, 図 9.12 に示す. 目標値の近くにボールの位置を制御しているが, 目標値が一定になるところで, 出力 $r(t)$ に約 1 [cm] の偏差が見られる. これは, ボールの転がり摩擦とビーム角 θ の計測誤差 (本実験装

置では最初に手動でビームを水平に調整する必要があるため、通常、 θ のゼロ点に誤差が生じる)が主な原因と考えられる。また、図9.13, 図9.14に、 $r_f(t) = 0$ として、ボールを指で押すという外乱を与えたときの応答を示す。ボールは行き過ぎなく、ほぼ元の位置に戻っているが、出力に同程度の偏差が残った。実験では、制御入力 $v(t)$ を $|v(t)| \leq 0.05$ と制限することで、 $|\theta(t)| \leq 0.05$ [rad] を確保した。

(2) の設計法を用いた場合

上記の $r_f(t)$ に対するシミュレーション及び実験結果を図9.15, 図9.16に示す。また、図9.17, 図9.18に上記と同様に与えた外乱に対する応答を示す。目標値が変化するときの出力の目標値追従性が、(1)の場合よりも優れていることがわかる。しかし、目標値が一定のときには、出力に(1)の場合と同様の偏差が生じた。

本制御則では、ビーム角 θ の振幅を抑える工夫はしていないので、大きな目標値や外乱に対して、 θ が機構上の限界に達するおそれがある。

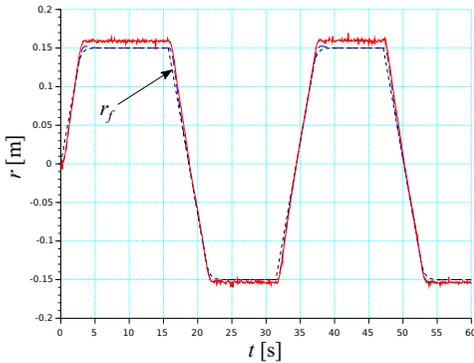


図 9.15: (2) の方法を用いた場合の $r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

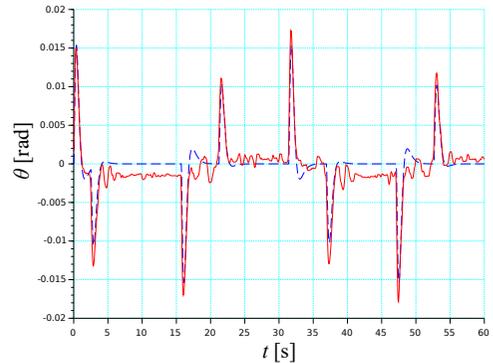


図 9.16: (2) の方法を用いた場合の $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

9.4 演習問題

1. 図9.6の系で、状態を(9.8)式と選ぶと、状態方程式は(9.9), (9.10)式で表されることを示せ。
2. 図9.7の系で、状態を(9.14)式と選ぶと、状態方程式は(9.15), (9.16)式で表されることを示せ。
3. (9.22)式の系に対するオブザーバ(9.23)式において、 $A_b - KC_b$ の固有値を $\{-\mu_1, -\mu_1\}$, $\mu_1 > 0$ に配置するオブザーバゲイン K を求めよ。

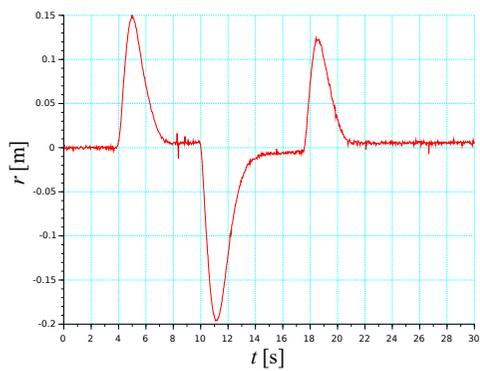


図 9.17: (2) の方法を用いた場合の外乱に対する $r(t)$ の応答

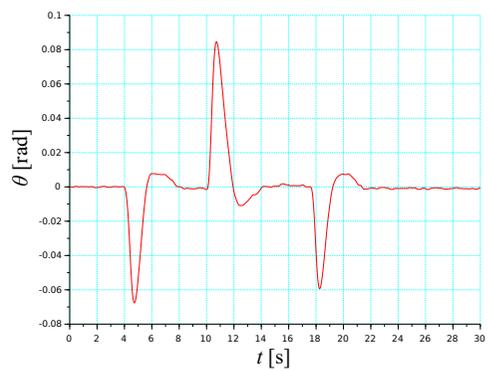


図 9.18: (2) の方法を用いた場合の外乱に対する $\theta(t)$ の応答

第10章 ボールビーム系に対する制御系の設計（2）

本章では，線形モデルで近似されるボールビーム系に対して，ビーム角 θ の振幅制限を考慮した制御系設計法を示す．前章で，予めビーム駆動系を安定化しておけば，ビーム駆動系の入力振幅を制限することで， θ の振幅も制限できることを述べた．これによって， θ に関する制限問題（状態制限問題）をより簡単な入力制限問題として扱うことができる．しかし，それでも4次系の問題は難しいので，モード分解法によって，問題を低次元化する．すなわち，系を十分安定化されたビーム駆動系に関する部分系（2次系）とボール系に関する部分系（2次系）に分離し，安定化が必要な後者の部分系のみ安定化問題として定式化する．次に，その問題の解として知られる3つの飽和制御則を紹介し，これらを用いたシミュレーション及び実験結果を示す．

10.1 問題の記述

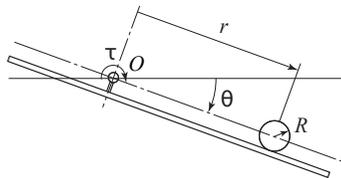


図 10.1: ボールビーム系

制御対象は前章と同じボールビーム系（図 10.1）とするが，ビーム角 θ に次の制限があるとする．

$$|\theta(t)| \leq a \quad (10.1)$$

a [rad] は与えられる正の定数である．

問題は，(10.1) 式の制限条件の下で，ボールの位置を静止状態から $r = r_f$ に移動させる制御系を設計することである．一般性を失うことなく， $r_f = 0$ とおく．

10.2 飽和制御系の設計法

9.2 節の (1) と同様に，まず，IP コントローラを用いて，ビーム駆動系を時定数 T を持つ 2 次遅れ系となるように補償しておく（図 10.2，図 10.3）．補償後のボールビーム系の状態方

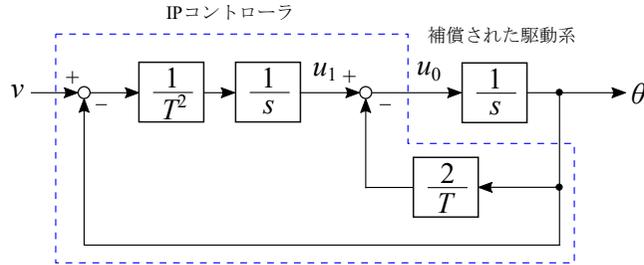


図 10.2: 2 次遅れ系に補償された駆動系のブロック線図

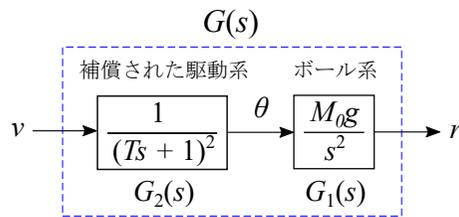


図 10.3: ビームの駆動系を補償した後のボールビーム系のブロック線図

程式は次式であった.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (10.2)$$

$$r(t) = Cx(t) \quad (10.3)$$

ただし

$$x = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0g & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(9.7) 式で見たように, $G_2(s)$ が図 10.3 に示す 2 次遅れ系の場合, $G_2(s)$ の初期状態が 0 という条件の下で次式が成り立つ.

$$|\theta(t)| \leq a \quad \text{if} \quad |v(t)| \leq a \quad (10.4)$$

よって, θ の振幅は, 入力 $v(t)$ の振幅を制限することによって制限できる. しかし, 入力制限がある場合の 4 次系の安定化制御則を求めるのは困難なので, 以下では, モード分解法によって, この問題を同じ入力制限を受ける 2 次系 (ボール系の部分) の安定化問題に簡単化して解く. この低次元化された問題は, 入力制限がある 2 重積分器系 (原点に二つの固有値を持つ) の安定化問題となる. この問題に対して, 3 つの飽和制御則を示す.

座標変換

$$z = Sx \quad (10.5)$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_0g} & \frac{1+2T}{M_0g} & T^2 & T^2 \\ 0 & \frac{1}{M_0g} & 0 & T^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

により, (10.2), (10.3) 式を次式のようにブロック対角化する.

$$\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}v(t) \quad (10.7)$$

$$r(t) = \bar{C}z(t) \quad (10.8)$$

$$\bar{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = SB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CS^{-1} = \left[M_0g \quad -M_0g(1+2T) \mid -M_0gT^2 \quad 2M_0gT^3 \right] = \left[\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2 \right]$$

上記の座標変換に合わせて状態 z を

$$z = \begin{bmatrix} z_u \\ z_s \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

と分割する. 系は次のように分解された.

$$\dot{z}_u(t) = A_{11}z_u(t) + \bar{B}_1v(t) \quad (10.10)$$

$$\dot{z}_s(t) = A_{22}z_s(t) + \bar{B}_2v(t) \quad (10.11)$$

$$r(t) = \bar{C}_1z_u(t) + \bar{C}_2z_s(t) \quad (10.12)$$

z_u 部分系は不安定であり, z_s 部分系は漸近安定である. 伝達関数では, 次の関係がある.

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \bar{G}_1(s) + \bar{G}_2(s) \quad (10.13)$$

ここで

$$\bar{G}_1(s) = \bar{C}_1(sI_2 - A_{11})^{-1}\bar{B}_1 \quad (10.14)$$

$$\bar{G}_2(s) = \bar{C}_2(sI_2 - A_{22})^{-1}\bar{B}_2 \quad (10.15)$$

$G_1(s)$ と $\bar{G}_1(s)$ は不安定 (極は A_{11} の固有値), $G_2(s)$ と $\bar{G}_2(s)$ は安定 (極は A_{22} の固有値) である.

$|v(t)| \leq a$ を満たし z_u 部分系を安定化する, z_u に関して連続な制御則を適用すれば, $z_u(t) \rightarrow 0$ となる. このとき, $v(t)$ も $v(t) \rightarrow 0$ (平衡点では $\dot{z}_u = 0$ となり, このとき (10.10) 式から $v = 0$ がわかる) となる. 同じ $v(t)$ が z_s 部分系にも入力されるが, z_s 部分系は安定なので, そのような $v(t)$ (有界 (有限振幅) で 0 に収束する) が入っても $z_s(t) \rightarrow 0$ となる.

よって問題は入力制限を持つ 2 次系の安定化問題に簡単化された. すなわち, 制限条件

$$|v(t)| \leq a \quad (10.16)$$

の下で z_u 部分系

$$\dot{z}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad z_u = \begin{bmatrix} z_{u,1} \\ z_{u,2} \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

を安定化する制御則 $v(t) = f(z_u)$ を求めよ.

z_u 部分系に対する飽和制御則を用いた制御系のブロック線図を図 10.4 に示す.

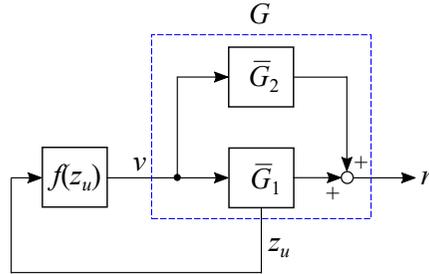


図 10.4: z_u 部分系に対する飽和制御則を用いた制御系

この問題の解として, 次の飽和制御則が知られている.

(1) Teel の飽和制御則 [22]

$$v(t) = -\text{sat}(z_{u,2}(t) + \text{sat}(z_{u,1}(t), a_1), a), \quad 0 < a_1 < \frac{1}{2}a \quad (10.18)$$

(2) Sussmann らの飽和制御則 [23]

$$v(t) = -\text{sat}(z_{u,2}(t) + \text{sat}(z_{u,1}(t), a_2), a), \quad 0 < a_2 \leq (2 - \sqrt{3})a \quad (10.19)$$

これらは同じ形をしており (違うところは a_1, a_2 の範囲のみ), (5.18) 式で定義された飽和関数を入れ子で使っている. また, 原点近くでは, いずれも次の線形状態フィードバック制御に一致する.

$$v(t) = -z_{u,1}(t) - z_{u,2}(t) = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} z_u(t) \quad (10.20)$$

これは z_u 部分系の固有値を $\{-1, -1\}$ に配置するものである.

(3) ボールの最大速度を考慮した飽和制御則 [6], [7]

ボールの最大速度 v_{max} が指定されたとする. この制御則は, 次のパラメータ f_0, f_1

$$f_0 = \frac{M_0 g a}{v_{max}}, \quad f_1 \text{ は任意の正の定数} \quad (10.21)$$

に対して次式で表される.

$$v(t) = -\text{sat}(f_0 z_{u,2}(t) + \text{sat}(f_0 f_1(z_{u,1}(t) - z_{u,2}(t)) + f_1 z_{u,2}(t), a), a) \quad (10.22)$$

この制御則も飽和関数の入れ子構造を持つ. また, 原点近くでは, 次の線形状態フィードバック制御に一致する.

$$v(t) = -f_0 f_1 z_{u,1}(t) - (f_0 + f_1 - f_0 f_1) z_{u,2}(t) = - \begin{bmatrix} f_0 f_1 & f_0 + f_1 - f_0 f_1 \end{bmatrix} z_u(t) \quad (10.23)$$

これは z_u 部分系の固有値を $\{-f_0, -f_1\}$ に配置するものである.

$r_f \neq 0$ のとき, v の計算で (すなわち, (10.5) 式で) x を

$$x = \begin{bmatrix} r_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

と置けばよい.

第 7 章で述べたように, 状態のうち \dot{r} は $G_1(s)$ 部分系に対するオブザーバによって推定する.

10.3 シミュレーション及び実験結果

(1) と (3) の方法を用いたシミュレーション及び実験結果を以下に示す. 共通部分として, 設計パラメータ T , a を $T = 0.2$ [s], $a = 0.05$ [rad] と与え, オブザーバゲイン K は $A_o - KC_o$ の固有値が $\{-5, -5\}$ となるように設計した. K などは Scilab で計算した.

目標値 $r_f(t)$ は, 速度の上限を 0.05 [m/s] とした 1 次遅れ系の出力として与えた. $r_f(t)$ を生成するブロック線図を図 10.5 に再度示す. T_0 は $T_0 = 0.5$ [s] とした. 関数 $r_0(t)$ として, 次の矩形波を与えた.

$$r_0 = a_0 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.15 \text{ [m]}, \quad \omega = 0.2 \text{ [rad/s]} \quad (10.25)$$

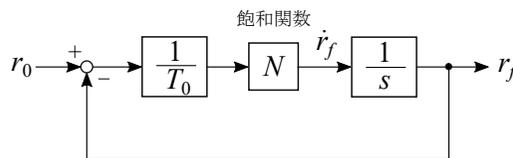


図 10.5: 飽和のある 1 次遅れ系のブロック線図 (飽和関数の振幅制限は 0.05 [m/s] とした)

(1) の制御則を用いた場合

パラメータ a_1 は上限に近い値 $a_1 = \frac{1}{2}a - 10^{-6}$ を選んだ. 上記の目標値 $r_f(t)$ に対するシミュレーション及び実験結果を図 10.6, 図 10.7 に示す. 比較的小さなゲインを持つ Teel の飽和制御則による速応性及び定常偏差の改善は保守的で, 目標値が一定になるところで, 出力 $r(t)$ に約 $1 \sim 2$ [cm] の偏差が見られる. これは, ビーム角の計測誤差 (主にゼロ点の誤差) とボールの転がり摩擦が主な原因と考えられる. また, 図 10.8, 図 10.9 に, $r_f(t) = 0$ とし, ボールを指で押すという外乱を与えたときの応答を示す. ボールは行き過ぎなく, 元の位置に戻る傾向が見られるが, 二度目の外乱に対して出力 $r(t)$ に 3.5 [cm] 程度の大きな偏差が残った. 本制御系では, $|\theta(t)| \leq a = 0.05$ [rad] が保証されており, このことが図 10.7, 図 10.9 から確認できる.

(2) の Sussman らの制御則で, $a_2 = (2 - \sqrt{3})a \simeq 0.268a$ とした場合も実験したが, シミュレーションは (1) の方法と完全に一致し, 実験でも同様の結果が得られた. (1) と (2) の方法は保守的な結果を与えるが, n 次系 (n は正の整数) にも適用できるより一般的な設計法である.

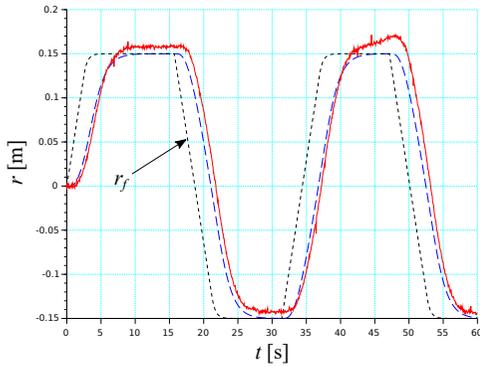


図 10.6: Teel の飽和制御則を用いた場合の $r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

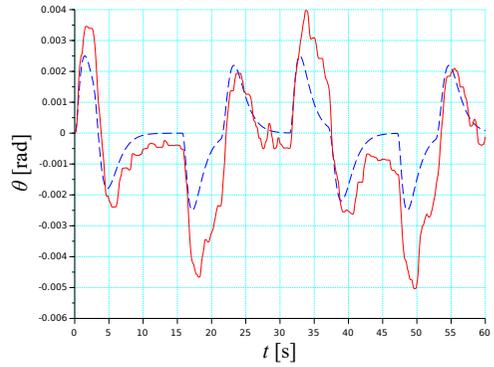


図 10.7: Teel の飽和制御則を用いた場合の $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

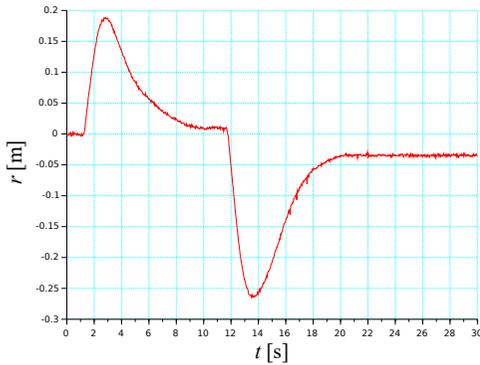


図 10.8: Teel の飽和制御則を用いた場合の外乱に対する $r(t)$ の応答

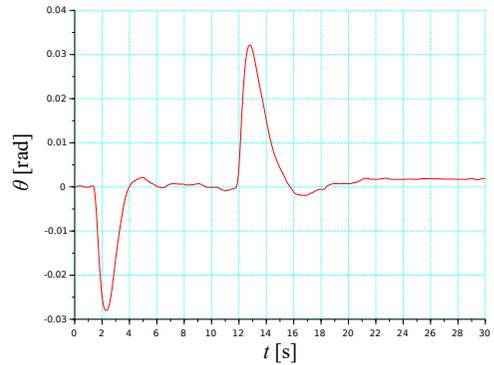


図 10.9: Teel の飽和制御則を用いた場合の外乱に対する $\theta(t)$ の応答

(3) の制御則を用いた場合

設計パラメータは, $v_{max} = 0.1$ [m/s], $f_1 = 2$ と与えた. この v_{max} に対して, $f_0 = 3.50$ となった. よって, 平衡点近くの線形制御で配置される z_u 部分系の極は $\{-3.50, -2\}$ である. 上記の $r_f(t)$ に対するシミュレーション及び実験結果を図 10.10, 図 10.11 に示す. また, 図 10.12, 図 10.13 に上記と同様に与えた外乱に対する応答を示す. より大きなゲインにより出力の応答が比較的速くなり, 偏差も 5 [mm] 程度に抑えられている. 本制御則は, 設計パラメータにより, 任意の正数 f_0, f_1 を指定できるので, 良好な応答となるような f_0, f_1 を選定できるという特長を持つ. 本制御系でも, $|\theta(t)| \leq a = 0.05$ [rad] が保証されており, このことが図 10.11, 図 10.13 から確認できる.

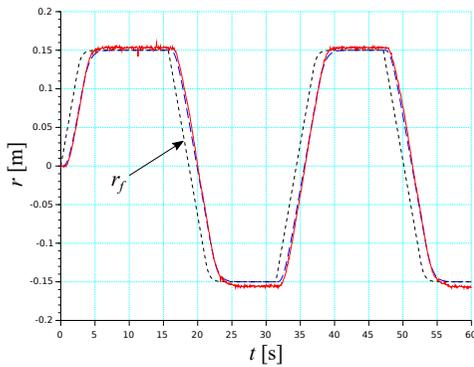


図 10.10: ボールの最大速度を考慮した飽和制御則を用いた場合の $r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

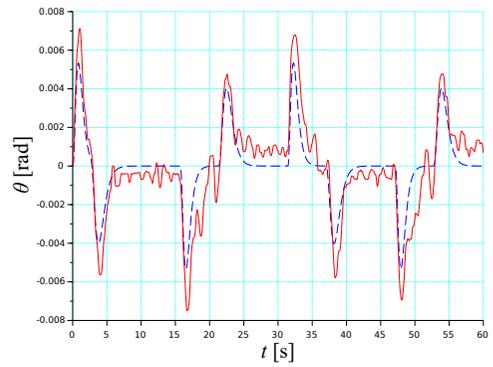


図 10.11: ボールの最大速度を考慮した飽和制御則を用いた場合の $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

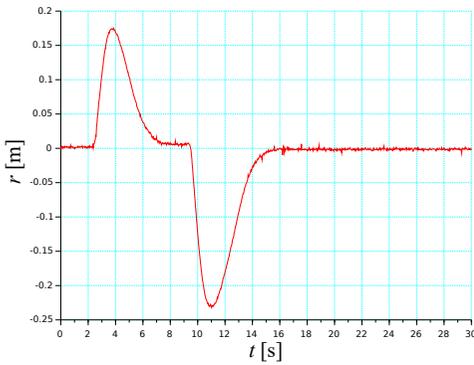


図 10.12: ボールの最大速度を考慮した飽和制御則を用いた場合の外乱に対する $r(t)$ の応答

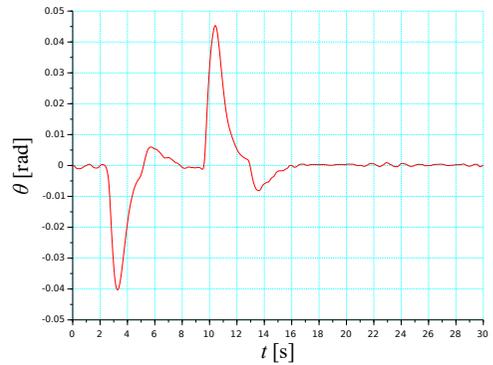


図 10.13: ボールの最大速度を考慮した飽和制御則を用いた場合の外乱に対する $\theta(t)$ の応答

10.4 演習問題

1. (10.6) 式の行列 S の逆行列を求めよ.

(ヒント) 次のブロック行列 $(X, Y, I, 0)$ が行列. I は単位行列, 0 は零行列) に対する逆行列の公式 [24] が利用できる.

$|X| \neq 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & -X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

2. (10.5) 式の座標変換によって, (10.2), (10.3) 式の A, B, C が (10.7), (10.8) 式の $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ に変換されることを示せ.
(ヒント) $SAS^{-1} = \bar{A}$ (または $SA = \bar{A}S$), $SB = \bar{B}$, $CS^{-1} = \bar{C}$ (または $C = \bar{C}S$) を確認すればよい.
3. (10.14), (10.15) 式の $\bar{G}_1(s), \bar{G}_2(s)$ を計算せよ.
4. (10.13) 式を確認せよ.

第11章 ボールビーム系に対する制御系の設計 (3)

再度、ボールビーム系に対して前章と同じ問題、すなわち、ビーム角の振幅制限の下で、目標値にボールを近づけるという問題を考える。これまでの制御則ではモデル誤差や計測誤差のため、ボールの位置に偏差が残った。本章では、この偏差を小さくするために2つの方法でコントローラに積分特性を持たせる。これらは、IP型制御系を構成する方法とIMC構造を導入する方法である。いずれも、制御入力を制限することでビーム角の制限を満たすように設計するが、前者の方法では制御系の安定性が保証されない。ただし、前者の方法でも目標値の振幅や速度を控えめに設定することで、制御入力が増幅しない範囲で制御系を動作させることができ、安定にかつ定常偏差を小さくする制御が行える。しかし、ボールを指で押すという外乱を与えた場合、特に本実験装置ではビーム角の振幅制限が厳しいので、制御入力が増幅して飽和し、それがリセットウィンドアップや制御系の不安定化につながりやすい。一方、前章の飽和制御則を用いて安定化された制御系に対して、IMC構造を導入する方法では、広いクラスの目標値および外乱に対して、リセットウィンドアップや制御系の不安定化が起こりにくいという利点がある。また、いずれの方法でも外乱応答にアンダーシュートが現れるが、これを緩和する修正IMC構造を導入する。そして、これらの制御則を適用したシミュレーション及び実験結果を示す。

11.1 IP型制御系の設計法

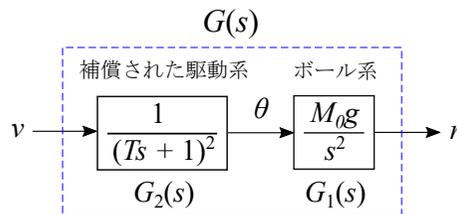


図 11.1: ビームの駆動系を補償した後のボールビーム系のブロック線図

前章と同様に、ビーム駆動系を2次遅れ系として補償した後のボールビーム系を制御対象と考え、その伝達関数を $G(s)$ と表す (図 11.1)。

$$G(s) = \frac{r(s)}{v(s)} \quad (11.1)$$

$G(s)$ の状態方程式は (10.2), (10.3) 式で表される。また、前章と同様に、ビーム角の制限

$|\theta(t)| \leq a$ を保証するため, 制御入力に次式の制限を課す.

$$|v(t)| \leq a \quad (11.2)$$

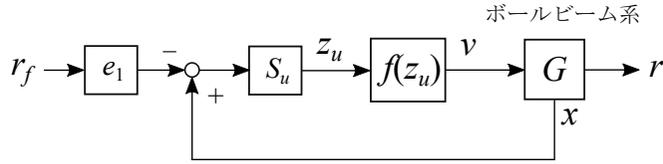


図 11.2: 第 10 章で設計した制御系

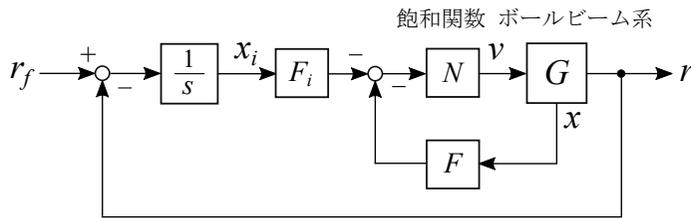


図 11.3: IP 型制御系

前章で設計した飽和制御則を用いた制御系のブロック線図を図 11.2 に示す (オブザーバは省略した). 同図において, 記号 e_1 , S_u は次式で定義される. S_u は (10.6) 式の S の第 1 行と第 2 行から構成される.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_0g} & \frac{1+2T}{M_0g} & T^2 & T^2 \\ 0 & \frac{1}{M_0g} & 0 & T^2 \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

この制御系は, 偏差 $r_f(t) - r(t)$ に対する積分項を持たないので, モデル誤差などにより偏差が残るといった問題がある.

そこで, 図 11.3 のように偏差を積分する形で積分器を追加した IP 型制御系を考える. 追加した積分器の出力を x_i とすると次式を得る.

$$\dot{x}_i(t) = r_f - r = r_f - Cx(t) \quad (11.4)$$

x と x_i を併合した状態を

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = \left[r \quad \dot{r} \quad \theta \quad u_1 \mid x_i \right]' = \left[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \mid x_i \right]' \quad (11.5)$$

とする. x_a に関する状態方程式は次式となる.

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a v(t) + B_r r_f \quad (11.6)$$

$$r(t) = C_a x_a(t) \quad (11.7)$$

ただし

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

制御則は次式の状態フィードバック制御とする。

$$v(t) = \text{sat}(-F_a x_a(t), a) = \text{sat}(-Fx(t) - F_i x_i(t), a) \tag{11.8}$$

ただし, F_a を次式と分割した。

$$F_a = \begin{bmatrix} F & F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

F_a の設計には極配置法または最適レギュレータ法が利用できる。本制御則は, 線形状態フィードバック制御を単に飽和させたものである。飽和が発生した場合, 制御系の安定性は保証されない。

11.2 IMC 構造を持つ制御系の設計法

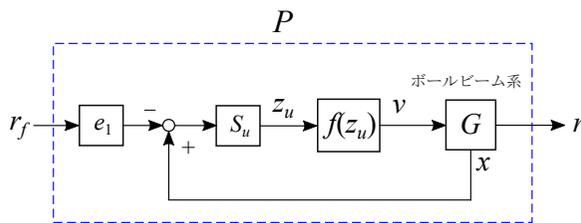


図 11.4: 第 10 章で設計した制御系

次に, 図 11.4 に示すように, 前章の (3) の方法 (ボールの最大速度を考慮した飽和制御則) で設計した制御系で入力を r_f , 出力を r としたときの入出力関係を

$$r = P(r_f) \tag{11.10}$$

と表し, 図 11.5 の IMC 制御系 [8] を構成する。 P_M は P のモデルであり, C_0 は安定な系 (IMC フィルタ) である¹。 IMC コントローラ C の出力 x_f が P の入力となる。

$$r = P(x_f) \tag{11.11}$$

¹ P_M の状態はコントローラ内で計算されるので, オブザーバは不要である。

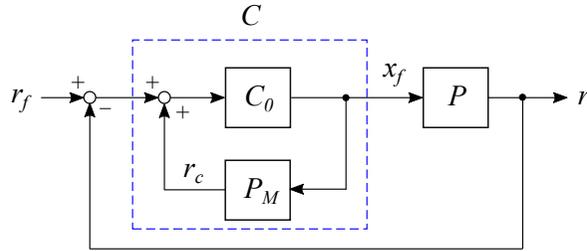


図 11.5: IMC 制御系のブロック線図

平衡点近くでは P , P_M , C_0 , C が線形系となり, 伝達関数表現できる. それらを $\bar{P}(s)$, $\bar{P}_M(s)$, $\bar{C}_0(s)$, $\bar{C}(s)$ と記す. 平衡点近くでコントローラ C が積分特性を持つように次式とする.

$$\bar{C}_0(0) = 1 \quad (11.12)$$

実際, このとき, $\bar{P}_M(0) = 1$ から $\bar{C}_0(0)\bar{P}_M(0) = 1$ となり

$$\bar{C}(s) = \frac{\bar{C}_0(s)}{1 - \bar{C}_0(s)\bar{P}_M(s)} \quad (11.13)$$

が 0 の極を持つ.

本制御系の安定性については理論的に言えることはあまりなく, P が安定で $P = P_M$ の場合, 制御系も安定であるという自明のことしか言えない.

上記 2 つの設計法で, 状態のうち i は, 第 7 章で述べたように, $G_1(s)$ 部分系に対するオブザーバによって推定する.

11.3 シミュレーション及び実験結果

上記の二つの方法を用いたシミュレーション及び実験結果を以下に示す. 共通部分として, 設計パラメータ T , a を $T = 0.2$ [s], $a = 0.05$ [rad] と与え, オブザーバゲイン K は $A_o - KC_o$ の固有値が $\{-5, -5\}$ となるように設計した. K などは Scilab で計算した.

(1) IP 型制御系の場合

前章と同様に, 目標値 $r_f(t)$ は, 速度の上限を 0.05 [m/s] とした 1 次遅れ系の出力として与えた. $r_f(t)$ を生成するブロック線図を図 11.6 に再度示す. T_0 は $T_0 = 0.5$ [s] とした. 関数 $r_0(t)$ として, 次の矩形波を与えた.

$$r_0 = a_0 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.15 \text{ [m]}, \quad \omega = 0.2 \text{ [rad/s]} \quad (11.14)$$

フィードバックゲイン F_a は, 次の指定極による極配置法で求めた.

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, -4, -4, -1 \right\} = \{-5, -5, -4, -4, -1\}$$

上記の目標値 $r_f(t)$ に対するシミュレーション及び実験結果を図 11.7, 図 11.8, 図 11.9 に, $r_f(t) = 0$ として, ボールを指で押すという外乱を与えたときの実験結果を図 11.10, 図 11.11,

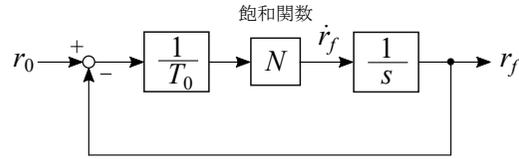


図 11.6: 飽和のある 1 次遅れ系のブロック線図（飽和関数の振幅制限は 0.05 [m/s] とした）

図 11.12 にそれぞれ示す。 $v(t)$ が飽和しないように目標値の振幅や速度を小さくした場合、制御系は安定となり、目標値が変化するとき過渡的な応答の遅れが見られるものの、目標値が一定になるところでは、偏差が 1 [mm] 程度までに抑えられている。一方、制御入力 $v(t)$ が長時間飽和する外乱を与えた場合（3 回目の外乱）、制御系が不安定になった。 $G(s)$ の 2 つの 0 極のため、入力飽和によるリセットウィンドアップが制御系の不安定化につながりやすいと考えられる。安定化される場合でも、 $r(t)$ の応答にアンダーシュート（ボールが元の位置を通り過ぎて反対方向に移動すること）が見られた。また、指定極をより速くすると（実部を負の方向により大きくすると）入力飽和に対するロバスト安定性がより低下する傾向がある。

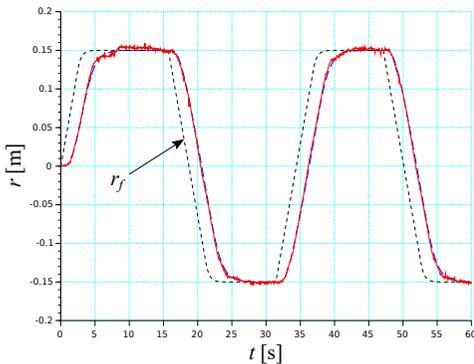


図 11.7: 目標値 $r_f(t)$ に対する IP 型制御系の出力 $r(t)$ の応答（実線：実験結果、破線：シミュレーション結果）

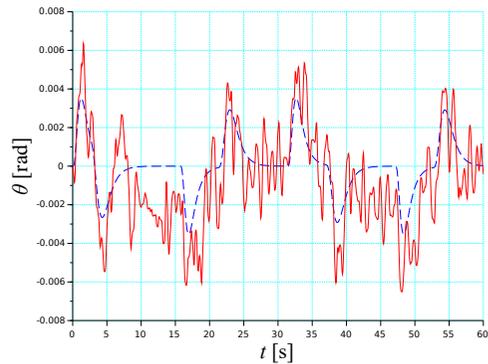


図 11.8: 目標値 $r_f(t)$ に対する IP 型制御系のビーム角 $\theta(t)$ の応答（実線：実験結果、破線：シミュレーション結果）

(2) IMC 構造を持つ制御系の場合

C_0 は速度の上限を 0.05 [m/s] とした 1 次遅れ系とした（図 11.13）。 $P = P_M$ のとき、すなわち、 $r = r_c$ のとき $x_f(t)$ が (1) の $r_f(t)$ に一致するように、時定数 T_f を (1) の T_0 と同じ値、すなわち、 $T_f = 0.5$ [s] とした。目標値 $r_f(t)$ は (11.14) 式の $r_0(t)$ とした。

前章と同様に、飽和制御則における設計パラメータは、 $v_{max} = 0.1$ [m/s]、 $f_1 = 2$ と与えた。上記の目標値に対するシミュレーション及び実験結果を図 11.14、図 11.15、図 11.16 に示す。また、上記と同様に与えた外乱に対する応答を図 11.17、図 11.18、図 11.19 に示す。目標値応答では、過渡応答がより速く目標値に追従しており、目標値が一定になるところでも良好な追従性（偏差 1 [mm] 程度以下）が見られた。また、制御入力に飽和する外乱に対しても、制御系が安定に動作し、定常偏差も同様に小さく抑えられている。しかし、比較的大きなアンダー

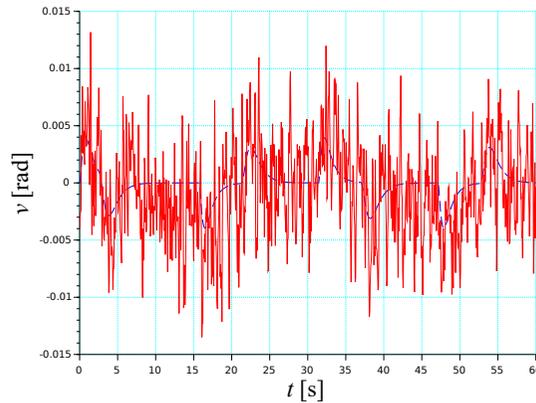


図 11.9: 目標値 $r_f(t)$ に対する IP 型制御系の制御入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

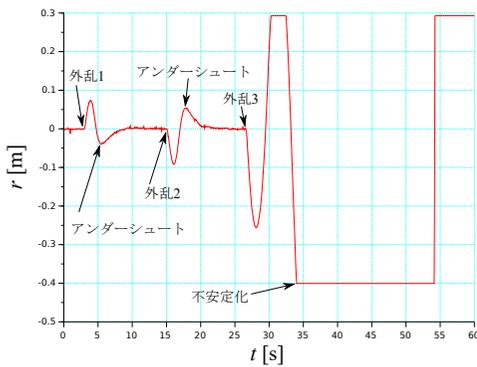


図 11.10: 外乱に対する IP 型制御系の出力 $r(t)$ の応答

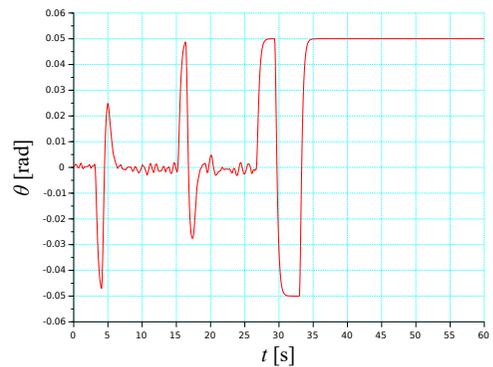


図 11.11: 外乱に対する IP 型制御系のビーム角 $\theta(t)$ の応答

シュートが見られた。目標値応答の場合と異なり、外乱応答では内部モデル P_M に外乱が入らないことがアンダーシュートの原因である。IP 型制御系でも、制御系が安定となる範囲の外乱を与えた場合、アンダーシュートが見られた。コントローラに積分特性を持たせた場合、いずれの方法でも外乱応答のアンダーシュートは避けられないようである。

前章の積分特性を持たない飽和制御則では、外乱に対してアンダーシュートが見られなかったことから、次のような制御則が考えられる。すなわち、外乱が生じた場合、IMC 構造から飽和制御則に切り換え、平衡点近くで IMC 構造に戻すという可変構造制御である。しかし、一般に可変構造制御系では構造の切り換え条件の設定が難しく、また、切り換え面近くでチャタリング (構造が頻りに切り換わること) が生じる可能性もある。ここでは、図 11.20 に示すように、IMC 制御の出力のフィードバック経路に飽和要素 (振幅制限を 0.02 [m] とした) を挿入し、大きな外乱に対してフィードバック量を絞り IMC 制御を弱めるという連続的な方法

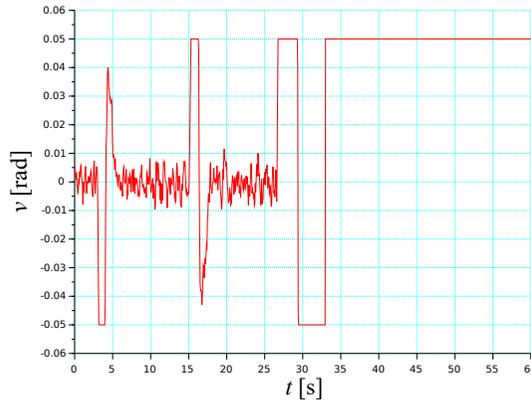


図 11.12: 外乱に対する IP 型制御系の制御入力 $v(t)$ の応答

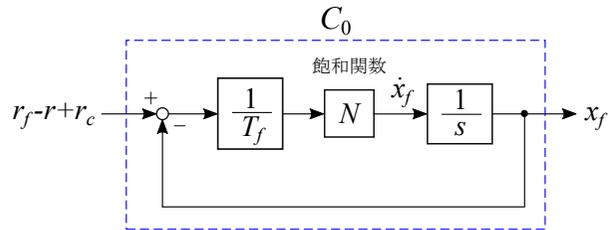


図 11.13: 飽和のある 1 次遅れ系のブロック線図 (飽和関数の振幅制限は 0.05 [m/s] とした)

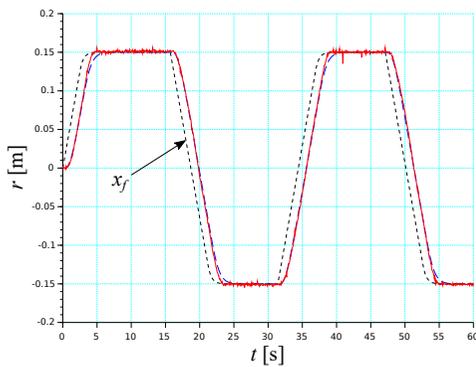


図 11.14: 目標値 $r_f(t)$ に対する IMC 構造を持つ制御系の出力 $r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

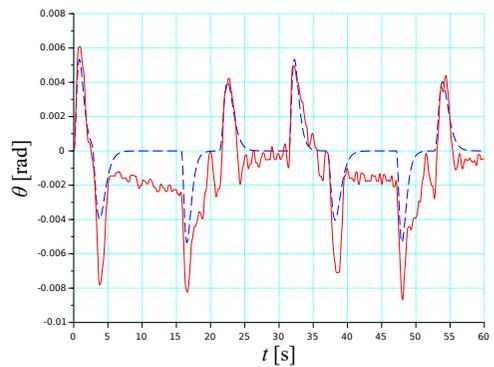


図 11.15: 目標値 $r_f(t)$ に対する IMC 構造を持つ制御系のビーム角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

を試みた. 図 11.21, 図 11.22, 図 11.23 にこの方策を施した場合の外乱応答を示す. アンダーシュートが小さく抑えられ, しかも, 定常偏差が同様に小さく抑えられていることがわかる.

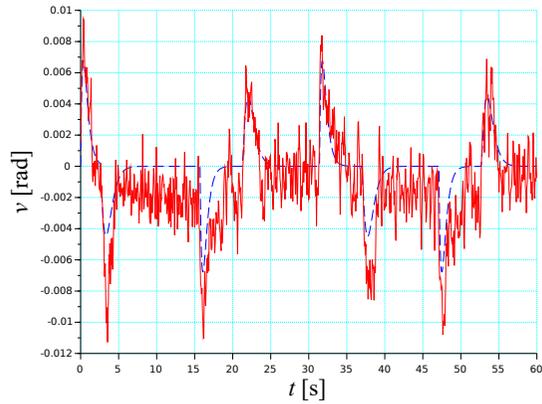


図 11.16: 目標値 $r_f(t)$ に対する IMC 構造を持つ制御系の制御入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

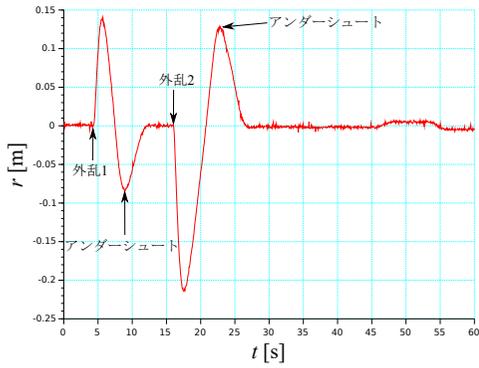


図 11.17: 外乱に対する IMC 構造を持つ制御系の出力 $r(t)$ の応答

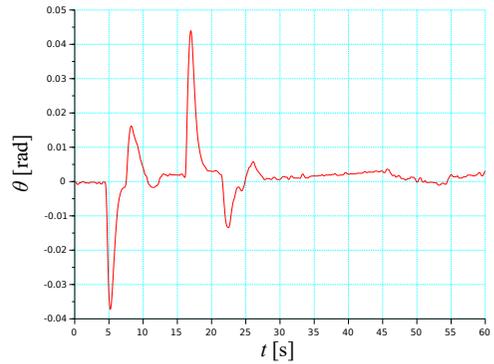


図 11.18: 外乱に対する IMC 構造を持つ制御系のビーム角 $\theta(t)$ の応答

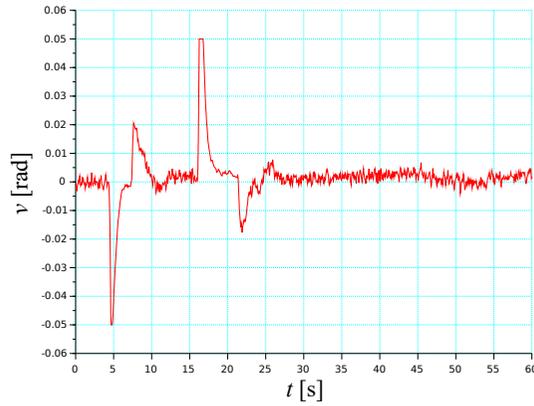


図 11.19: 外乱に対する IMC 構造を持つ制御系の制御入力 $v(t)$ の応答

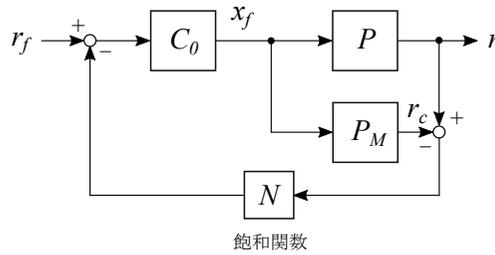


図 11.20: 修正 IMC 制御系のブロック線図

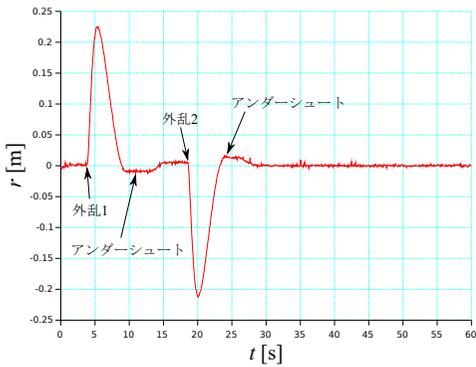


図 11.21: 外乱に対する修正 IMC 構造を持つ制御系の出力 $r(t)$ の応答

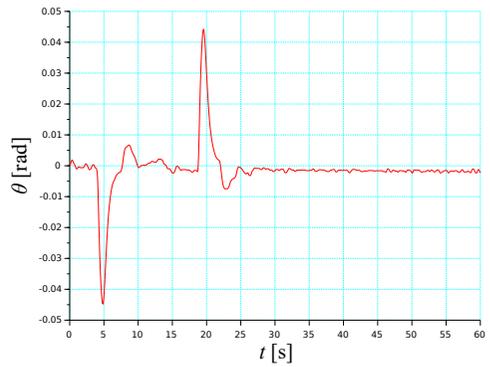


図 11.22: 外乱に対する修正 IMC 構造を持つ制御系のビーム角 $\theta(t)$ の応答

11.4 演習問題

1. 状態方程式

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

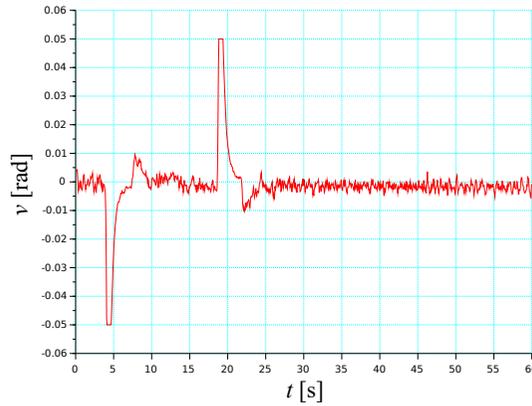


図 11.23: 外乱に対する修正 IMC 構造を持つ制御系の制御入力 $v(t)$ の応答

を座標変換

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

によって変換せよ。

2. 次の伝達関数を持つ系の強制応答² $r(t)$ を求めよ。ただし、 $\theta(t) = e^{-\frac{1}{T}t}$, $t \geq 0$ であり、 T は正の定数である。

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{M_0 g}{s^2}$$

3. 次の伝達関数を持つ系のステップ応答 ($v(t) = 1$, $t \geq 0$ に対する強制応答) $\theta(t)$ を求めよ。 T は正の定数である。

$$\frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{1}{(Ts + 1)^2}$$

²初期状態を 0 とした入力のみによる応答

第12章 水槽系に対する制御系の設計（1）

水槽系の制御では、水位を計測する必要があるが、水位も安価で精度の良いセンサを見つけるのが難しい物理量である（ボールビーム系のボールの位置のセンサについても同様）。今回、ギヤポンプで水を給排水し、水位を圧力式センサで測定するという水槽系を制御対象とする。選定したギヤポンプはドライバの入力電圧にほぼ比例した吐出量を与えるという優れたものであるが、センサにはノイズや非線形性があり、あまり精度の良い計測はできない（最大測定誤差 5 [mm] 程度）。このような状況は、特に、プロセス制御分野でよくあることで、モデル誤差や計測誤差などを考慮して、モデリングと制御を行う必要がある。本章では、水位センサの較正を行った後、水槽系のモデリングを行う。

12.1 水槽系実験装置とそのモデリング



図 12.1: 水槽系実験装置

今回制御対象とする水槽系実験装置の概観を図 12.1 に、その設計図を図 12.2、図 12.3 に示す。本実験装置は、元々流出孔を持つ直列二重水槽系として設計・製作されたが、ここでは、孔（ウィルコ 六角穴付き止めねじ 流量調節穴付き（オリフィスセット）穴径 1.6 [mm]）を塞ぎ、流出孔を持たない単一的水槽系とした。水槽は断面積が一定（ $0.0025 \text{ [m}^2\text{]}$ ）の亚克力水槽である。ギヤポンプ（ツカサ電工 TG-47G-PU-DB4-KB 24V, 吐出流量 400 [ml/min]）によって水槽に水を給排水し、圧力式センサ（Milone Technologies SFE-SEN-10221）により水位を計

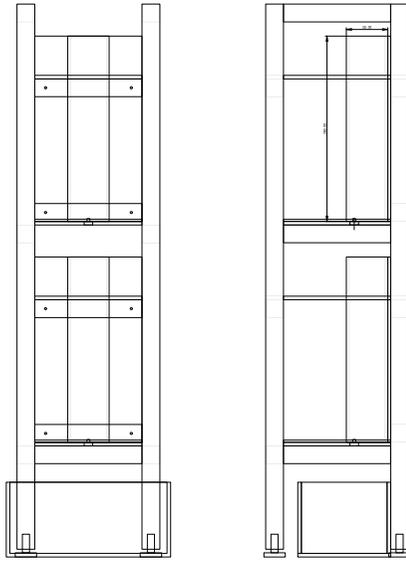


図 12.2: 水槽系実験装置の設計図 (1)

水槽系 2019. 11. 8

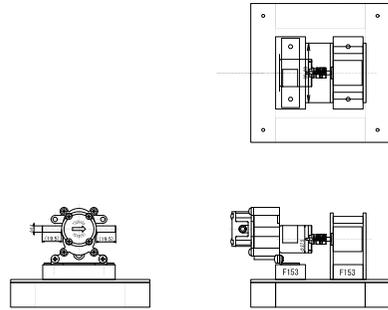


図 12.3: 水槽系実験装置の設計図 (2)

測している。この水位センサの出力電圧にはノイズがあったので、RC フィルタ ($R = 10$ [k Ω], $C = 1$ [μ F]), よって、時定数 $T = CR = 0.01$ [s]) を通して Arduino に入力した。

ギヤポンプの回転数は、モータシャフトに連結したロータリーエンコーダ (オムロン E6A2-CW3C 500P/R) によって計測している。第 4 章で見たように、ロータリーエンコーダを利用した角速度フィードバック補償を行えば、モータの回転速度を精密に制御できる。ギヤポンプの吐出量はモータの回転速度に比例するので、吐出量を精密に制御したいときにこの信号が使える。

まず、水位センサの較正を行った。角速度フィードバック補償を用いて、ギヤポンプの吐出量 (モータの回転速度) がドライバの入力電圧に比例するようにしておく。そして、水を貯めた水槽から、ギヤポンプで水を一定流量で排水し、初期水位から水位を一定速度で下げていく。そのときの時刻 t に対する水位センサの電圧データ $\frac{A_0}{500}$ (A_0 に変換係数 $\frac{3.3}{1024}$ を掛けると電圧 [V] になる) のグラフを図 12.4 に示す。

水位 $y(t)$ は次のように求めた。初期時刻 $t = 0$ [s] と最終時刻 $t = 120$ [s] の水位 h_0 [m], h_1 [m] をスケールで測定し、途中の時刻の水位を線形に内挿した。すなわち、次式とした。

$$y(t) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{120}t, \quad h_0 = 0.169 \text{ [m]}, \quad h_1 = 0.048 \text{ [m]} \quad (12.1)$$

時間軸に対して等しい刻み幅で 41 組の電圧と水位のデータをサンプルし、それらから電圧データ ($x = \frac{A_0}{500}$) と水位 (y) の関係を 3 次多項式で最小二乗近似した。

$$y = 0.160 + 0.369x - 0.664x^2 + 0.190x^3 \quad (12.2)$$

測定データと近似曲線の間を関数を図 12.5 に示す。

次に、水槽系のモデリングについて説明する。後に、入力部にむだ時間を置くため、角速度フィードバック補償は行わず (行えない想定なので)、単に、ドライバの速度指令電圧に 0.1 [V] 加算するという不感帯補償を行った。入力 (ドライバの入力電圧) として、 $u(t) = 0.8$ [V] を

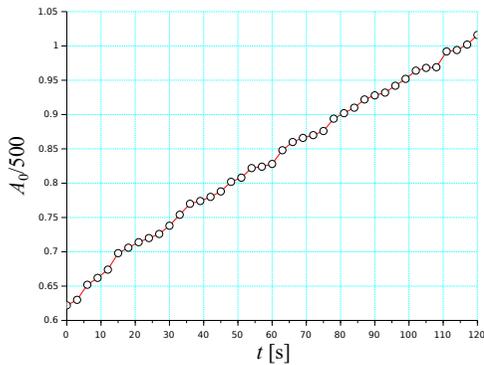


図 12.4: 水位センサの電圧データ (○がサンプル点)

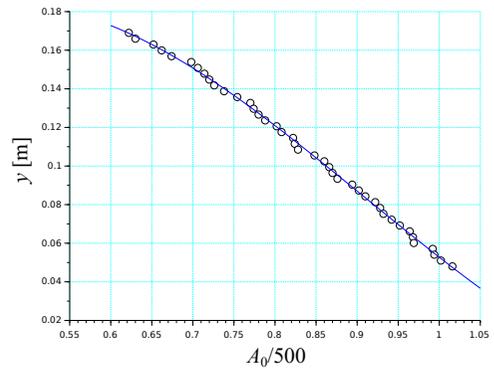


図 12.5: 電圧と水位の測定データ (○) と近似曲線

与えたときの水槽系のステップ応答を図 12.6 に示す. 同図から, $y(t)$ は勾配がほぼ一定の直線であるので, 水槽系を次式の積分器としてモデル化した (図 12.7).

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s} \quad (12.3)$$

パラメータ k はこのステップ応答から次のように同定した. 図 12.6 から, 初期水位と最終水位はそれぞれ

$$y(0) = 0.045 \text{ [m]}, \quad y(120) = 0.160 \text{ [m]}$$

よって

$$k = \frac{0.160 \text{ [m]} - 0.045 \text{ [m]}}{120 \text{ [s]} \times 0.8 \text{ [V]}} = 0.0012 \text{ [m/Vs]} \quad (12.4)$$

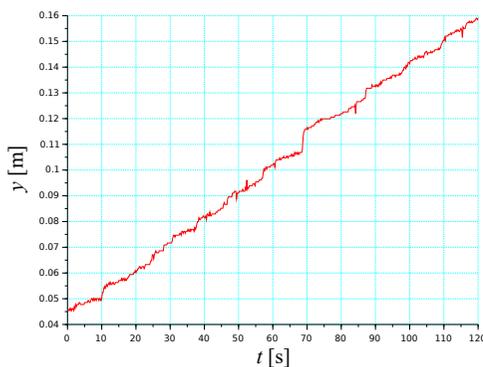


図 12.6: 水槽系のステップ応答

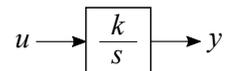


図 12.7: 水槽系のモデル

12.2 演習問題

1. 流出孔を持つ断面積一定の水槽系に一定流量 q_0 [m³] を与えたとき、平衡水位が h_0 [m] となった。 h_0, q_0 からの水位と流量の偏差をそれぞれ x [m], u [m³] とすると、水槽系の線形化微分方程式は次式で表される [2].

$$C\dot{x}(t) = -\frac{1}{R}x(t) + u(t), \quad R = \frac{1}{fa}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad (12.5)$$

ただし、 C [m²] は水槽の断面積、 a [m²] は流出孔の断面積、 f は流量係数、 g [m/s²] は重力加速度である。上式を伝達関数表現すると次式を得る。

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{R}{Ts + 1}, \quad T = CR \quad (12.6)$$

$h_0 = 0.12$ [m], $f = 0.9$ として、本実験装置の水槽系に対する時定数 T [s] を計算せよ。

2. 以下の用語を説明せよ。

(1) ギャポンプ (2) オリフィス (3) 流量係数 (4) RC フィルタ

第13章 水槽系に対する制御系の設計（2）

水槽系の入力にむだ時間と振幅制限がある場合の水位制御問題を考える。第6章と同様に、まず、制御対象を積分器+むだ時間（2次パデ近似）で近似し、モード分解法を用いて、積分器の部分を安定化する状態フィードバック制御を求める。これによって得られるコントローラは積分特性を持たないので、モデル誤差や外乱がある場合、出力に定常偏差が残る。この問題を解決するために、制御系全体に対して、外乱応答も考慮した修正IMC法を適用し、コントローラに積分特性を持たせる。比較のため、アンチwindアップ補償を組み込んだPI補償器（SIMC法で設計）による制御実験も行う。

13.1 モード分解法による安定化

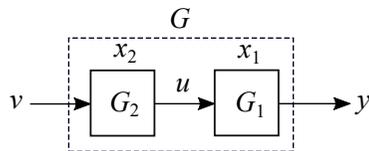


図 13.1: 制御対象のブロック線図

水槽系の入力部にむだ時間がある場合の制御を考える（図 13.1）。

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (13.1)$$

ここで

$$G_1(s) = \frac{k}{s}, \quad G_2(s) = \frac{L^2s^2 - 6Ls + 12}{L^2s^2 + 6Ls + 12} \quad (13.2)$$

$G_1(s)$ が水槽系、 $G_2(s)$ がむだ時間系（1次より精度が高い2次パデ近似とした）を表す。今回、入力部にむだ時間があるという設定なので、第4章で行った速度フィードバック補償は行えないことに注意する。

物理的な理由（ポンプの吐出量に制限があるなど）または運転条件（安全面から水の流量を制限したいなど）から、入力 $v(t)$ には次の制限が課せられているとする。

$$|v(t)| \leq v_{max} \quad (13.3)$$

v_{max} は与えられる正の定数である。

問題は、出力 $y(t)$ （水位）を一定の目標値 r_f に速やかに近づける制御則を求めることである。一般性を失うことなく、 $r_f = 0$ とする。

モード分解法は、制御対象の一部の極を状態フィードバックによって移動するというものである。むだ時間がある場合、むだ時間は本来改善できないので、むだ時間を表す $G_2(s)$ の極は不変とし、 $G_1(s)$ の極のみを移動するというモード分解法が妥当な制御方法であることが知られている [4]。

以下では、まず、 $G_1(s)$ の極のみを移動する状態フィードバック制御を単に飽和させるという制御を求める。一般に、系を安定にする線形状態フィードバック制御を単に飽和させたとき、制御系の安定性は保証されない。しかし、 $G_1(s) = \frac{k}{s}$ の場合、制御入力に飽和しても安定となることが知られている。

$G_2(s)$ を

$$G_2(s) = \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} + d \quad (13.4)$$

と整理し、 $G_2(s)$ の状態を x_2 とすると、この状態方程式は次式で表されることに注意する [2]。

$$\dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (13.5)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} x_2(t) + dv(t) \quad (13.6)$$

また、 $G_1(s)$ の状態方程式表現

$$\dot{x}_1(t) = u(t) \quad (13.7)$$

$$y(t) = kx_1(t) \quad (13.8)$$

を用いると、(13.1) 式は次の状態方程式で表される。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{12}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (13.10)$$

$G_1(s)$ の極 0 のみを移動させる状態フィードバックを求めるため、上式をブロック対角化する。座標変換

$$z = Sx, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

を適用すると次式を得る。

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}v(t) \quad (13.12)$$

$$y = \tilde{C}z(t) \quad (13.13)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} k & -\frac{12k}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

z_1 部分系の極（固有値）を指定極 $p_1 < 0$ に配置する状態フィードバック制御 ($v_l(t)$ で表す) は次式と求まる.

$$v_l(t) = F_1 z_1(t), \quad F_1 = p_1 \quad (13.16)$$

$v(t)$ は $v_l(t)$ を単に飽和させた制御として次式とする.

$$v(t) = \text{sat}(v_l(t), v_{max}) \quad (13.17)$$

$v(t)$ の計算には $z_1(t)$ が必要であるが, これは測定できないので, その推定 $\hat{z}_1(t)$ を用いる. $y(t)$ が測定可能なので, $x_1(t)$ は (13.10) 式から

$$x_1(t) = \frac{1}{k} y(t) \quad (13.18)$$

と得られる. また, $x_2(t)$ の推定 $\hat{x}_2(t)$ は次式 (低次元オブザーバで, (13.9) 式の 2 番目と 3 番目の式である. $G_2(s)$ のモードを制御しないためオブザーバゲインを 0 としている [6]) を実時間で解くことにより計算する.

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_{22}\hat{x}_2(t) + B_2v(t) \quad (13.19)$$

結局, $\hat{z}_1(t)$ は (13.11) 式から

$$\hat{z}_1(t) = x_1(t) + X\hat{x}_2(t) \quad (13.20)$$

と得られる.

r_f が 0 でない場合, 上記の制御則で $y(t)$ が r_f に収束するように $v_l(t)$ を次式とする.

$$v_l(t) = F_1 \hat{z}_1(t) + v_0 \quad (13.21)$$

ただし

$$v_0 = \frac{r_f}{T_{y,v_0}(0)} \quad (13.22)$$

$T_{y,v_0}(s)$ は次式で計算できる.

$$T_{y,v_0}(s) = \tilde{C}\{sI_3 - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})\}^{-1}\tilde{B} \quad (13.23)$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix}$$

13.2 IMC 制御系の構成

上記の制御則は積分特性を持たないため, 外乱やモデル誤差によって出力 $y(t)$ に偏差が生じる可能性がある. 一方, 積分器を導入した場合, 入力飽和との組み合わせでリセットウィンドアップが生じることが知られている [5]. この問題点を改善するため, IMC 構造を導入してコントローラに積分特性を持たせる方法を採用する [8].

上記の制御系で入力を r_f , 出力を y としたときの入出力関係を

$$y = P(r_f) \quad (13.24)$$

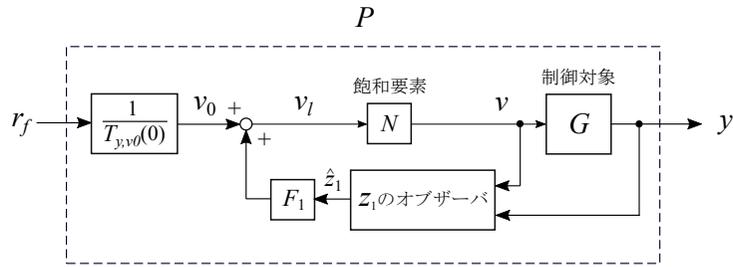


図 13.2: P の構造を表すブロック線図

と表す. 図 13.2 に P の構造を示す. P に対して, 図 13.3 の IMC 制御系を構成する. P_M は P のモデルであり, $C_0(s)$ は安定な伝達関数 (フィルタ) である. IMC コントローラ C の出力 x_f が P の入力となる.

$$y = P(x_f) \tag{13.25}$$

平衡点近くでは P, P_M, C が線形系となり, 伝達関数表現できる. それらを $\bar{P}(s), \bar{P}_M(s), \bar{C}(s)$ と記す. ここでは, $C_0(s)$ を次の 1 次遅れ系とする.

$$C_0(s) = \frac{1}{T_f s + 1} \tag{13.26}$$

$T_f > 0$ はフィルタの時定数である. このとき

$$C_0(0) = 1 \tag{13.27}$$

であるので, コントローラ C は平衡点近くで積分特性を持つ. 実際, $\bar{P}_M(0) = 1$ から $C_0(0)\bar{P}_M(0) = 1$ となり, $\bar{C}(s) = \frac{C_0(s)}{1 - C_0(s)\bar{P}_M(s)}$ が 0 の極を持つことがわかる.

シミュレーション及び実験では, 外乱対策を施した修正 IMC 制御系 (図 13.4) を用いる.

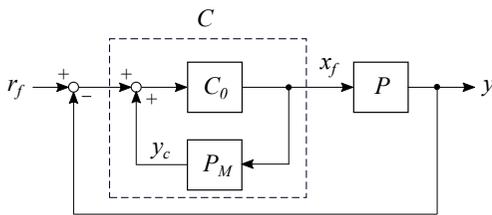


図 13.3: P に対する IMC 制御系のブロック線図

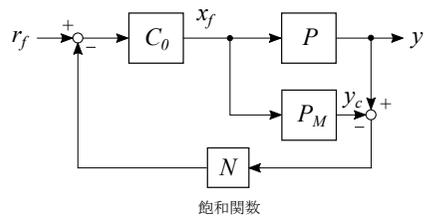


図 13.4: 修正 IMC 制御系のブロック線図

13.3 シミュレーション及び実験結果

水槽系の伝達関数 $G_1(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s}$ の k は前章で同定済みである¹.

$$k = 0.0012 \text{ [m/Vs]} \tag{13.28}$$

¹ ギャボンプの不感帯をさらに小さくするため, ドライバの速度指令電圧の加算分を 0.1 [V] から 0.15 [V] に変更した. このため, k も少し変化している可能性があるが, 前章のものを使用した.

むだ時間は $L = 10$ [s] とし, 入力 $v(t)$ を Arduino プログラムで遅延させることで作った. サンプル周期は $\Delta t = 0.1$ [s] とした².

初期水位を 0 としたときの目標値 r_f , $v(t)$ の振幅制限 v_{max} , 指定極 p_1 , フィルタの時定数 T_f は以下のように与えた.

$$r_f = 0.06 \text{ [m]}, \quad v_{max} = 0.8 \text{ [V]}, \quad p_1 = -0.05, \quad T_f = 0.4 \text{ [s]} \quad (13.29)$$

目標値応答に対する実験およびシミュレーション結果を図 13.5, 図 13.6 に示す. 入力 $v(t)$ が飽和しているにもかかわらず, 出力 $y(t)$ はオーバーシュートなく, ほぼ目標値に収束している. IMC 構造による積分特性のため, 定常偏差が小さくなり, リセットウィンドアップも回避できている. また, 外乱 (水を水槽に注入し, 水位を約 4cm 上昇させた) 応答に対する実験結果を図 13.7, 図 13.8 に示す. 修正 IMC の飽和要素の振幅制限は 0.015 [m] とした. 比較のため, 通常の IMC 制御系の応答も示す. 外乱が内部モデル P_M に入力されないため, アンダーシュートが発生するが, 修正 IMC 制御系では, このピーク値が抑制されていることがわかる.

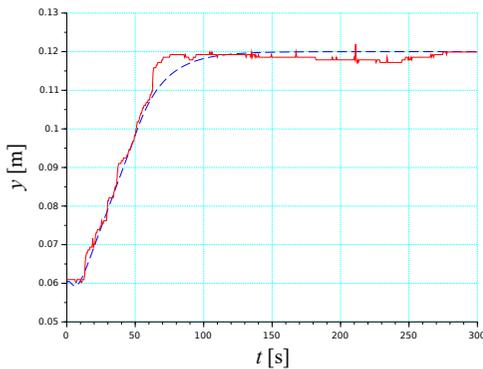


図 13.5: 目標値に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

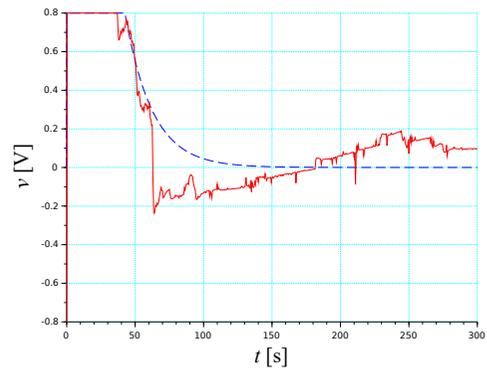


図 13.6: 目標値に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

比較のため, 自動整合によるアンチwindアップ補償 [25]³を持つ PI 制御系 (図 13.9) の目標値応答に対する実験およびシミュレーション結果を図 13.10, 図 13.11 に示す. r_f と v_{max} は上記と同じとした. 第 6 章と同様に, SIMC 法 [15] を用いて PI 補償器 $C(s)$ を設計した.

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (13.30)$$

$$K_P = \frac{1}{k(T_c + L)}, \quad T_I = 4(T_c + L), \quad T_c = L \quad (13.31)$$

²制御系の応答速度 (線形の範囲では極が $p = -0.05$ なので, 時定数は $\frac{1}{|p|} = 20$ [s] となる) から決定した (内部モデルやオブザーバをオイラー法で解くための妥当な Δt はおよそ時定数の $\frac{1}{20}$ 以下). また, $L = N\Delta t$ の N を不都合な程大きくしないため (N が大きくなるとメモリーや実行時間が大きくなる) という理由もある.

³飽和要素の入出力の差をコントローラの積分器の前にフィードバックする補償法で, 飽和が発生すると積分器を 1 次遅れ系のような安定系 (有界な入力が入り続けても出力が有界となる系) にする.

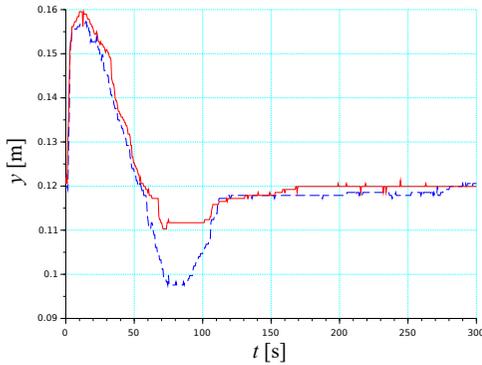


図 13.7: 外乱に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線 : 修正 IMC, 破線 : IMC)

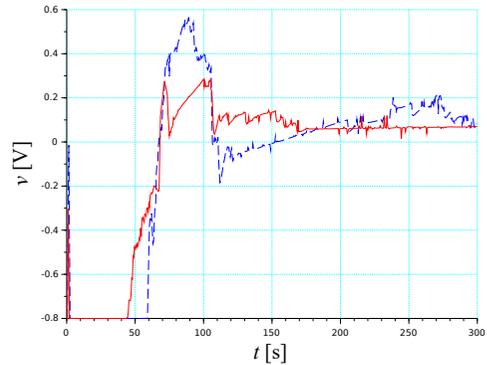


図 13.8: 外乱に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線 : 修正 IMC, 破線 : IMC)

アンチwindアップ補償のパラメータ T_t はシミュレーションから良好な応答を与える値として以下を選定した.

$$T_t = 18 \tag{13.32}$$

オーバーシュートがないことから, リセットwindアップが回避されていることがわかる. また, 補償器の積分作用によって, $y(t)$ がほぼ目標値に収束している. また, 上記と同様の外乱を与えたときの実験結果を図 13.12, 図 13.13 に示す. 比較のため, アンチwindアップ補償がない場合も示している. 外乱応答に対しても本コントローラは良好な性能を発揮することがわかる.

自動整合によるアンチwindアップ補償では, 入力飽和が発生すると元のコントローラの機能を変えてしまうので, この間, 制御系の性能について何の保証もない. 一般に, このようなアンチwindアップ補償が有効な制御系は比較的単純なものに限られる.

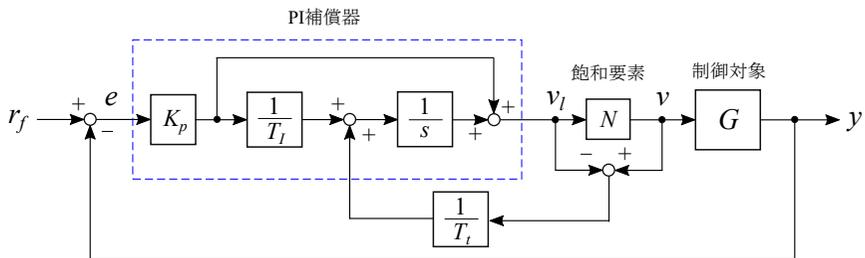


図 13.9: アンチwindアップ補償を持つ PI 制御系

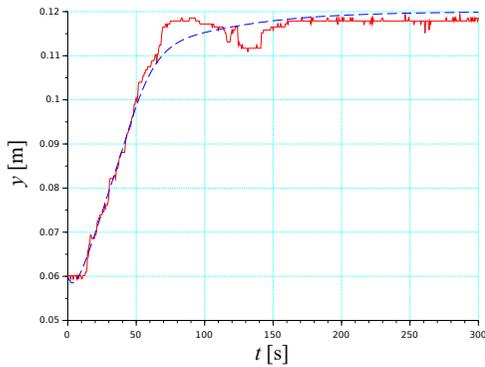


図 13.10: 目標値に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

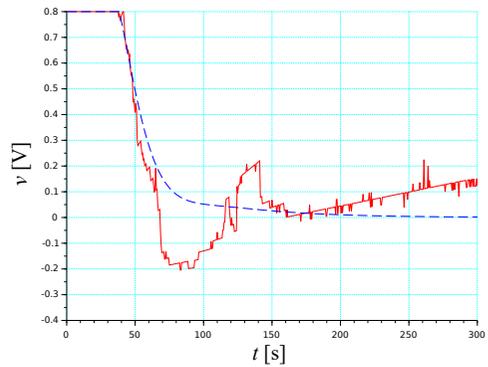


図 13.11: 目標値に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

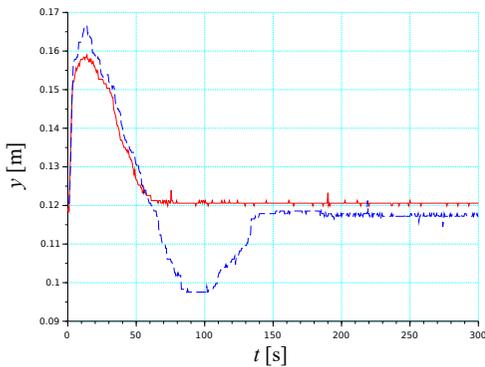


図 13.12: 外乱に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線: 自動整合あり, 破線: 自動整合なし)

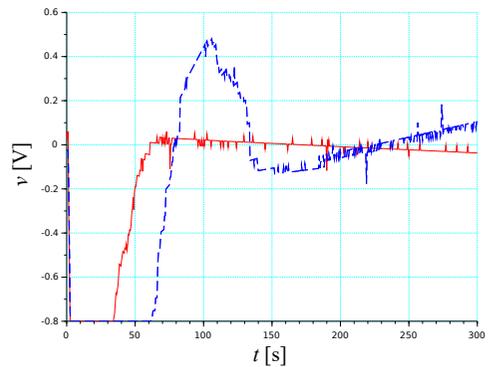


図 13.13: 外乱に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線: 自動整合あり, 破線: 自動整合なし)

13.4 演習問題

1. (13.1) 式の $G(s)$ に対応する状態方程式が (13.9), (13.10) 式となることを示せ.
2. 座標変換 (13.11) によって, 状態方程式 (13.9), (13.10) が (13.12), (13.13) に変換されることを示せ.
3. 一般に, A_{11} と A_{22} が共通の固有値を持たないブロック上三角行列

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

をブロック対角行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

に変換する座標変換行列 S は

$$S = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

と表され, X は次のシルベスター方程式の解として求まる.

$$-A_{11}X + XA_{22} + A_{12} = 0 \tag{13.33}$$

これは, 次式に注意すればわかる.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= SAS^{-1} = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{11}X + XA_{22} + A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(13.33) 式を解くことによって, (13.11) 式の X を求めよ.

第14章 漏れる水槽系に対する制御系の設計

底面に孔（ウィルコ 六角穴付き止めねじ 流量調節穴付き（オリフィスセット）穴径1.6[mm]）を持つ水槽系の入力にむだ時間と振幅制限がある場合の水位制御問題を考える．第3章と同様に，まず，制御対象を1次遅れ系+むだ時間（2次パデ近似）で近似し，モード分解法を用いて，1次遅れ系の部分をより安定化する状態フィードバック制御を求める．これによって得られるコントローラは積分特性を持たないので，モデル誤差や外乱がある場合，出力に定常偏差が残る．この問題を解決するために，制御系全体に対して，外乱応答も考慮した修正 IMC 法を適用し，コントローラに積分特性を持たせる．比較のため，アンチwindアップ補償を組み込んだ PI 補償器（SIMC 法で設計）による制御実験も行う．

14.1 モード分解法による安定化

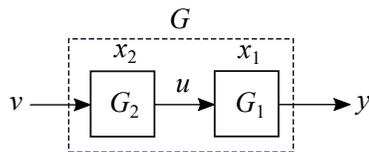


図 14.1: 制御対象のブロック線図

漏れる水槽系の入力部にむだ時間がある場合の制御を考える（図 14.1）．

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (14.1)$$

ここで

$$G_1(s) = \frac{k}{Ts+1}, \quad G_2(s) = \frac{L^2s^2 - 6Ls + 12}{L^2s^2 + 6Ls + 12} \quad (14.2)$$

$G_1(s)$ が水槽系， $G_2(s)$ がむだ時間系（1次より精度が高い2次パデ近似とした）を表す．今回，入力部にむだ時間があるという設定なので，第4章で行った速度フィードバック補償は行えないことに注意する．

物理的な理由（ポンプの吐出量に制限があるなど）または運転条件（安全面から水の流量を制限したいなど）から，入力 $v(t)$ には次の制限が課せられているとする．

$$|v(t)| \leq v_{max} \quad (14.3)$$

v_{max} は与えられる正の定数である。

問題は、出力 $y(t)$ (水位) を一定の目標値 r_f に速やかに近づける制御則を求めることである。一般性を失うことなく、 $r_f = 0$ とする。

モード分解法は、制御対象の一部の極を状態フィードバックによって移動するというものである。むだ時間がある場合、むだ時間は本来改善できないので、むだ時間を表す $G_2(s)$ の極は不変とし、 $G_1(s)$ の極のみを移動するというモード分解法が妥当な制御方法であることが知られている [4]。

以下では、まず、 $G_1(s)$ の極のみを移動する状態フィードバック制御を単に飽和させるという制御を求める。一般に、系を安定にする線形状態フィードバック制御を単に飽和させたとき、制御系の安定性は保証されない。しかし、 $G_1(s) = \frac{k}{Ts+1}$ の場合、制御入力に飽和しても安定となることが知られている。

$G_2(s)$ を

$$G_2(s) = \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} + d \quad (14.4)$$

と整理し、 $G_2(s)$ の状態を x_2 とすると、この状態方程式は次式で表されることに注意する [2]。

$$\dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (14.5)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} x_2(t) + dv(t) \quad (14.6)$$

また、 $G_1(s)$ の状態方程式表現

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{T}(u(t) - x_1(t)) \quad (14.7)$$

$$y(t) = kx_1(t) \quad (14.8)$$

を用いると、(14.1) 式は次の状態方程式で表される。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & -\frac{12}{TL} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (14.9)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (14.10)$$

$G_1(s)$ の極 $-\frac{1}{T}$ のみを移動させる状態フィードバックを求めるため、上式をブロック対角化する。

座標変換

$$z = Sx, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \quad (14.11)$$

$$X_1 = \frac{12T}{L^2}X_2, \quad X_2 = \frac{12L}{12T^2 - 6TL + L^2}$$

を適用すると次式を得る。

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}v(t) \quad (14.12)$$

$$y = \tilde{C}z(t) \quad (14.13)$$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} + X_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

$$\tilde{C} = \left[k \mid -kX_1 \quad -kX_2 \right], \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (14.15)$$

z_1 部分系の極（固有値）を指定極 $p_1 < 0$ に配置する状態フィードバック制御 ($v_l(t)$ で表す) は次式と求まる.

$$v_l(t) = F_1 z_1(t), \quad F_1 = \frac{1 + Tp_1}{1 + TX_2} \quad (14.16)$$

$v(t)$ は $v_l(t)$ を単に飽和させた制御として次式とする.

$$v(t) = \text{sat}(v_l(t), v_{max}) \quad (14.17)$$

$v(t)$ の計算には $z_1(t)$ が必要であるが, これは測定できないので, その推定 $\hat{z}_1(t)$ を用いる. $y(t)$ が測定可能なので, $x_1(t)$ は (14.10) 式から

$$x_1(t) = \frac{1}{k}y(t) \quad (14.18)$$

と得られる. また, $x_2(t)$ の推定 $\hat{x}_2(t)$ は次式 (低次元オブザーバで, (14.9) 式の 2 番目と 3 番目の式である. $G_2(s)$ のモードを制御しないためオブザーバゲインを 0 としている [6]) を実時間で解くことにより計算する.

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_{22}\hat{x}_2(t) + B_2v(t) \quad (14.19)$$

結局, $\hat{z}_1(t)$ は (14.11) 式から

$$\hat{z}_1(t) = x_1(t) + X\hat{x}_2(t) \quad (14.20)$$

と得られる.

r_f が 0 でない場合, 上記の制御則で $y(t)$ が r_f に収束するように $v_l(t)$ を次式とする.

$$v_l(t) = F_1\hat{z}_1(t) + v_0 \quad (14.21)$$

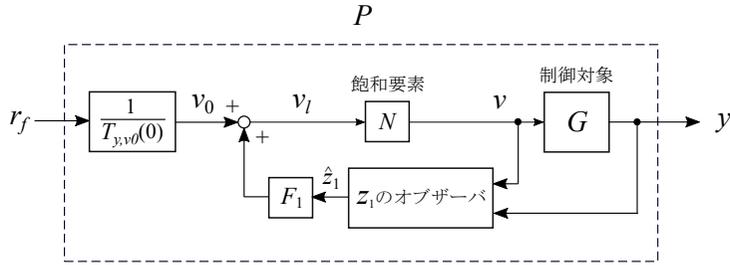
ただし

$$v_0 = \frac{r_f}{T_{y,v_0}(0)} \quad (14.22)$$

$T_{y,v_0}(s)$ は次式で計算できる.

$$T_{y,v_0}(s) = \tilde{C}\{sI_3 - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F})\}^{-1}\tilde{B} \quad (14.23)$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \end{bmatrix}$$

図 14.2: P の構造を表すブロック線図

14.2 IMC 制御系の構成

上記の制御則は積分特性を持たないため、外乱やモデル誤差によって出力 $y(t)$ に偏差が生じる可能性がある。一方、積分器を導入した場合、入力飽和との組み合わせでリセットウィンドアップが生じることが知られている [5]。この問題点を改善するため、IMC 構造を導入してコントローラに積分特性を持たせる方法を採用する [8]。

上記の制御系で入力を r_f 、出力を y としたときの入出力関係を

$$y = P(r_f) \quad (14.24)$$

と表す。図 14.2 に P の構造を示す。 P に対して、図 14.3 の IMC 制御系を構成する。 P_M は P のモデルであり、 $C_0(s)$ は安定な伝達関数（フィルタ）である。IMC コントローラ C の出力 x_f が P の入力となる。

$$y = P(x_f) \quad (14.25)$$

平衡点近くでは P 、 P_M 、 C が線形系となり、伝達関数表現できる。それらを $\bar{P}(s)$ 、 $\bar{P}_M(s)$ 、 $\bar{C}(s)$ と記す。ここでは、 $C_0(s)$ を次の 1 次遅れ系とする。

$$C_0(s) = \frac{1}{T_f s + 1} \quad (14.26)$$

$T_f > 0$ はフィルタの時定数である。このとき

$$C_0(0) = 1 \quad (14.27)$$

であるので、コントローラ C は平衡点近くで積分特性を持つ。実際、 $\bar{P}_M(0) = 1$ から $C_0(0)\bar{P}_M(0) = 1$ となり、 $\bar{C}(s) = \frac{C_0(s)}{1 - C_0(s)\bar{P}_M(s)}$ が 0 の極を持つことがわかる。

シミュレーション及び実験では、外乱対策を施した修正 IMC 制御系（図 14.4）を用いる。

14.3 シミュレーション及び実験結果

入力 $u = 0.8$ [V] に対する平衡水位 $y(\infty) = 0.07$ [m] から、 $u = 0.8$ [V] + 0.15 [V] を与えたステップ応答（平衡水位 $y(\infty) = 0.104$ [m]）を図 14.5 に示す。これから、制御対象のパラ

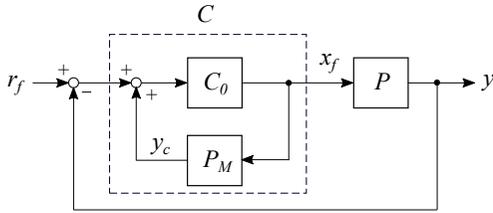


図 14.3: P に対する IMC 制御系のブロック線図

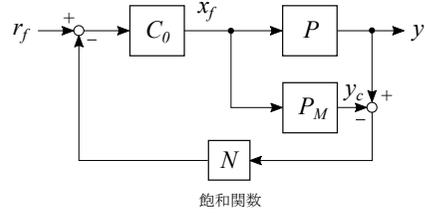


図 14.4: 修正 IMC 制御系のブロック線図

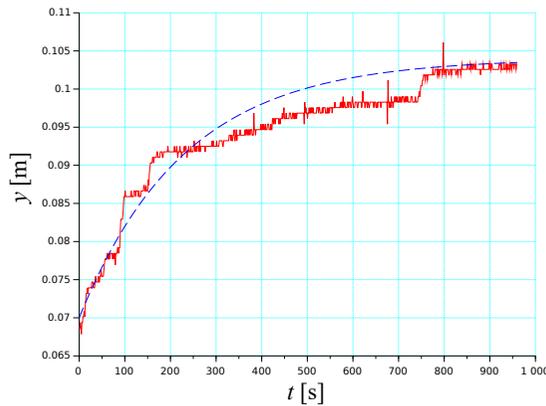


図 14.5: 水槽系のステップ応答 : $u = 0.8$ [V], $y(\infty) = 0.07$ [m] ; $u = 0.8$ [V] + 0.15 [V], $y(\infty) = 0.104$ [m] (破線は同定したモデルのステップ応答)

メータ k , T が次式と同定された¹.

$$k = \frac{0.104 \text{ [m]} - 0.07 \text{ [m]}}{0.15 \text{ [V]}} = 0.2267 \text{ [m/V]}, \quad T = 230 \text{ [s]} \quad (14.28)$$

むだ時間は $L = 50$ [s] とし, 入力 $v(t)$ を Arduino プログラムで遅延させることで作った. サンプルング周期は $\Delta t = 1$ [s] とした.

初期水位 ($u = 0.8$ [V] に対する平衡水位 $y(\infty) = 0.07$ [m]) を 0 としたときの目標値 r_f , $v(t)$ の振幅制限 v_{max} , 指定極 p_1 , フィルタの時定数 T_f は以下のように与えた.

$$r_f = 0.02 \text{ [m]}, \quad v_{max} = 0.2 \text{ [V]}, \quad p_1 = -0.015, \quad T_f = 5 \text{ [s]} \quad (14.29)$$

修正 IMC の飽和要素の振幅制限は 0.005 [m] とした.

目標値応答に対する実験およびシミュレーション結果を図 14.6, 図 14.7 に示す. 入力 $v(t)$ が飽和しているにもかかわらず, 出力 $y(t)$ はオーバーシュートなく, ほぼ目標値に収束している. IMC 構造による積分特性のため, 定常偏差が小さくなり, リセットwindアップも回避できている. また, 外乱 (水を水槽に注入し, 水位を約 2cm 上昇させた) 応答に対する実験結果を図 14.8, 図 14.9 に示す.

¹ ギャポンプの不感帯を小さくするため, ドライバの速度指令電圧の加算分を 0.15 [V] とした.

比較のため、通常の IMC 制御系の応答も示す。外乱が内部モデル P_M に入力されないため、アンダーシュートが発生するが、修正 IMC 制御系では、このピーク値が抑制されていることがわかる。

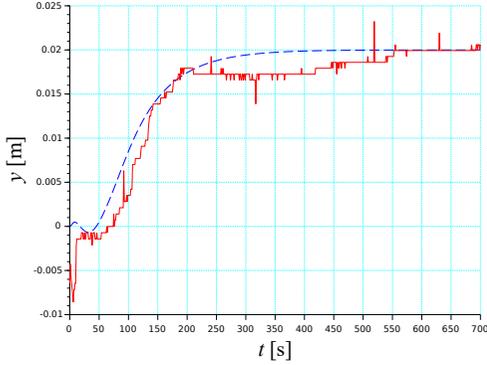


図 14.6: 目標値に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

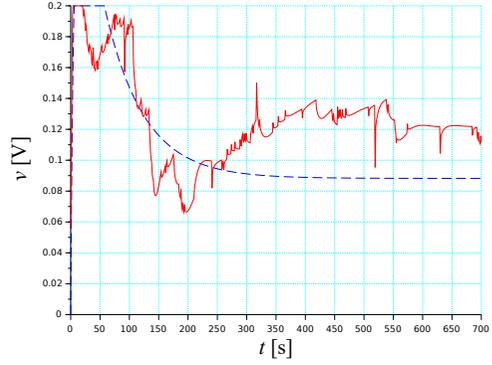


図 14.7: 目標値に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

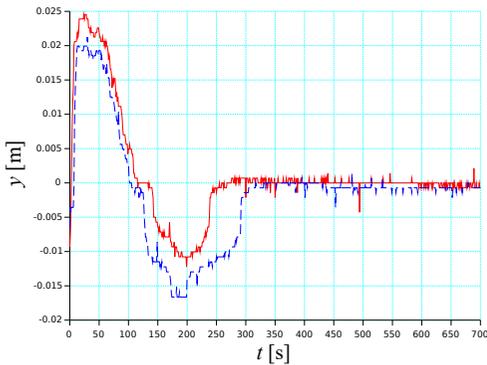


図 14.8: 外乱に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線: 修正 IMC, 破線: IMC)

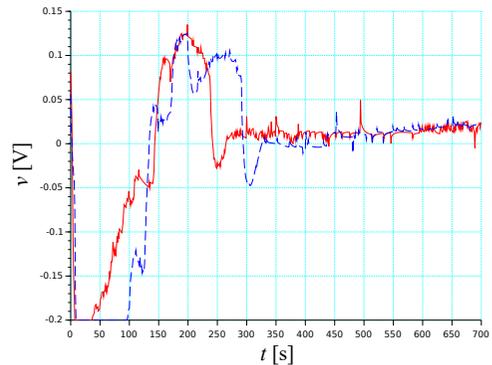


図 14.9: 外乱に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線: 修正 IMC, 破線: IMC)

比較のため、自動整合によるアンチwindアップ補償 [25]²を持つ PI 制御系 (図 14.10) の目標値応答に対する実験およびシミュレーション結果を図 14.11, 図 14.12 に示す。 r_f と v_{max} は上記と同じとした。第 3 章と同様に、SIMC 法 [15] を用いて PI 補償器 $C(s)$ を設計した。

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (14.30)$$

²飽和要素の入出力の差をコントローラの積分器の前にフィードバックする補償法で、飽和が発生すると積分器を 1 次遅れ系のような安定系 (有界な入力が入り続けても出力が有界となる系) にする。

$$K_P = \frac{T}{k(T_c + L)}, \quad T_I = \min\{T, 4(T_c + L)\}, \quad T_c = L \quad (14.31)$$

アンチwindアップ補償のパラメータ T_t はシミュレーションから良好な応答を与える値として以下を選定した。

$$T_t = 40 \quad (14.32)$$

オーバーシュートが小さいことから、リセットwindアップが回避されていることがわかる。また、補償器の積分作用によって、 $y(t)$ がほぼ目標値に収束している。また、上記と同様の外乱を与えたときの実験結果を図 14.13, 図 14.14 に示す。比較のため、修正 IMC コントローラを使用した場合も示している。修正 IMC コントローラよりもアンダーシュートが少し大きくなっているが、外乱応答に対して本コントローラはリセットwindアップを回避でき、良好な性能を発揮することがわかる。

自動整合によるアンチwindアップ補償では、入力飽和が発生すると元のコントローラの機能を変えてしまうので、この間、制御系の性能について何の保証もない。一般に、このようなアンチwindアップ補償が有効な制御系は比較的単純なものに限られる。

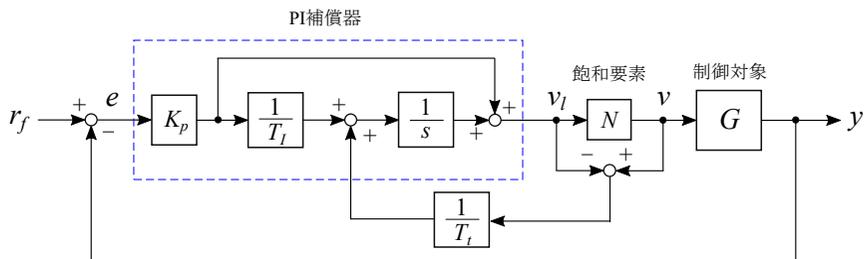


図 14.10: アンチwindアップ補償を持つ PI 制御系

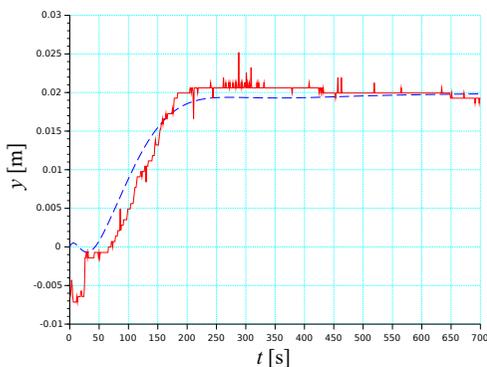


図 14.11: 目標値に対する出力 $y(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

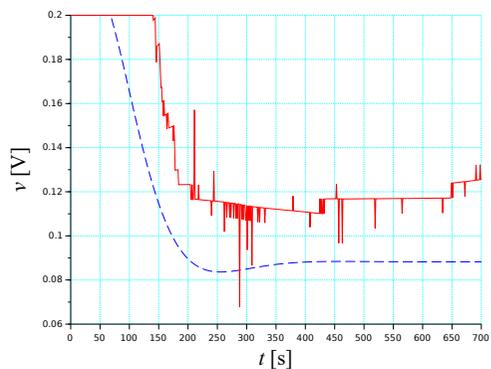


図 14.12: 目標値に対する入力 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

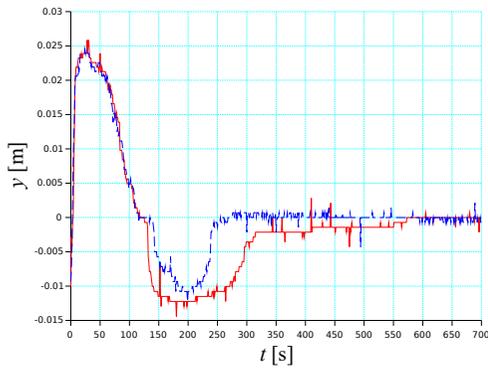


図 14.13: 外乱に対する出力 $y(t)$ の応答
(実線:自動整合あり, 破線:修正 IMC)

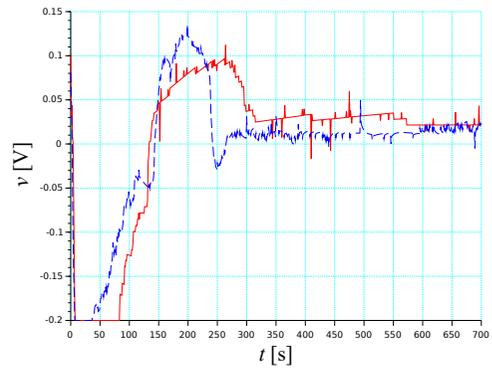


図 14.14: 外乱に対する入力 $v(t)$ の応答
(実線:自動整合あり, 破線:修正 IMC)

14.4 演習問題

1. (14.1) 式の $G(s)$ に対応する状態方程式が (14.9), (14.10) 式となることを示せ.
2. 座標変換 (14.11) によって, 状態方程式 (14.9), (14.10) が (14.12), (14.13) に変換されることを示せ.
3. シルベスター方程式

$$-A_{11}X + XA_{22} + A_{12} = 0 \quad (14.33)$$

を解くことによって, (14.11) 式の X を求めよ.

第15章 巻上げ式クレーン系に対する制御系の設計

ロープ長を変えて荷を上げ下げできるクレーン系を巻上げ式クレーン系と呼ぶ。ロープ長が一定の場合、系の線形近似モデルに現代制御理論を適用して比較的簡単に制御系が設計できる。ロープ長が変化する場合、系の運動は複雑な非線形方程式で記述され、簡単で有効な制御則を求めるのは容易ではない。クレーン系の通常の運転状況を考慮して、ロープ長は台車の運動に関係なく変化するものとする。本章では、この問題に対する3種類の制御系設計法を説明し、これらの方法によって設計した制御則を適用したシミュレーション及び実験結果を示す。

15.1 運動方程式と問題の記述

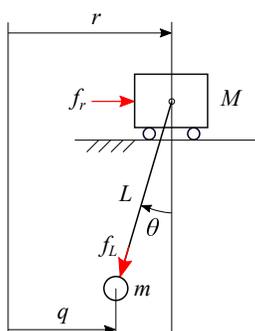


図 15.1: 巻上げ式クレーン系

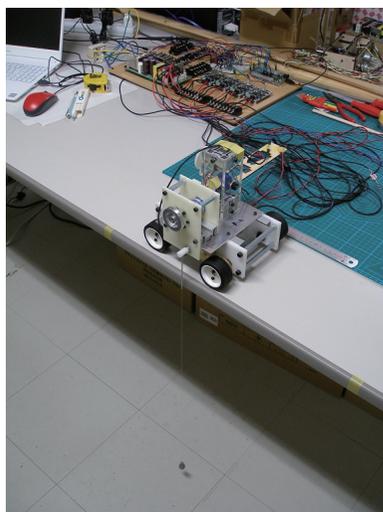


図 15.2: 巻上げ式クレーン系実験装置

図 15.1 に巻上げ式クレーン系（荷を上下できるクレーン系）のモデル図を、図 15.2 に実験装置の概観を示す。荷の振れを抑制しながら、荷を目的の位置まで搬送するという制御問題を考える。

M [kg] は台車の質量、 m [kg] は荷の質量、 L [m] はロープ長、 f_r [N] は台車駆動力、 f_L [N] は荷に対する駆動力である。また、 r [m] は台車の変位、 θ [rad] は荷の振れ角である。ロープの質量及び各部分の散逸力（摩擦力）は無視する。

ラグランジュ法などにより系の運動方程式は次式と求まる [27].

$$mL(t)^2\ddot{\theta}(t) + 2mL(t)\dot{L}(t)\dot{\theta}(t) + mgL(t)\sin\theta(t) - mL(t)\ddot{r}(t)\cos\theta(t) = 0 \quad (15.1)$$

$$(M+m)\ddot{r}(t) - mL(t)\ddot{\theta}(t)\cos\theta(t) - m\ddot{L}(t)\sin\theta(t) - 2m\dot{L}(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + mL(t)\dot{\theta}(t)^2\sin\theta(t) = f_r(t) \quad (15.2)$$

$$m\ddot{L}(t) - m\ddot{r}(t)\sin\theta(t) - mL(t)\dot{\theta}(t)^2 - mg\cos\theta(t) = f_L(t) \quad (15.3)$$

g [m/s²] は重力加速度である. (15.1), (15.2), (15.3) 式はそれぞれ θ , r , L に関する運動方程式である.

(15.1) 式は次式と変形しておく.

$$\ddot{\theta} = -2\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\dot{\theta}(t) - \frac{g}{L(t)}\sin\theta(t) + \frac{\ddot{r}(t)}{L(t)}\cos\theta(t) \quad (15.4)$$

(15.3) 式は, 駆動力 f_L を用いて次式と補償しておく.

$$\dot{L}(t) = u_L(t) \quad (15.5)$$

u_L は新たな入力である. また, $L(t)$ は時間 t の 1 次関数とし, $L(t) > 0$ とする.

問題は, 荷の振れ角を抑制しながら荷を速やかに目標位置 r_f に搬送し, そこで系を漸近安定化させる制御則を求めることである.

15.2 制御系の設計法

(1) 振り子系を減衰振動系に補償する方法

まず, 台車駆動力 f_r を用いて, 台車系を次式と補償しておく.

$$\dot{r}(t) = u_r(t) \quad (15.6)$$

u_r は新たな入力である. $|\theta(t)|$ は十分小さいと仮定し, 次の変数を導入する.

$$q(t) = r(t) - L(t)\theta(t) \quad (15.7)$$

$L(t)$ は t の 1 次関数なので次式が成り立つ.¹

$$\ddot{q}(t) = \ddot{r}(t) - 2\dot{L}(t)\dot{\theta}(t) - L(t)\ddot{\theta}(t) \simeq g\theta(t) \quad (15.8)$$

$$= -\frac{g}{L(t)}q(t) + \frac{g}{L(t)}r(t) \quad (15.9)$$

上式の変形で, $\ddot{\theta}(t)$ を

$$\ddot{\theta}(t) \simeq -2\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\dot{\theta}(t) - \frac{g}{L(t)}\theta(t) + \frac{\ddot{r}(t)}{L(t)} \quad (15.10)$$

と近似した ((15.4) 式参照).

¹ $t = t_1$ で $L(t)$ に振幅 Δ_L のジャンプがあった場合, $\ddot{q}(t)$ にインパルス外乱 $\delta(t - t_1)\Delta_L\theta(t)$ が入ることに相当する [28].

T_r , ζ を正の定数, v_r を新たな入力, L_m を $L(t)$ の平均値, すなわち

$$L_m = \frac{\max L(t) + \min L(t)}{2}$$

として, 図 15.3 に示すように u_r を次式で与える.

$$u_r(t) = \frac{1}{T_r}(v_r(t) - r(t)) - 2\zeta\sqrt{gL_m}\theta(t) \quad (15.11)$$

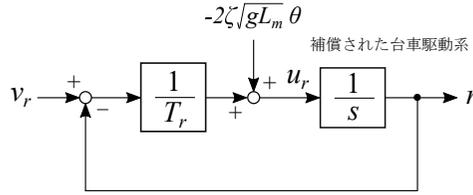


図 15.3: 1 次遅れ系に補償された台車系のブロック線図

(15.8) 式から, $\ddot{q} \simeq g\theta$ なので次式を得る.

$$-2\zeta\sqrt{gL_m}\theta(t) \simeq -2\zeta\sqrt{\frac{L_m}{g}}\ddot{q}(t) \quad (15.12)$$

また, $-2\zeta\sqrt{gL_m}\theta$ から r までの伝達関数は $\frac{1}{s + \frac{1}{T_r}}$ であり, T_r を大きくすると積分器 $\frac{1}{s}$ に近づくことに注意する. よって, T_r が十分大きいとき, (15.12) の信号が時間積分されて r に重畳されるので

$$r(t) \simeq r_0(t) - 2\zeta\sqrt{\frac{L_m}{g}}\dot{q}(t) \quad (15.13)$$

ただし, $r_0(t)$ は信号 $-2\zeta\sqrt{gL_m}\theta(t)$ がない場合の台車系の応答である. (15.13) 式を (15.9) 式に代入すると次式を得る.

$$\ddot{q}(t) \simeq -\frac{g}{L(t)}q(t) - 2\zeta\frac{\sqrt{gL_m}}{L(t)}\dot{q}(t) + \frac{g}{L(t)}r_0(t) \quad (15.14)$$

$\alpha(t) = \frac{g}{L(t)}$ とおく. (15.14) 式に対応する自律系

$$\ddot{\delta q}(t) = -\alpha(t)\delta q(t) - 2\zeta\alpha(t)\sqrt{\frac{L_m}{g}}\dot{\delta q}(t) \quad (15.15)$$

は $\dot{\alpha}(t)\delta q(t)^2 \simeq 0$ のとき漸近安定である.

実際

$$V(t) = \frac{1}{2}\dot{\delta q}(t)^2 + \frac{1}{2}\alpha(t)\delta q(t)^2 \quad (15.16)$$

で定義される正定関数の時間微分が $\dot{\alpha}(t)\delta q(t)^2 \simeq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\delta q}(t)\ddot{\delta q}(t) + \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)\delta q(t)^2 + \alpha(t)\delta q(t)\dot{\delta q}(t) \\ &\simeq -2\zeta\alpha(t)\sqrt{\frac{L_m}{g}}\dot{\delta q}(t)^2 < 0 \quad \text{when } \dot{\delta q}(t) \neq 0 \end{aligned} \quad (15.17)$$

となることから系の漸近安定性が言える。

よって、 $|\dot{\alpha}(t)\delta q(t)^2|$ が十分小さい範囲で $L(t)$ を変化させ、 $r_0(t)$ が (15.14) 式で表される系を励振させないように与えれば、(15.11) 式の制御により荷の振れ角を抑えた搬送が実現される。

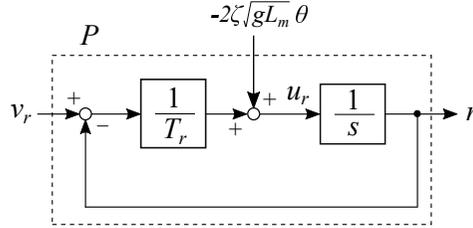


図 15.4: 1 次遅れ系に補償された台車系のブロック線図

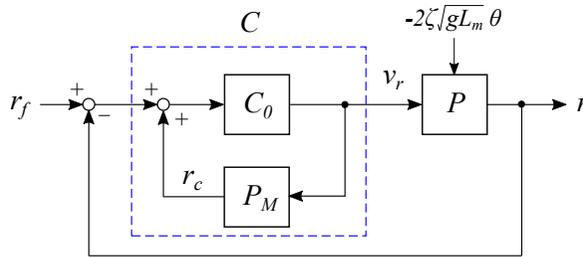


図 15.5: IMC 制御系のブロック線図

次に、 $r(t)$ を目標値に収束させるため、図 15.4 に示すように上記の方法で設計した台車系で入力を v_r 、出力を r としたときの入出力関係を

$$r = P(v_r) \quad (15.18)$$

と表し、図 15.5 の IMC 制御系 [8] を構成する。 P_M は P のモデルである。 C_0 は安定な系 (IMC フィルタ) であり、後述の速度飽和型 1 次遅れ系とする。 P_M には信号 $-2\zeta\sqrt{gL_m}\theta(t)$ を入力しない。 IMC コントローラ C の出力 $y_{C_0} = v_r$ が P の入力となる。 平衡点近くでは C_0 、 C が線形系となり、伝達関数表現できる。 それらを $\bar{C}_0(s)$ 、 $\bar{C}(s)$ と記す。 平衡点近くでコントローラ C が積分特性を持つように次式とする。

$$\bar{C}_0(0) = 1 \quad (15.19)$$

実際、このとき、 $P_M(0) = 1$ から $\bar{C}_0(0)P_M(0) = 1$ となり

$$\bar{C}(s) = \frac{\bar{C}_0(s)}{1 - \bar{C}_0(s)P_M(s)} \quad (15.20)$$

が 0 の極を持つ。

ω_m を次式で定義する。

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{L_m}} \quad (15.21)$$

$L(t) \simeq L_m$ として線形化した場合の本制御系の微分方程式は次式となる.

$$\ddot{q}(t) = \omega_m^2 (r(t) - q(t)) \quad (15.22)$$

$$\dot{r}(t) = \frac{1}{T_r} (v_r(t) - r(t)) - 2\zeta\omega_m (r(t) - q(t)) \quad (15.23)$$

この制御系は安定である. 実際, $x = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r \end{bmatrix}'$ として (15.22), (15.23) 式を状態方程式表現すると

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_m^2 & 0 & \omega_m^2 \\ 2\zeta\omega_m & 0 & -\frac{1}{T_r} - 2\zeta\omega_m \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_r} \end{bmatrix} v_r(t) \quad (15.24)$$

この特性方程式は

$$s^3 + \left(2\zeta\omega_m + \frac{1}{T_r}\right) s^2 + \omega_m^2 s + \frac{\omega_m^2}{T_r} = 0 \quad (15.25)$$

安定性条件は

$$T_r > 0, \quad \zeta\omega_m > 0 \quad (15.26)$$

となり, これらは満たされている.

(2) 線形化制御法

比較のため, 非線形フィードバック補償による線形化後, 極配置法などによる線形状態フィードバック制御を適用する方法 [28] を紹介する.

まず, 台車駆動力 f_r を用いて, 台車系を次式と補償しておく.

$$\ddot{r}(t) = \mu(t) \quad (15.27)$$

μ は新たな入力である. ζ を正の定数, $v(t)$ を新たな入力として, μ を次式で与える.

$$\mu(t) = \frac{L(t)}{\cos \theta(t)} \left(2 \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \dot{\theta}(t) + \frac{g}{L(t)} \sin \theta(t) + \omega_m^2 (v(t) - \theta(t)) - 2\zeta\omega_m \dot{\theta}(t) \right) \quad (15.28)$$

(15.28) 式を (15.4) 式に代入すると次式を得る.

$$\ddot{\theta}(t) = \omega_m^2 (v(t) - \theta(t)) - 2\zeta\omega_m \dot{\theta}(t) \quad (15.29)$$

また, (15.8) 式を再記すると

$$\ddot{q}(t) = g\theta(t) \quad (15.30)$$

(15.29), (15.30) 式が線形化されたクレーン系の数学モデルである. これらをブロック線図で表すと図 15.6 を得る.

状態と出力を

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) & \dot{q}(t) & \theta(t) & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}', \quad y(t) = q(t) \quad (15.31)$$

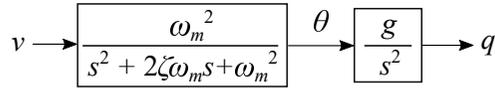


図 15.6: 線形化されたクレーン系のブロック線図

と定義すると, (15.29), (15.30) 式は次の状態方程式で表される.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (15.32)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (15.33)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_m^2 & -2\zeta\omega_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_m^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

実験では, $\frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2}$ の極 $\{ p_1 \ p_2 \}$ は不変とし, $\frac{g}{s^2}$ の極 $\{ 0 \ 0 \}$ を $\{ p_3 \ p_4 \}$ ($p_3 < 0, p_4 < 0$) に配置する状態フィードバック制御

$$v(t) = -Fx(t) + v_0 \quad (15.34)$$

を採用した. v_0 は $q(t)$ が r_f に収束するように次式で与える.

$$v_0 = \frac{r_f}{T_{q,v_0}(0)} \quad (15.35)$$

$T_{q,v_0}(s)$ は次式で計算できる.

$$T_{q,v_0}(s) = C\{sI_4 - (A - BF)\}^{-1}B \quad (15.36)$$

さらに, $q(t)$ の追従性能を改善するため, 第 8 章の方法と同様に IMC 構造を持つ制御系を構成する.

(3) 線形近似モデルに対して IP 型制御系を構成する方法

$L(t) \simeq L_m$ として, (15.9) 式を線形化すると次式を得る.

$$\ddot{q}(t) = -\frac{g}{L_m}q(t) + \frac{g}{L_m}r(t) = \omega_m^2(r(t) - q(t)) \quad (15.37)$$

台車系は駆動力 f_r を用いて, 新たな入力 v から r までの伝達関数が

$$\frac{r(s)}{v(s)} = \frac{1}{(T_r s + 1)^2} \quad (15.38)$$

となるように補償しておく. T_r は正の定数である. (15.37), (15.38) 式から図 15.7 のブロック線図を得る.

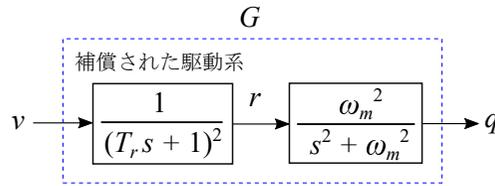


図 15.7: 線形化されたクレーン系のブロック線図

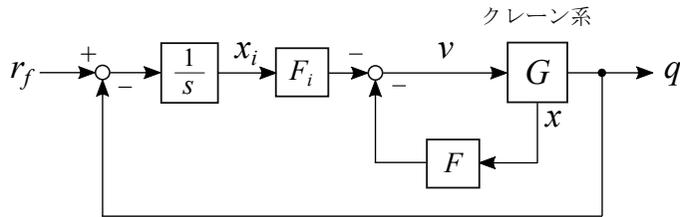


図 15.8: IP 型制御系

次に、第 8 章と同様に、図 15.8 に示す IP 型制御系を構成する．追加した積分器の出力を x_i とすると次式を得る．

$$\dot{x}_i(t) = r_f - q = r_f - Cx(t) \tag{15.39}$$

G の状態を $x = [q \ \dot{q} \ r \ \dot{r}]'$ とし、 x と x_i を併合した状態を

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r & \dot{r} & | & x_i \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & x_i \end{bmatrix}' \tag{15.40}$$

とする． x_a に関する状態方程式は次式となる．

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a v(t) + B_r r_f \tag{15.41}$$

$$q(t) = C_a x_a(t) \tag{15.42}$$

ただし

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_m^2 & 0 & \omega_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_r^2} & -\frac{2}{T_r} & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_r^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_a = [C \ 0] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0]$$

制御則は次式の状態フィードバック制御とする.

$$v(t) = -F_a x_a(t) = -F x(t) - F_i x_i(t) \quad (15.43)$$

ただし, F_a を次式と分割した.

$$F_a = \left[\begin{array}{cc} F & F_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{array} \right] \quad (15.44)$$

実験では, $\frac{1}{(T_r s + 1)^2}$ の極 $\left\{ -\frac{1}{T_r}, -\frac{1}{T_r} \right\}$ は不変とし, $\frac{\omega_m^2}{s^2 + \omega_m^2}$ の極 $\pm j\omega_m$ を $s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2 = 0$ の根に, 積分器の極を $p_1 < 0$ に配置するフィードバックゲイン F_a を採用した.

15.3 シミュレーション及び実験結果

台車の変位 $r(t)$ はロータリーエンコーダで, 荷の振れ角 $\theta(t)$ とロープ長 $L(t)$ はポテンシオメータで計測した. また, サンプルング周期を $\Delta t = 1$ [ms] とし, $\dot{r}(t)$ は差分近似 $\dot{r}(t) \simeq \frac{r(t) - r(t - \Delta t)}{\Delta t}$ で, $\dot{\theta}(t)$ と $\dot{L}(t)$ は, それぞれ, $\theta(t)$ と $L(t)$ に対して伝達関数 $\frac{s}{T_d s + 1}$ ($T_d = 0.05$ [s]) による近似微分で求めた. コントローラには Arduino Due を用いた.

実験に使用したパラメータは次のとおりである.

$$\max L(t) = 0.72 \text{ [m]}, \quad \min L(t) = 0.22 \text{ [m]}, \quad g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

IMC フィルタ C_0 は図 15.9 に示す速度飽和型 1 次遅れ系とした. 時定数は $T_f = 0.5$ [s], 飽和要素の振幅制限は 0.2 [m/s] とした.

目標値 $r_f(t)$ として次の矩形波を与えた.

$$r_f(t) = a_0 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.2 \text{ [m]}, \quad \omega = 0.13 \text{ [rad/s]} \quad (15.45)$$

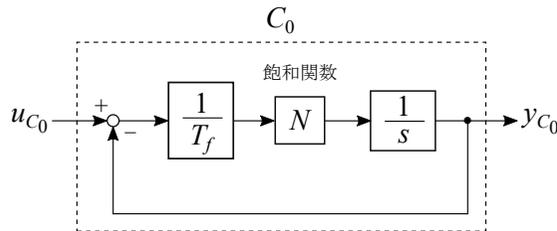


図 15.9: 速度飽和型 1 次遅れ系のブロック線図

ロープ長 $L(t)$ の制御は, 事前に駆動系を P 制御で時定数 0.6 [s] の 1 次遅れ系に補償した後, 図 15.9 と同様の IMC フィルタ (時定数 0.2 [s], 速度の振幅制限 0.1 [m/s]) を用いた IMC 制御系で行った. ロープ長は台車の制御に無関係に制御される. 実験では, 台車の移動に合わせて L の目標値 L_r を 0.72 [m] と 0.22 [m] の間で矩形波状に変化させた.

方法 (1) を適用した場合のシミュレーション及び実験結果を図 15.10~図 15.13 に示す. また, 同じ実験条件で, 荷を手で押すという外乱を与えた場合の実験結果を図 15.14, 図 15.15 に示す. 制御則のパラメータは以下のとおりである.

$$T_r = 1 \text{ [s]}, \quad \zeta = 0.2$$

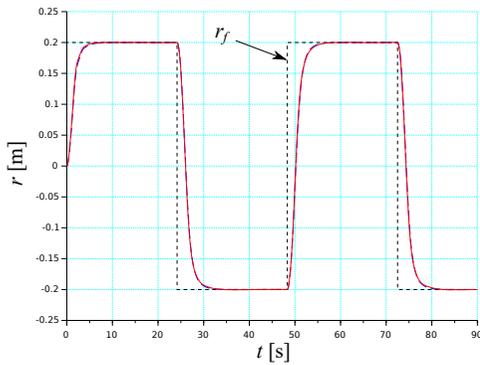


図 15.10: 方法 (1) による台車変位 $r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

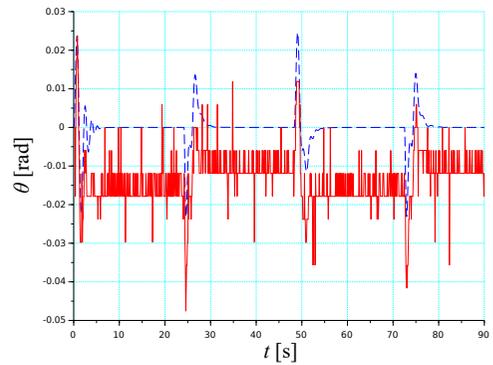


図 15.11: 方法 (1) による荷の振れ角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

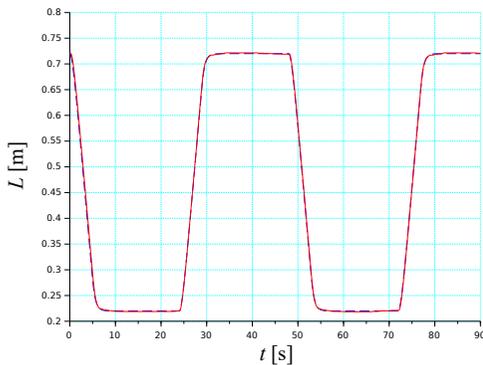


図 15.12: 方法 (1) でのロープ長 $L(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

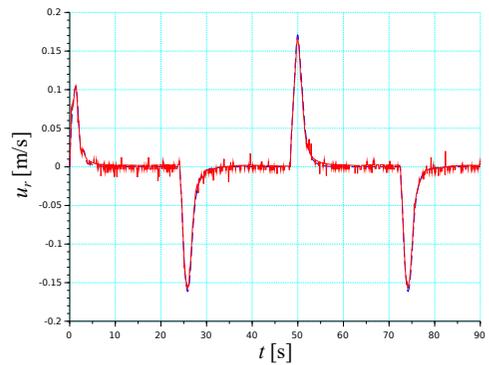


図 15.13: 方法 (1) による操作量 $u_r(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

荷の振れを小さく抑えながら、台車の変位 $r(t)$ を目標値に精度よく収束させているのがわかる。外乱を与えた場合も、荷の振動を速やかに抑制し、台車を目標値に戻した。シミュレーションと実験結果はよく一致している。図 15.11 における $\theta(t)$ のゼロ点のずれはセンサノイズによるものである。

方法 (2) を適用した場合のシミュレーション及び実験結果を図 15.16～図 15.19 に示す。また、同じ実験条件で、荷を手で押すという外乱を与えた場合の実験結果を図 15.20, 図 15.21 に示す。制御則のパラメータは以下のとおりである。

$$\omega_m = 4.57 [\text{rad/s}], \quad \zeta = 0.5, \quad p_3 = p_4 = -4$$

方法 (1) と同様に荷の振れを小さく抑えながら、出力 $q(t)$ を目標値に精度よく収束させてい

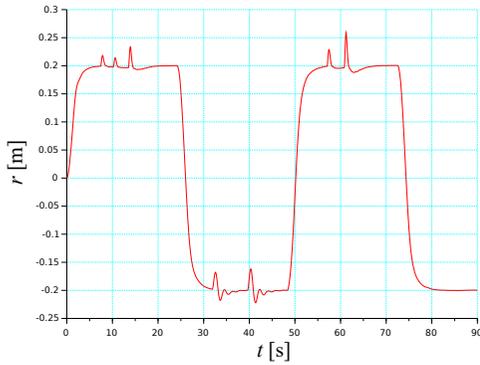


図 15.14: 方法 (1) による台車変位 $r(t)$ の応答 (外乱を与えた場合)

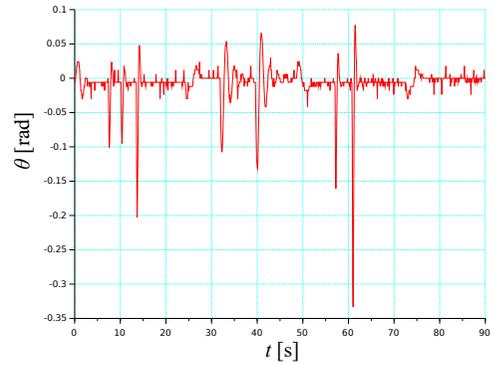


図 15.15: 方法 (1) による荷の振れ角 $\theta(t)$ の応答 (外乱を与えた場合)

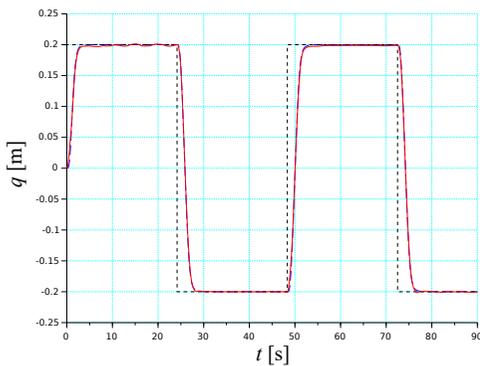


図 15.16: 方法 (2) による荷の変位 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

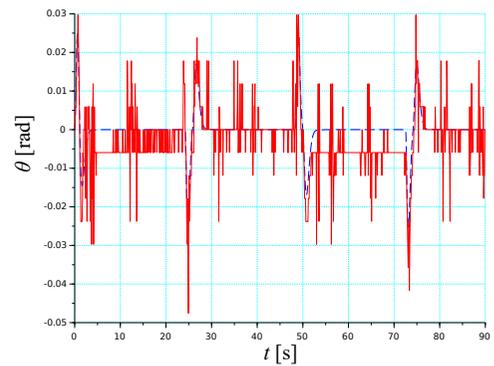


図 15.17: 方法 (2) による荷の振れ角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

るのがわかる。外乱を与えた場合も、荷の振動を速やかに抑制し、 $q(t)$ を目標値に戻した。位置決め精度について、方法 (1) ではほぼ偏差が 0 であったのに対して、方法 (2) では出力 $q(t)$ に 0.5 [mm] 程度の偏差があった。図 15.6 のブロック線図からわかるように、方法 (2) では、 $\theta(t)$ 、 $\dot{\theta}(t)$ 、 $L(t)$ を用いるフィードバック補償 ((15.28) 式) により、不安定系 $\frac{g}{s^2}$ を θ を通して制御するという構造に変換して制御系を設計するので、制御則が機能するためにはこれらの変数を精度よく測定または推定する必要がある。概して、方法 (2) はセンサノイズやモデル誤差の影響をより受けやすい。また、 $\max L(t)$ と $\min L(t)$ の差が大きいほど、これらの影響が大きくなる。

方法 (3) を適用した場合のシミュレーション及び実験結果を図 15.22～図 15.25 に示す。また、同じ実験条件で、荷を手で押すという外乱を与えた場合の実験結果を図 15.26、図 15.27

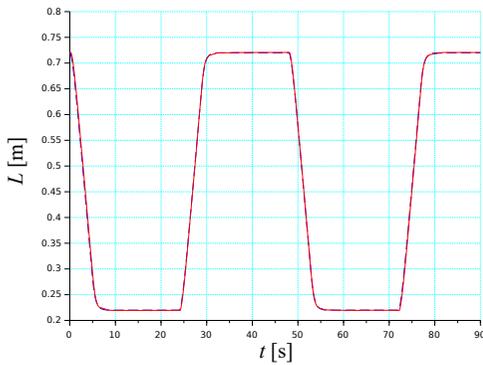


図 15.18: 方法 (2) でのロープ長 $L(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

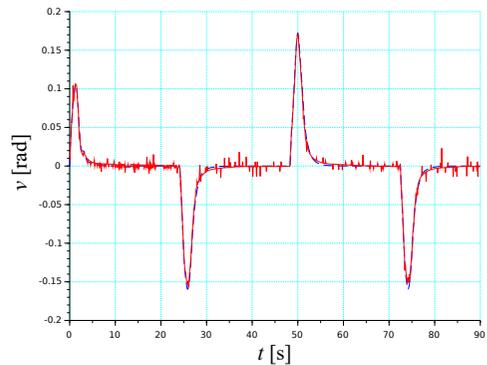


図 15.19: 方法 (2) による操作量 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

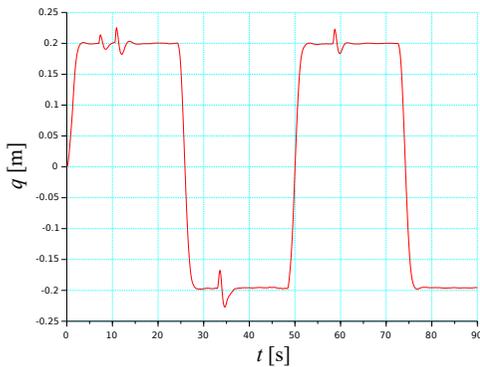


図 15.20: 方法 (2) による荷の変位 $q(t)$ の応答 (外乱を与えた場合)

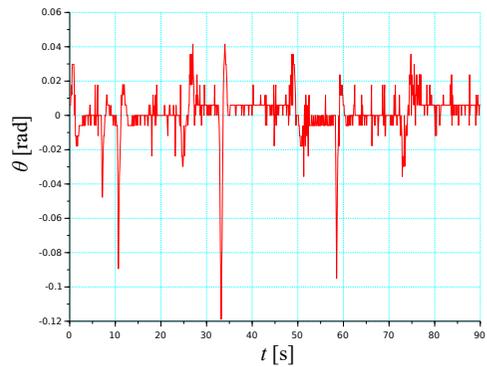


図 15.21: 方法 (2) による荷の振れ角 $\theta(t)$ の応答 (外乱を与えた場合)

に示す。制御則のパラメータは以下のとおりである。

$$T_r = 0.5, \quad \omega_m = 4.57 \text{ [rad/s]}, \quad \zeta = 0.4, \quad p_1 = -2$$

r_f として, (15.45) 式の矩形波を図 15.9 の速度飽和型 1 次遅れ系 ($T_f = 0.5$) に入力して得られた出力を用いた。方法 (1), (2) と同様に荷の振れを小さく抑えながら, 出力 $q(t)$ を目標値に精度よく収束させているのがわかる。外乱を与えた場合も, 荷の振動を速やかに抑制し, $q(t)$ を目標値に戻した。積分器の追加により次数が 1 だけ増えるので, 応答は比較的遅くなる。また, 制御系が安定となる理論的根拠はなく, $\max L(t)$ と $\min L(t)$ の差が大きいと不安定になる可能性がある。実際, $\max L(t) = 2 \text{ [m]}$, $\min L(t) = 0.1 \text{ [m]}$ (IMC フィルタの時定数 0.2 [s] , 速度の振幅制限 0.5 [m/s]) に対するシミュレーションでは制御系が不安定化した。

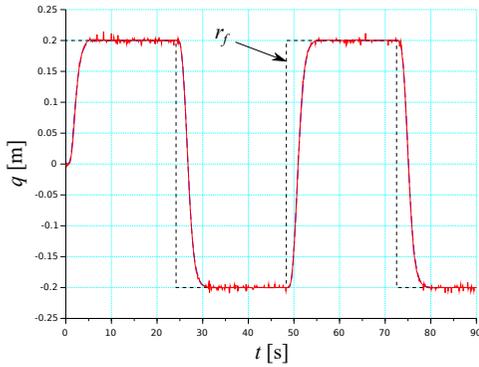


図 15.22: 方法 (3) による荷の変位 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

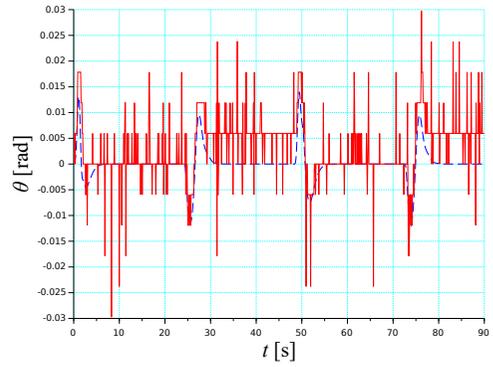


図 15.23: 方法 (3) による荷の振れ角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

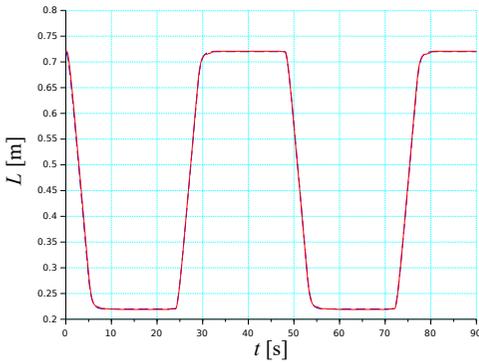


図 15.24: 方法 (3) でのロープ長 $L(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

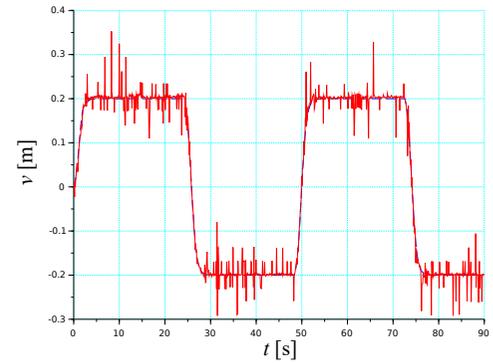


図 15.25: 方法 (3) による操作量 $v(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

15.4 演習問題

1. 巻上げ式クレーン系の運動方程式 (15.1), (15.2), (15.3) 式を導出せよ。
2. (15.17) 式を確認せよ。
3. 近似微分の伝達関数は

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s}{T_d s + 1} = \frac{1}{T_d} \left(1 - \frac{1}{T_d s + 1} \right)$$

と変形できる。この式から図 15.28 のブロック線図を得る。このことを確認せよ。

4. 図 15.28 のブロック線図に対応する状態方程式と出力方程式を求めよ。

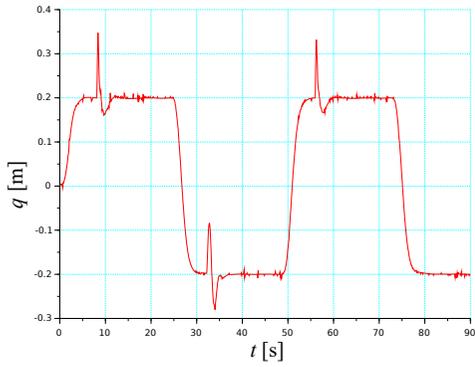


図 15.26: 方法 (3) による荷の変位 $q(t)$ の応答 (外乱を与えた場合)

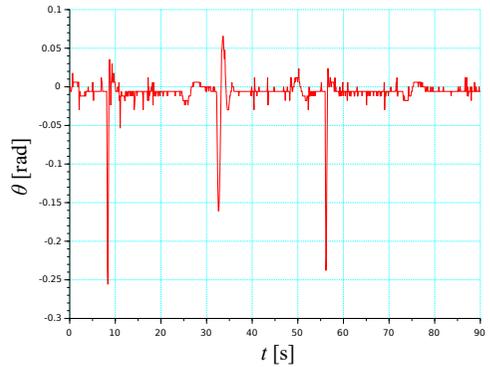


図 15.27: 方法 (3) による荷の振れ角 $\theta(t)$ の応答 (外乱を与えた場合)

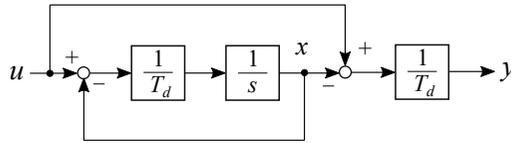


図 15.28: 近似微分器

5. (15.25) 式の特性方程式を求めよ.
6. (15.26) 式の安定性条件を導出せよ.
7. (15.25) 式は次式と変形できる.

$$1 + KG_0(s) = 0 \tag{15.46}$$

ただし

$$K = \frac{1}{T_r}, \quad G_0(s) = \frac{s^2 + \omega_m^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2)}$$

(15.46) 式は図 15.29 に示すフィードバック系の特性方程式と解釈できる.

$\omega_m = 5$, $\zeta = 0.4$ とする. 根軌跡法を用いて, $K > 0$ に対する (15.46) 式の根軌跡の概形を描け.

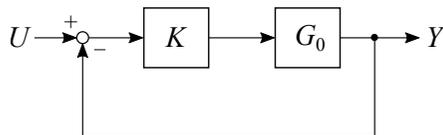


図 15.29: フィードバック系

第16章 二輪倒立振り子系に対する制御系の設計

二輪倒立振り子系も通常の倒立振り子系（台車-振り子系）と同様に現代制御理論の検証用モデルとしてよく使用される [29]. 支点が水平に移動して振り子を安定化させる機構は両者に共通しているが、二輪倒立振り子系では、アクチュエータが振り子部に固定されているため、車輪を回転させるトルクが振り子部に反トルクとして作用する点が異なる. しかしながら、座標変換を導入すれば、二輪倒立振り子系の数学モデルは台車-振り子系のものと同じ形になる. よって、台車-振り子系で開発された制御則がそのまま適用できる.

本章では、二輪倒立振り子系の数学モデルを求め、第8章で台車-振り子系に使用された二つの制御系設計法（IMC 構造を持つ制御系の設計法と IP 型制御系の設計法）を適用した安定化制御のシミュレーション及び実験結果を示す.

16.1 運動方程式と問題の記述

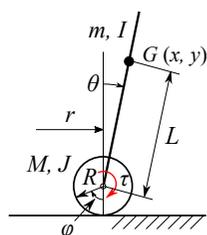


図 16.1: 二輪倒立振り子系

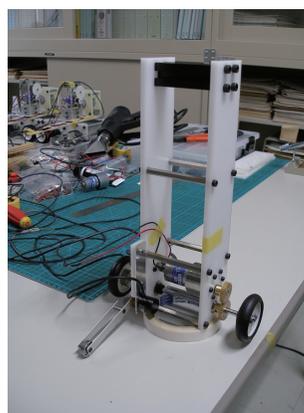


図 16.2: 二輪倒立振り子系実験装置

図 16.1 の二輪倒立振り子系の運動方程式を求める. M [kg], J [kgm^2] は車輪部の質量と慣性モーメント, m [kg], I [kgm^2] は振り子部の質量と車軸まわりの慣性モーメントであり, $G, (x, y)$ は振り子部の重心とその座標, L [m] は車軸の中心から重心までの距離である. φ [rad] は車輪の回転角, θ [rad] は振り子の回転角, r [m] は車軸の移動距離である. 図 16.2 に実験で使用した実験装置を示す. φ, θ はエンコーダ（それぞれ, オムロン E6A2-CW3C 500P/R 0.5M, マイクロテックラボラトリー MES-12-2048PC）で計測され, 車輪はギヤド DC モータ（ツカサ電工 TG-47H-SV-50-HB, 24V）で駆動される.

重心 G の座標 (x, y) は次式で表される.

$$x = r + L \sin \theta, \quad y = L \cos \theta \quad (16.1)$$

また, $r = R\varphi$ に注意すると

$$\dot{x} = \dot{r} + L\dot{\theta} \cos \theta = R\dot{\varphi} + L\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = -L\dot{\theta} \sin \theta \quad (16.2)$$

重心の速度を v_G で表す. 系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V は次式で計算される.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\{(M+m)R^2 + J\}\dot{\varphi}^2 + mL R\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (16.3)$$

$$V = mgL \cos \theta \quad (16.4)$$

これらをラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\tau \quad (16.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \tau \quad (16.6)$$

に代入すると

$$(mL^2 + I)\ddot{\theta} + mL R\ddot{\varphi} \cos \theta - mgL \sin \theta = -\tau \quad (16.7)$$

$$\{(M+m)R^2 + J\}\ddot{\varphi} + mL R\ddot{\theta} \cos \theta - mL R\dot{\theta}^2 \sin \theta = \tau \quad (16.8)$$

これらを線形化すると次式となる.

$$(mL^2 + I)\ddot{\theta} + mL R\ddot{\varphi} - mgL\theta = -\tau \quad (16.9)$$

$$\{(M+m)R^2 + J\}\ddot{\varphi} + mL R\ddot{\theta} = \tau \quad (16.10)$$

(16.9), (16.10) 式から

$$\left(1 + \frac{I}{mL^2} + \frac{R}{L}\right)\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\theta - \left(\frac{1}{L} + \frac{(M+m)R^2 + J}{mL^2 R}\right)\ddot{\varphi} \quad (16.11)$$

を得る. いま

$$L_0 = \left(1 + \frac{I}{mL^2} + \frac{R}{L}\right)L = L + \frac{I}{mL} + R \quad (16.12)$$

$$L_1 = \left(1 + \frac{I}{mL^2} + \frac{R}{L}\right) \left(\frac{1}{L} + \frac{(M+m)R^2 + J}{mL^2 R}\right)^{-1} \quad (16.13)$$

を定義し, 次の変数を導入する.

$$q = r + L_1\theta \quad (16.14)$$

このとき、次式が成り立つ.

$$\ddot{q} = \ddot{r} + L_1 \ddot{\theta} = \frac{L_1}{L_0} g \theta = \frac{g}{L_0} (q - r) \tag{16.15}$$

ω_n を

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L_0}} \tag{16.16}$$

と定義する. (16.15) 式から, r から q までの伝達関数 ($G_1(s)$ と記す) を求めると次式を得る.

$$G_1(s) = \frac{q(s)}{r(s)} = \frac{-\omega_n^2}{s^2 - \omega_n^2} \tag{16.17}$$

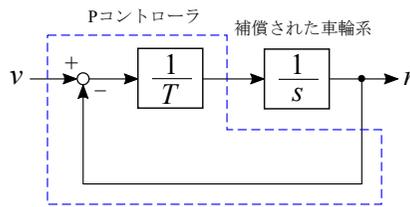


図 16.3: 1 次遅れ系に補償された車輪系のブロック線図

$r(\varphi)$ に関する運動方程式については, 新たな入力を $v(t)$ とし, 図 16.3 に示すように, 速度フィードバック・ゲイン補償及び P 制御により入出力の伝達関数が次式の 1 次遅れ系 ($G_2(s)$ と記す) となるように補償しておく.

$$G_2(s) = \frac{r(s)}{v(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \tag{16.18}$$

$T > 0$ は 1 次遅れ系の時定数で設計パラメータである. T は駆動系のバンド幅の範囲で, できるだけ小さく与える. (16.17), (16.18) 式から, 図 16.4 のブロック線図を得る.

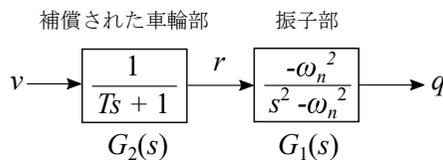


図 16.4: 車輪系を補償した後の二輪倒立振り子系のブロック線図

問題は, 二輪倒立振り子系を安定化させ, かつ出力を $q = 0$ から $q = r_f$ へ移動させる制御系を設計することである.

16.2 制御系の設計法

状態を

$$x = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r \end{bmatrix}' \tag{16.19}$$

と選ぶと, (16.17), (16.18) 式 (図 16.4) は次の状態方程式で表される.

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (16.20)$$

$$q = Cx \quad (16.21)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以下の制御では, 状態 x が必要となる. r と θ はセンサーによって計測できるので, $q = r + L_1\theta$ は入手可能である. \dot{q} は計測しないので, $G_1(s)$ 部分系に対するオブザーバにより推定する (7.2 節参照).

(1) IMC 構造を持つ制御系の設計法

まず, (16.20), (16.21) 式に 7.2 節 (2) の方法を適用する. すなわち, 閉ループ極を

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\epsilon \right\} \quad (16.22)$$

に配置する次の状態フィードバック制御を求める.

$$v = -Fx + \frac{r_f}{k_0} \quad (16.23)$$

$$k_0 = -C(A - BF)^{-1}B \quad (16.24)$$

本制御は, $\epsilon > 0$ を小さくすると, 傾斜姿勢から倒立安定化するときの r の振幅が小さくなることから, 倒立振り子系の安定化領域が広がることが期待される.

次に, この制御系で入力を r_f , 出力を q としたときの入出力関係を

$$q(s) = P(s)r_f(s) \quad (16.25)$$

として 8.2 節と同様に IMC 制御系を構成する. 応答の遅い極 $-\epsilon$ のモードが目標値応答に現れるのを避けたい場合, IMC フィルタ $C_0(s)$ を, 例えば

$$C_0(s) = \frac{\frac{1}{\epsilon}s + 1}{(T_f s + 1)^2} \quad (16.26)$$

と選べば, $P(s)$, $C_0(s)$ 間で $-\epsilon$ が極零相殺される. また, 上式は, $P(0) = 1$ という条件の下で, コントローラ $C(s) = \frac{C_0(s)}{1 - C_0(s)P_M(s)}$ が積分特性を持つ条件 $C_0(0) = 1$ も満たす. ここで, T_f は正の定数, $P_M(s)$ は $P(s)$ のモデルである.

(2) IP 型制御系の設計法

8.1 節と同様に, 目標値 r_f と出力 q との差を入力する積分器を追加して IP 制御系を構成する. 追加した積分器の出力を x_i とすると次式を得る.

$$\dot{x}_i = r_f - q \quad (16.27)$$

制御則は次式である.

$$v = -Fx - F_i x_i \quad (16.28)$$

フィードバックゲイン F , F_i の決定には極配置法や LQ 法が利用できる. ここでは, 方法 (1) の極配置を参考に, 閉ループ極が

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\epsilon, p_1 \right\}, \quad p_1 < 0 \quad (16.29)$$

に配置されるようにフィードバックゲインを決める. また, (16.26) 式の C_0 を前置補償器として用いれば ($r_f(s)$ の代わりに $C_0(s)r_f(s)$ を入力する), (1) と同じ理由で目標値応答に $-\epsilon$ のモードが現れなくなる.

16.3 シミュレーション及び実験結果

実験に使用した二輪倒立振子のパラメータは次のとおりである.

$$m = 0.770 \text{ [kg]}, \quad M = 0.181 \text{ [kg]}, \quad L = 0.099 \text{ [m]}, \quad R = 0.028 \text{ [m]}$$

$$I = 0.0135 \text{ [kgm}^2\text{]}, \quad J = 1.77 \times 10^{-5} \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$L_0 = L + \frac{I}{mL} + R = 0.305 \text{ [m]}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{L_0}} = 5.67 \text{ [rad/s]}$$

$$L_1 = \left(1 + \frac{I}{mL^2} + \frac{R}{L} \right) \left(\frac{1}{L} + \frac{(M+m)R^2 + J}{mL^2R} \right)^{-1} = 0.224 \text{ [m]}$$

$g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$ とした. m , M , L , R は電子天秤やノギスを用いて計測した. J は車輪部の質量と形状から計算した. I については, まず, 車軸を中心に二輪倒立振子を逆さにした自由振動から固有振動数 ω_0 を求め, 以下の物理振り子の固有振動数の式から I を計算した.

$$\omega_0^2 = \frac{mLg}{I} \quad (16.30)$$

(1) の方法による実験

車輪系の時定数 T は $T = \frac{1}{\omega_n} = 0.176 \text{ [s]}$ と設定した. また, $\epsilon = 0.2\omega_n$ と与え, オブザーバ極は $\{-\omega_n, -2\omega_n\}$ とした. IMC フィルタ $C_0(s)$ は (16.26) 式とし, $T_f = 0.2 \text{ [s]}$ とした.

$r_f(t)$ は, 次式の $r_0(t)$ を入力とし, 速度の上限を 0.2 [m/s] とした 1 次遅れ系 (時定数 $T_0 = 0.2 \text{ [s]}$) の出力として与えた (図 7.5 参照).

$$r_0(t) = a_0 \text{sgn}(\sin \omega t), \quad a_0 = 0.15 \text{ [m]} \quad (16.31)$$

$P(0) = 1$ ($P(s)$ の単位ステップ応答の最終値が 1) とする k_0 は, $P(s)$ に上記の $r_f(t)$ ($\omega = 0.1 \text{ [rad/s]}$) を与えた実験から $k_0 = -3.5$ と同定した ((16.24) 式による計算値は $k_0 = -5$). k_0 は, 状態フィードバックによる安定化のため, モデル誤差の影響を受けやすいようである. $P(0) = 1$ が精度よく実現できていないと, IMC コントローラの積分特性が劣化する.

$r_f(t)$ ($\omega = 0.2$ [rad/s]) に対するシミュレーション及び実験結果を図 16.5, 図 16.6 に示す. また, $r_f(t)$ ($\omega = 0.1$ [rad/s]) を入力した上で, $v(t)$ に次式の外乱を加えた場合のシミュレーション及び実験結果を図 16.7, 図 16.8 に示す.

$$d(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 10 \\ 0.05(1 - e^{-2(t-10)}) & 10 \leq t < 42 \\ 0.05e^{-2(t-42)} & t \geq 42 \end{cases} \quad (16.32)$$

これらから良好な目標値追従性と外乱抑制特性が確認できる. ϵ をある程度まで小さくすると制御がより安定化した. ϵ を小さくしすぎると, 安定余裕が非常に小さくなるので, モデル誤差のため不安定になる (演習問題 6, 7 参照). θ のゼロ点が偏っているのは, 初期姿勢誤差と補助輪による計測機構による誤差のためと考えられる.

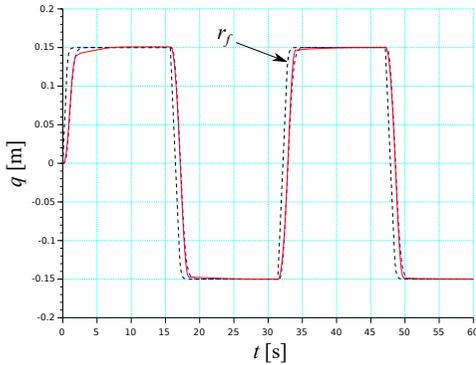


図 16.5: IMC 制御系の出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

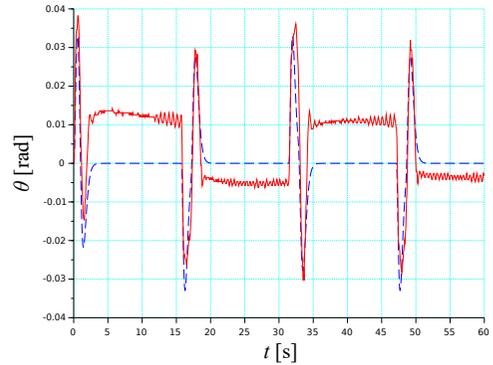


図 16.6: IMC 制御系の振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

(2) の方法による実験

上記と同様に, $T = \frac{1}{\omega_n}$, $\epsilon = 0.2\omega_n$ とし, $p_1 = -\epsilon$ とした. さらに p_1 を小さくすると駆動部が振動的になった. また, 目標値の前置補償器として (16.26) 式の $C_0(s)$ ($T_f = 0.2$ [s]) を用いた.

$r_f(t)$ ($\omega = 0.2$ [rad/s]) に対するシミュレーション及び実験結果を図 16.9, 図 16.10 に示す. また, $r_f(t)$ ($\omega = 0.1$ [rad/s]) を入力した上で, $v(t)$ に (16.32) 式の外乱を加えた場合のシミュレーション及び実験結果を図 16.11, 図 16.12 に示す. (1) の方法に比べ, 目標値追従性, 外乱抑制特性, 速応性とも悪くなった. 追加した積分器の 0 極も安定化する必要があるので, 安定化がより難しくなったと考えられる.

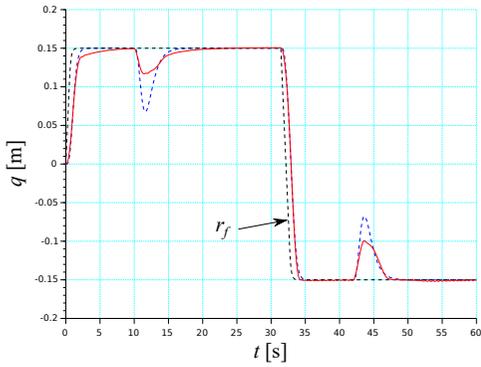


図 16.7: 外乱がある場合の IMC 制御系の出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

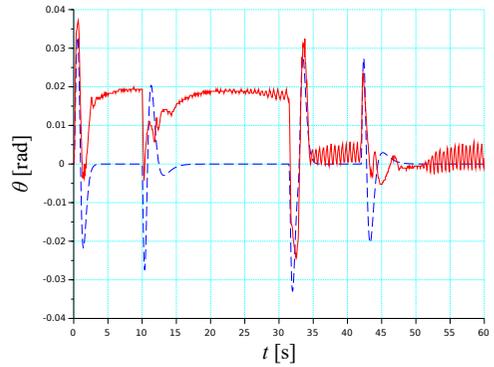


図 16.8: 外乱がある場合の IMC 制御系の振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

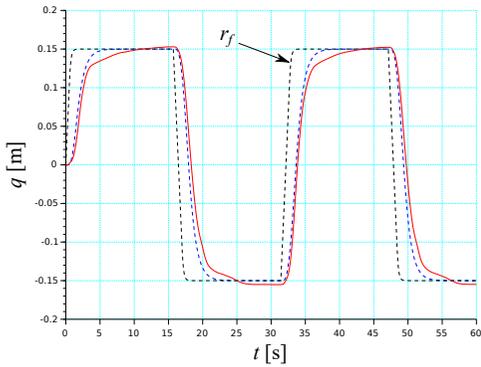


図 16.9: IP 型制御系の出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

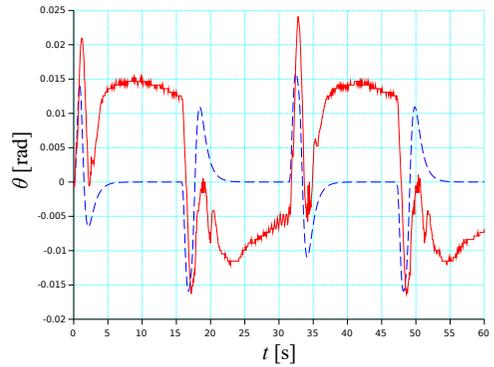


図 16.10: IP 型制御系の振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

16.4 姿勢角の計測に関する補足

16.4.1 補助輪の角変位 θ_2 から姿勢角 θ を求める方法

実験装置では、補助輪の角変位 θ_2 をエンコーダで計測して振り子部の姿勢角 θ を求めている。以下で、 θ_2 から θ を求める計算式を導く。

図 16.13 から

$$P_1 = R - R_0, \quad P_2 = R - R_0 + l_1 \sin \theta \tag{16.33}$$

$$\theta'_2 = \theta_2 - (\theta - \theta_1) \tag{16.34}$$

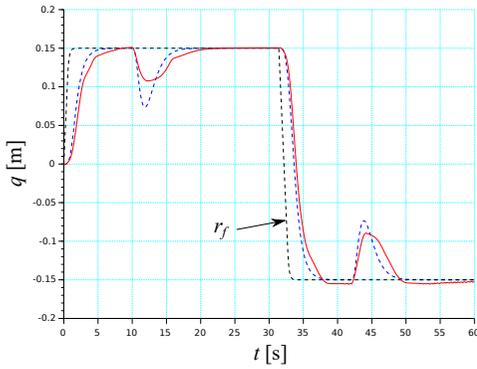


図 16.11: 外乱がある場合の IP 型制御系の出力 $q(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

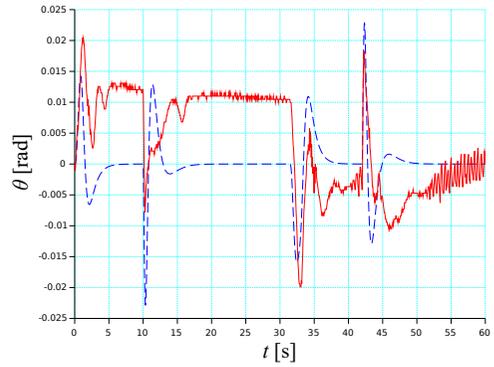


図 16.12: 外乱がある場合の IP 型制御系の振り子角 $\theta(t)$ の応答 (実線: 実験結果, 破線: シミュレーション結果)

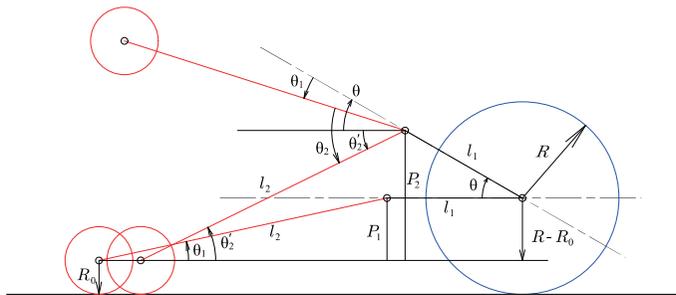


図 16.13: 補助輪による θ の計測機構

また

$$\theta_1 = \sin^{-1} \frac{P_1}{l_2} = \sin^{-1} \frac{R - R_0}{l_2} \quad (16.35)$$

$$\theta_2' = \sin^{-1} \frac{P_2}{l_2} = \sin^{-1} \frac{R - R_0 + l_1 \sin \theta}{l_2} \quad (16.36)$$

(16.34) 式にこれらを代入し, 各角度は小さいとして, 近似すると

$$\frac{R - R_0 + l_1 \theta}{l_2} = \theta_2 - \left(\theta - \frac{R - R_0}{l_2} \right) \quad (16.37)$$

これを整理すると次式を得る.

$$\theta = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \theta_2 \quad (16.38)$$

16.4.2 ジャイロで $\dot{\theta}$ を計測する場合

振り子部に対する車輪の回転角 φ_0 と $\dot{\theta}$ を計測する場合の可観測性 (オブザーバの構成可能性) を確認する.

(16.14) 式から

$$\theta = \frac{1}{L_1}(q - r), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{L_1}(\dot{q} - \dot{r}) \quad (16.39)$$

ボディに対する車輪の角変位（エンコーダで計測）を φ_0 とすると $\varphi = \varphi_0 + \theta$ なので

$$r = R\varphi = R(\varphi_0 + \theta) \quad (16.40)$$

これらから

$$\varphi_0 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{L_1} \right) r - \frac{1}{L_1} q \quad (16.41)$$

状態と出力を

$$x = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & r & \dot{r} \end{bmatrix}', \quad y = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (16.42)$$

と定義し

$$\ddot{r} = u \quad (16.43)$$

とすると系の状態方程式と出力方程式は次式となる

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (16.44)$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{R} + \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \end{bmatrix} x \quad (16.45)$$

可観測性行列の一部

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{R} + \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{R} + \frac{1}{L_1} \\ \frac{\omega_n^2}{L_1} & 0 & -\frac{\omega_n^2}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (16.46)$$

のランクは 4 なので、この系は可観測である。よって、オブザーバにより状態推定可能である。

16.5 演習問題

1. (16.7) 式及び (16.8) 式を導出せよ。
2. (16.15) 式を確認せよ。
3. (16.24) 式, すなわち

$$k_0 = -C(A - BF)^{-1}B$$

を計算して、 k_0 の明示的表現を求めよ。

4. (16.46) 式の行列式, すなわち

$$\begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{R} + \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{R} + \frac{1}{L_1} \\ \frac{\omega_n^2}{L_1} & 0 & -\frac{\omega_n^2}{L_1} & 0 \end{vmatrix}$$

を計算せよ.

5. (16.20), (16.21) 式の系の可制御性, 可観測性を判定せよ.

6. (16.20) 式の系に対して, 状態フィードバック $v = -Fx$ によって閉ループ極を

$$\left\{ -\frac{1}{T}, -\omega_n, -\epsilon \right\}$$

に配置した. このとき, 以下を利用して, $G_F(s) = F(sI_3 - A)^{-1}B$ (ナイキストの安定判別法における開ループ伝達関数) を求めよ.

(16.20) 式の (A, B) は座標変換によって

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \omega_n & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_n & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と変換でき, この座標系における F は次式で表される.

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \omega_n + \epsilon & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

次の関係がある.

$$G_F(s) = F(sI_3 - A)^{-1}B = \tilde{F}(sI_3 - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

7.* $\omega_n = 5.67$ [rad/s], $T = \frac{1}{\omega_n}$ [s] とする. Scilab を用いて, 複素平面に, 以下の ϵ に対する $G_F(j\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ のグラフ (ナイキスト線図) を描け.

$$\epsilon = 0.2\omega_n, 0.01\omega_n$$

関連図書

- [1] RS オンライン, アルミ電解コンデンサ ガイド アルミ電解コンデンサの基礎知識,
<https://jp.rs-online.com/web/generalDisplay.html?id=ideas-and-advice/aluminum-electrolytic-capacitors-guide>
2020.3.21 閲覧
- [2] 吉田 和信, システムと制御入門, 2009,
[http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/syscon\(2009\)_rev.pdf](http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/syscon(2009)_rev.pdf)
- [3] Matlab ヘルプセンター page (むだ時間のパデ近似),
<https://jp.mathworks.com/help/control/ref/pade.html>
2020.3.21 閲覧
- [4] 日本工業出版(株) Web 講座 ゼロから学ぶPID 制御 (アドバンスト PID と応用コース),
第 4 回 むだ時間補償制御 (その 1): スミスむだ時間補償制御,
https://www.nikko-pb.co.jp/products/k_data/ad04.pdf
2020.3.23 閲覧
- [5] 制御工学の基礎あれこれ,
<http://arduino pid.web.fc2.com/index.html>
2020.3.23 閲覧
- [6] D. Kinoshita and K. Yoshida, Stabilizing control for a ball and beam system considering the restricted beam angle and ball speed, *Proceedings of the SICE Annual Conference 2019*, pp. 170–176, 2019.
- [7] 木下, 吉田, ビーム角の制限を考慮したボールビーム系の安定化制御, 計測自動制御学会論文集, Vol.57, No.6, pp. 285–292, 2021
- [8] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Prentice-Hall, pp. 39–56, 1998.
- [9] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control: Analysis and design, Second edition*, John Wiley & Sons, Ltd., 2005.
- [10] 島田 明, 外乱オブザーバ, コロナ社, pp.14–16, 2021
- [11] 吉田 和信, Scilab による古典制御計算, 2010,
<http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/scilab08.pdf>
- [12] H. S. Black, Stabilized feedback amplifiers, *Bell System Technical Journal*, Vol.13, pp. 1–18, 1934.

- [13] 森 泰親, 演習で学ぶ PID 制御, 森北出版, 2009
- [14] アズビル株式会社, やさしい自動制御のお話,
https://www.compoclub.com/products/knowledge/jidou_seigyoo/index.html
2020.5.3 閲覧
- [15] S. Skogestad, Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning, *Journal of Process Control*, Vol. 13, pp. 291–309, 2003.
- [16] 川谷 亮治, フリーソフトで学ぶ線形制御, 森北出版, 2008
- [17] 森 泰親, わかりやすい現代制御理論, 森北出版, 2013
- [18] 吉田 和信, 制御工学 II 講義ノート, 2019
- [19] Z. Lin, A. Saberi, M. Gutmann and Y. A. Shamash, Linear controller for an inverted pendulum having restricted travel: A high-and-low gain approach, *Automatica*, 32-6, pp. 933–937, 1996.
- [20] 森 泰親, 制御工学, コロナ社, pp. 164–167, 2001
- [21] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotović, Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 37, No. 3, pp. 392–398, 1992.
- [22] A. R. Teel, Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators, *Systems & Control Letters*, Vol.18, pp. 165–171, 1992.
- [23] H. J. Sussmann, E. D. Sontag, Y. Yang, A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2411–2425, 1994.
- [24] 小郷, 美多, システム制御理論入門, 実教出版, pp. 27, 1979
- [25] K. J. Åström and T. Hägglund, *Advanced PID control*, ISA, pp. 79–80, 2006.
- [26] 板谷 松樹, 水力学, 朝倉書店, pp. 79–80, 1966
- [27] X. Li, X. Peng, and Z. Geng, Anti-swing control for 2-D under actuated cranes with load hoisting/lowering: A coupling-based approach, *ISA Transactions*, Vol. 95, pp. 372–378, 2019.
- [28] K. Yoshida and I. Matsumoto, Load transfer control for a crane with state constraints, *2009 American Control Conference*, pp. 2551–2557, 2009.
- [29] 丸田 一郎, Arduino と LEGO 部品を用いた教育用自走式倒立振子, 計測と制御, 第 54 巻, 第 3 号, pp. 196–199, 2015

付録 A 演習問題の解

A.1 第1章

1. 「システムと制御」講義ノート 第8章ブロック線図のモデリングへの応用 参照
2. 同上
3. 省略
4. まず, $\Omega F = s$ に注意して以下を計算する.

$$T_{11} = R_1 C_1 = 2 \text{ [s]}, \quad T_{22} = R_2 C_2 = 2 \text{ [s]}, \quad T_{12} = R_1 C_2 = 2 \text{ [s]}$$

これらを (1.6) 式に代入し, 整理すると次式を得る.

$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$$

これを解くと

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 2.618, 0.382$$

$\alpha = 2.618$ とおき (どちらでもよい), (1.5) 式に代入すると

$$T_1 = T_{11}\alpha = 5.236 \text{ [s]}, \quad T_2 = T_{22}\frac{1}{\alpha} = 0.764 \text{ [s]}$$

を得る.

A.2 第2章

1. $G_2(s)$ を (2.2) 式の形に整理する.

$$G_2(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls} = \frac{-s + \frac{2}{L}}{s + \frac{2}{L}} = \frac{-(s + \frac{2}{L}) + \frac{4}{L}}{s + \frac{2}{L}} = \frac{\frac{4}{L}}{s + \frac{2}{L}} - 1$$

状態を x_2 とすると次式を得る.

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{2}{L}x_2(t) + u(t)$$

$$y_2(t) = \frac{4}{L}x_2(t) - u(t)$$

同様に, $G_1(s)$ を (2.2) 式の形に整理する.

$$G_1(s) = \frac{k}{Ts + 1} = \frac{\frac{k}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

状態を x_1 とすると次式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{T}x_1(t) + y_2(t) \\ y(t) &= \frac{k}{T}x_1(t)\end{aligned}$$

以上から, 次の状態方程式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{T}x_1(t) + \frac{4}{T}x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{2}{L}x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= \frac{k}{T}x_1(t)\end{aligned}$$

これをベクトル・行列表現すれば (2.5), (2.6) 式となる.

2. $x(t)$, $z(t)$ の状態方程式をそれぞれ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t), \quad y(t) = \tilde{C}z(t)$$

と表す. $z = Sx$ の関係から次式がわかる.

$$\tilde{A} = SAS^{-1}, \quad \tilde{B} = SB, \quad \tilde{C} = CS^{-1}$$

これらを確認すればよい. 実際

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4T}{2T-L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4T}{2T-L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix}$$

$$SB = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4T}{2T-L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2T+L}{2T-L} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$CS^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{k}{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4T}{2T-L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{T} & -\frac{4k}{2T-L} \end{bmatrix}$$

と確認できる.

3. $u(t) = F_1 z_1(t)$ を (2.8) 式の 1 番目の式に代入すると

$$\dot{z}_1(t) = -\frac{1}{T}z_1(t) + \frac{2T+L}{2T-L}u(t) = -\frac{1}{T}z_1(t) + \frac{2T+L}{2T-L} \cdot \frac{2T-L}{2T+L} \left(p_1 + \frac{1}{T} \right) z_1(t) = p_1 z_1(t)$$

これから, z_1 部分系の極は p_1 であることがわかる.

A.3 第3章

1. 省略

(補足) $K(s) = f(s)G_1(s)^{-1}$ がプロパー (分母の s の次数 \geq 分子の s の次数) でない場合, 必要な次数 n_1 の広域通過フィルタ $\frac{1}{(\epsilon s + 1)^{n_1}}$ を $f(s)$ に追加すればよい. $\epsilon > 0$ は制御系のバンド幅を ω_B とすると, $\frac{1}{\epsilon} > \omega_B$ と選ぶ.

2. 省略

(補足) 図 3.2 からわかるように, IMC 法は $G(s)$ の動特性をフィードバックで改善しようとするものではない. 実際, 本設計例の場合

$$C(s)G(s) = \frac{Ts + 1}{k} \frac{1}{(T_c + L)s} \frac{k}{Ts + 1} G_2(s)$$

と $G(s)$ の極 $-\frac{1}{T}$ がコントローラの零点によって消去されている. よって, IMC 法では, $G(s)$ が安定である必要がある.

3. 提供された Scilab プログラムで確認できる.

A.4 第4章

1. 省略

(補足) ブロック線図の等価変換でも得られる.

2. 省略

(補足) F_v はあまり大きくできないという印象を持つかもしれないが, $G(s) = \frac{k}{s}$ なので, 低周波数域では, $|F_v G(s)|$ が大きくなる.

3. タイヤが1回転すると台車が $54.5 [\text{mm}] \times \pi \simeq 171.2 [\text{mm}]$ だけ進み, ロータリーエンコーダのカウンタ値が $2000 \times 50 = 100000$ だけ変化する. よって, 1カウント当たりの台車の変位は

$$\frac{171.2}{100000} \simeq 0.00171 [\text{mm}]$$

となる. 精度よく計測できることがわかる.

4. 図 A.1 を経て図 4.18 を得る.

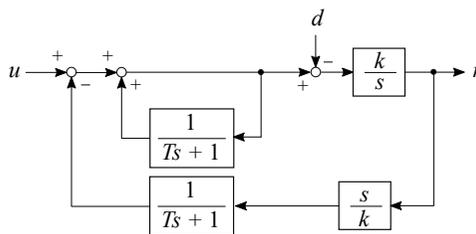


図 A.1: 等価変換されたブロック線図

A.5 第5章

1. 省略

(補足) 1次遅れ要素 $\frac{1}{Ts+1}$ に対して, $\frac{1}{T}$ は折れ点周波数であり, バンド幅でもある. バンド幅は制御が有効な周波数の範囲と理解してよい.

2. 省略

(補足) $G(s) = \frac{F_1 s + F_0}{s^2 + F_1 s + F_0}$ のステップ応答の最終値は $G(0) = 1$, 安定性条件は, $F_0 > 0$, $F_1 > 0$ である. このとき, 零点 $-\frac{F_0}{F_1}$ は負の実数となる. ちなみに, $F_1 = 0$ のとき, 零点はなくなる.

3. 省略

(補足) $G(s) = \frac{F_0}{s^2 + F_1 s + F_0}$ のステップ応答の最終値は $G(0) = 1$, 安定性条件は, $F_0 > 0$, $F_1 > 0$ である.

4. 省略

本文参照

A.6 第6章

1. まず, $G_2(s)$ を (6.4) 式の形に変形する.

$$G_2(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}Ls}{1 + \frac{1}{2}Ls} = \frac{-s + \frac{2}{L}}{s + \frac{2}{L}} = \frac{-(s + \frac{2}{L}) + \frac{4}{L}}{s + \frac{2}{L}} = \frac{\frac{4}{L}}{s + \frac{2}{L}} - 1$$

これから, $u(s) = G_2(s)v(s)$ の時間領域表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -\frac{2}{L}x_2(t) + v(t) \\ u(t) &= \frac{4}{L}x_2(t) - v(t) \end{aligned}$$

また

$$G_1(s) = \frac{k}{s}$$

はすでに (6.4) 式の形である. $y(s) = G_1(s)u(s)$ の時間領域表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t) = \frac{4}{L}x_2(t) - v(t) \\ y(t) &= kx_1(t) \end{aligned}$$

以上から次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

2. S^{-1} は次式と計算される.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S による変換関係

$$\tilde{A} = SAS^{-1}, \quad \tilde{B} = SB, \quad \tilde{C} = CS^{-1}$$

により確認できる.

3. (6.12) 式の $v_l(t)$ を (6.10) 式の $v(t)$ に代入すると, (6.12) 式の第1式は次式となる.

$$\dot{z}_1(t) = F_1 z_1(t) = p_1 z_1(t)$$

これから, z_1 部分系の固有値 (極) が p_1 となることがわかる.

A.7 第7章

1. 省略

2. 状態は

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q}$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = u_1$$

これらを t で微分し, (7.6) 式と図 7.3 を参考にすると次式を得る.

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \omega_n^2(q - r) = \omega_n^2(x_1 - x_3)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{r} = u_1 - \frac{2}{T}r = x_4 - \frac{2}{T}x_3$$

$$\dot{x}_4 = \dot{u}_1 = \frac{1}{T^2}(v - r) = \frac{1}{T^2}(v - x_3)$$

これを, ベクトル行列表現すると次式を得る.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} v$$

3. P (対称行列) を

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおき, A_u, B_u, C_u を (7.19) 式のリカッチ方程式に代入すると

$$\begin{bmatrix} 2\omega_n^2 p_{12} + \rho - p_{12}^2 \omega_n^4 & \omega_n^2 p_{22} + p_{11} - p_{12} p_{22} \omega_n^4 \\ * & 2p_{12} - p_{22}^2 \omega_n^4 \end{bmatrix} = 0$$

これから次の方程式が得られる.

$$p_{12}^2 \omega_n^4 - 2\omega_n^2 p_{12} - \rho = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$2p_{12} - p_{22}^2 \omega_n^4 = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\omega_n^2 p_{22} + p_{11} - p_{12} p_{22} \omega_n^4 = 0 \quad \textcircled{3}$$

① 式から (正の方を選んだ)

$$p_{12} = \frac{\omega_n^2 + \sqrt{\omega_n^4 + \rho \omega_n^4}}{\omega_n^4} = \frac{1}{\omega_n^2} (1 + \sqrt{1 + \rho})$$

これを ② 式に用いて p_{22} を求めると (正の方を選んだ)

$$p_{22} = \frac{\sqrt{2p_{12}}}{\omega_n^2} = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \rho}}}{\omega_n^3} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_n^3} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \rho}}$$

さらに, これらを ③ 式に用いて p_{11} を計算すると

$$p_{11} = p_{12} p_{22} \omega_n^4 - \omega_n^2 p_{22} = \omega_n^2 p_{22} (\omega_n^2 p_{12} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_n} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \rho}} \cdot \sqrt{1 + \rho}$$

P が正定行列であることを確認する¹.

$$p_{11} > 0$$

$$|P| = p_{11} p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{\omega_n^4} (1 + \sqrt{1 + \rho}) (\sqrt{1 + \rho} - 1) > 0$$

よって, P は正定行列である. F_ρ は

$$\begin{aligned} F_\rho &= B'_u P = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\omega_n^2 \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 + \rho} & \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \rho}}}{\omega_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と計算される.

4. 特性多項式の係数の比較から求める.

$$\begin{aligned} |sI_2 - (A_u - KC_u)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= s^2 + k_1 s - \omega_n^2 + k_2 = (s + \omega_n)^2 = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 \end{aligned}$$

¹ P が正定行列であるための必要十分条件は, P のすべての主座小行列式が正であることである.

これから

$$k_1 = 2\omega_n, \quad k_2 = 2\omega_n^2$$

すなわち

$$K = \begin{bmatrix} 2\omega_n \\ 2\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

5. 省略

A.8 第8章

1.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 & \frac{1}{T^2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{T} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 & \frac{1}{T^2} \end{vmatrix} = \frac{\omega_n^2}{T^2} \neq 0$$

2番目の等式は5行に関する行列式の展開公式から、3番目の等式は下三角行列の行列式は対角要素の積という事実から求めた。

2. 状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega_n^2(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= -\frac{2}{T}x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{T^2}(v - x_3) \\ \dot{x}_i &= r_f - x_1 \end{aligned}$$

これから、図 A.2 のブロック線図を得る。

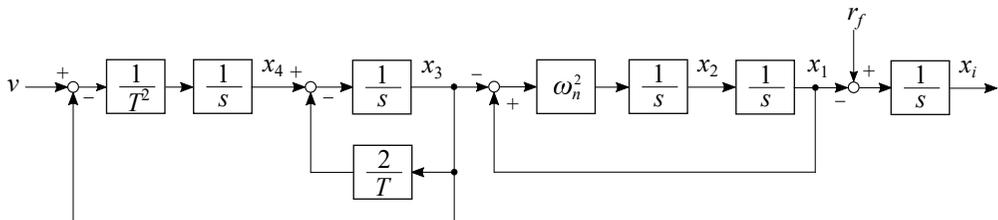


図 A.2: (8.4) 式の状態方程式に対応するブロック線図

3. $r_0(s) = \frac{2a_0}{s}$ である.

$$r_f(s) = \frac{1}{T_0s + 1} r_0(s) = \frac{2a_0}{s(T_0s + 1)} = 2a_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{T_0}{T_0s + 1} \right) = 2a_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_0}} \right)$$

これを逆ラプラス変換すると

$$r_f(t) = 2a_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{T_0}t} \right) = 0.6 (1 - e^{-5t}), \quad t \geq 0$$

これを時間微分すると次式を得る.

$$\dot{r}_f(t) = \frac{2a_0}{T_0} e^{-\frac{1}{T_0}t} = 3e^{-5t}, \quad t \geq 0$$

A.9 第9章

1. 状態は

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= \dot{r} \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= u_1 \end{aligned}$$

これらを t で微分し, (9.3) 式と図 9.5 を参考にすると次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} = M_0g\theta = M_0gx_3 \\ \dot{x}_3 &= \dot{\theta} = u_0 = u_1 - \frac{2}{T}\theta = x_4 - \frac{2}{T}x_3 \\ \dot{x}_4 &= \dot{u}_1 = \frac{1}{T^2}(v - \theta) = \frac{1}{T^2}(v - x_3) \end{aligned}$$

これと $r = x_1$ をベクトル行列表現すると次式を得る.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0g & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} v$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

2. 状態は

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= \dot{r} \\ x_3 &= M_0g\theta \\ x_4 &= M_0g\dot{\theta} \end{aligned}$$

これらを t で微分し, (9.3) 式と $\ddot{\theta} = v$ に注意すると次式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{r} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{r} = M_0 g \theta = x_3 \\ \dot{x}_3 &= M_0 g \dot{\theta} = x_4 \\ \dot{x}_4 &= M_0 g \ddot{\theta} = M_0 g v\end{aligned}$$

これと $r = x_1$ をベクトル行列表現すると次式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_0 g \end{bmatrix} v \\ r &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

3.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}A_b - KC_b &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

この特性多項式を指定極の多項式に等しくすればよい.

$$|sI - (A_b - KC_b)| = \begin{vmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{vmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2 = (s + \mu_1)^2 = s^2 + 2\mu_1 s + \mu_1^2$$

これから, 次式を得る.

$$k_1 = 2\mu_1, \quad k_2 = \mu_1^2$$

A.10 第10章

1. S のブロック行列を逆行列の公式に当てはめると

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{M_0 g} \begin{bmatrix} 1 & 1 + 2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = M_0 g \begin{bmatrix} 1 & -(1 + 2T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ Y &= T^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$-X^{-1}Y = -M_0gT^2 \begin{bmatrix} 1 & -(1+2T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -M_0gT^2 \begin{bmatrix} 1 & -2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上から次式を得る.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & -X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0g & -M_0g(1+2T) & -M_0gT^2 & 2M_0gT^3 \\ 0 & M_0g & 0 & -M_0gT^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 次式を利用する.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

変換関係を確認する.

$$SA = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XA_{11} & XA_{12} + YA_{22} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}S = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X & A_{11}Y \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$XA_{11} = \frac{1}{M_0g} \begin{bmatrix} 1 & 1+2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{M_0g} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{M_0g} \begin{bmatrix} 1 & 1+2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{M_0g} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = XA_{11}$$

$$\begin{aligned} XA_{12} + YA_{22} &= \frac{1}{M_0g} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_0g & 0 \end{bmatrix} + T^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{T} & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & T^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_{11}Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = XA_{12} + YA_{22}$$

よって, $SA = \bar{A}S$ が確認できた.

$$SB = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YB_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$YB_2 = T^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{B}_1$$

$B_2 = \bar{B}_2$ なので, $SB = \bar{B}$ が確認できた.

$$\begin{aligned} CS^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0g & -M_0g(1+2T) & -M_0gT^2 & 2M_0gT^3 \\ 0 & M_0g & 0 & -M_0gT^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_0g & -M_0g(1+2T) & -M_0gT^2 & 2M_0gT^3 \end{bmatrix} = \bar{C} \end{aligned}$$

よって, $CS^{-1} = \bar{C}$ が確認できた.

3. 次式のとおり計算される.

$$\begin{aligned} \bar{G}_1(s) &= \bar{C}_1(sI_2 - A_{11})^{-1}\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} M_0g & -M_0g(1+2T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_0g & -M_0g(1+2T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= M_0g \frac{1-2Ts}{s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_2(s) &= \bar{C}_2(sI_2 - A_{22})^{-1}\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} -M_0gT^2 & 2M_0gT^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{2}{T} & -1 \\ -\frac{1}{T^2} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -M_0gT^2 & 2M_0gT^3 \end{bmatrix} \frac{1}{(s + \frac{1}{T})^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & s + \frac{2}{T} \end{bmatrix} \\ &= \frac{M_0gT^2}{(Ts+1)^2} (2Ts+3) \end{aligned}$$

4. 次式のとおり確認できる.

$$\begin{aligned} \bar{G}_1(s) + \bar{G}_2(s) &= M_0g \frac{1-2Ts}{s^2} + \frac{M_0gT^2}{(Ts+1)^2} (2Ts+3) \\ &= \frac{M_0g}{s^2(Ts+1)^2} \{(1-2Ts)(T^2s^2 + 2Ts+1) + T^2s^2(2Ts+3)\} \\ &= \frac{M_0g}{s^2(Ts+1)^2} = G(s) \end{aligned}$$

A.11 第11章

1. $z = Sx$, $\bar{A} = SAS^{-1}$, $\bar{B} = SB$ の関係式を用いて座標変換すると次式を得る.

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

2. $\theta(t)$ のラプラス変換は

$$\theta(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

よって

$$r(s) = \frac{M_0g}{s^2}\theta(s) = \frac{M_0g}{s^2\left(s + \frac{1}{T}\right)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s + \frac{1}{T}}$$

分子の恒等式は

$$\begin{aligned} M_0g &= K_1s\left(s + \frac{1}{T}\right) + K_2\left(s + \frac{1}{T}\right) + K_3s^2 \\ &= (K_1 + K_3)s^2 + \left(\frac{K_1}{T} + K_2\right)s + \frac{K_2}{T} \end{aligned}$$

各係数の比較から

$$K_2 = M_0gT, \quad K_1 = -M_0gT^2, \quad K_3 = -K_1 = M_0gT^2$$

すなわち

$$r(s) = -\frac{M_0gT^2}{s} + \frac{M_0gT}{s^2} + \frac{M_0gT^2}{s + \frac{1}{T}} = M_0gT\left(-\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}\right)$$

これを逆ラプラス変換すると次式を得る.

$$r(t) = M_0gT\left(-T + t + Te^{-\frac{1}{T}t}\right), \quad t \geq 0$$

3. $v(t)$ のラプラス変換は

$$v(s) = \frac{1}{s}$$

よって

$$\theta(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^2}v(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)^2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{Ts + 1} + \frac{K_3}{(Ts + 1)^2}$$

分子の恒等式は

$$\begin{aligned} 1 &= K_1(Ts + 1)^2 + K_2s(Ts + 1) + K_3s \\ &= (K_1T^2 + K_2T)s^2 + (2K_1T + K_2 + K_3)s + K_1 \end{aligned}$$

各係数の比較から

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -T, \quad K_3 = -T$$

すなわち

$$\theta(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} - \frac{T}{(Ts + 1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} - \frac{1}{T}\frac{1}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$$

これを逆ラプラス変換すると次式を得る.

$$\theta(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t} - \frac{t}{T}e^{-\frac{1}{T}t}, \quad t \geq 0$$

A.12 第12章

1. パラメータ値は

$$C = 0.0025, [\text{m}]^2, \quad a = \frac{\pi d^2}{4} [\text{m}^2], \quad d = 0.0016 [\text{m}]$$

$$h_0 = 0.12 [\text{m}], \quad f = 0.9, \quad g = 9.8 [\text{m/s}^2]$$

これらを計算式に代入すると

$$T = CR = C \frac{1}{fa} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 216.2 [\text{s}]$$

2. (1) ギヤポンプ（歯車ポンプ）：かみ合った一組の歯車（平歯車）を密閉容器に入れ、容器の中央に流入・入出のためのパイプを取り付けたもので、歯車の回転を利用して、液体を圧送するポンプ。歯車の回転毎分にほぼ比例した流量を流すことができる。
- (2) オリフィス：比較的薄い板にあけた幾何学的に規則正しい穴で、それから流体が噴出するもの。[26]
- (3) 流量係数（オリフィスの流量係数）：トリチェリの定理から求まる流出口の流速 v と流出口の断面積 a から噴出する流量が av と計算されるが、摩擦や噴流の横断面が絞られることから、実際の流量 q はこれよりも少なくなり

$$q = fav, \quad 0 < f < 1$$

で計算される。この係数 f を（オリフィスの）流量係数という。[26]

- (4) RC フィルタ：RC 回路により高周波の信号を減衰させるもの。

A.13 第13章

1. $G_2(s)$ の状態方程式表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L} \end{bmatrix} x_2(t) + v(t) \end{aligned}$$

$G_1(s)$ の状態方程式表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L} \end{bmatrix} x_2(t) + v(t) \\ y(t) &= kx_1(t) \end{aligned}$$

以上から次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & -\frac{12}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{array} \right] x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), & x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \left[\begin{array}{c|cc} k & 0 & 0 \end{array} \right] x(t) \end{aligned}$$

2. 元の状態方程式を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

とする。次式を確認すればよい。

$$\tilde{A} = SAS^{-1}, \quad \tilde{B} = SB, \quad \tilde{C} = CS^{-1}$$

$\tilde{A} = SAS^{-1}$ に等価な $\tilde{A}S = SA$ を確認する。

$$\begin{aligned} \tilde{A}S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{12}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} \\ SA &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{12}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{12}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} = \tilde{A}S \\ \tilde{B} = SB &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{12}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = CS^{-1} &= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{12}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -\frac{12k}{L} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. シルベスター方程式

$$-A_{11}X + XA_{22} + A_{12} = 0$$

に

$$A_{11} = 0, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L} \end{bmatrix}$$

を代入して解けばよい。 $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ と置くと

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L} \end{bmatrix} = 0$$

これを整理すると

$$\begin{bmatrix} -\frac{12}{L^2}X_2 & X_1 - \frac{6}{L}X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{L} \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\begin{aligned} -\frac{12}{L^2}X_2 &= 0 \\ X_1 - \frac{6}{L}X_2 &= \frac{12}{L} \end{aligned}$$

上式から、 $X_2 = 0$, $X_1 = \frac{12}{L}$, すなわち、次式を得る。

$$X = \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

A.14 第14章

1. $G_2(s)$ の状態方程式表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L} \end{bmatrix} x_2(t) + v(t) \end{aligned}$$

$G_1(s)$ の状態方程式表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{T}(u(t) - x_1(t)) = -\frac{1}{T}x_1(t) + \frac{1}{T}u(t) \\ &= -\frac{1}{T}x_1(t) + \frac{1}{T} \left(\begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L} \end{bmatrix} x_2(t) + v(t) \right) \\ y(t) &= kx_1(t) \end{aligned}$$

以上から次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{T} & 0 & -\frac{12}{TL} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{array} \right] x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), & x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

2. 元の状態方程式を

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

とする. 次式を確認すればよい.

$$\tilde{A} = SAS^{-1}, \quad \tilde{B} = SB, \quad \tilde{C} = CS^{-1}$$

$\tilde{A} = SAS^{-1}$ に等価な $\tilde{A}S = SA$ を確認する.

$$\begin{aligned} \tilde{A}S &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T}X_1 & -\frac{1}{T}X_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} \\ SA &= \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{12}{TL} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & -\frac{12}{L^2}X_2 & -\frac{12}{TL} + X_1 - \frac{6}{L}X_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} = \tilde{A}S \end{aligned}$$

(1, 2) 要素から

$$-\frac{1}{T}X_1 = -\frac{12}{L^2}X_2 \rightarrow X_1 = \frac{12T}{L^2}X_2$$

(1, 3) 要素から

$$-\frac{1}{T}X_2 = -\frac{12}{TL} + X_1 - \frac{6}{L}X_2$$

これを整理すると

$$\left(\frac{12T}{L^2} + \frac{1}{T} - \frac{6}{L}\right)X_2 = \frac{12}{TL}$$

これから

$$X_2 = \frac{12L}{12T^2 - 6TL + L^2}$$

よって、 $\tilde{A}S = SA$ が確認できた。

$$\tilde{B} = SB = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} + X_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CS^{-1} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -X_1 & -X_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -kX_1 & -kX_2 \end{bmatrix}$$

3. シルベスター方程式

$$-A_{11}X + XA_{22} + A_{12} = 0$$

に

$$A_{11} = -\frac{1}{T}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{TL} \end{bmatrix}$$

を代入して解けばよい。 $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ と置くと

$$\frac{1}{T} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{TL} \end{bmatrix} = 0$$

これを整理すると

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{T}X_1 & \frac{1}{T}X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^2}X_2 & X_1 - \frac{6}{L}X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{TL} \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}X_1 - \frac{12}{L^2}X_2 &= 0 \\ \frac{1}{T}X_2 + X_1 - \frac{6}{L}X_2 &= \frac{12}{TL} \end{aligned}$$

上式から、 $X_1 = \frac{12T}{L^2}X_2$, $X_2 = \frac{12L}{12T^2 - 6TL + L^2}$, すなわち、次式を得る。

$$X = \begin{bmatrix} \frac{144T}{L(12T^2 - 6TL + L^2)} & \frac{12L}{12T^2 - 6TL + L^2} \end{bmatrix}$$

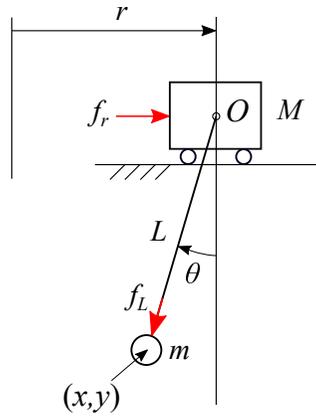


図 A.3: ラグランジュの方程式のための座標系

A.15 第 15 章

1.

荷の座標を (x, y) とすると

$$x = r - L \sin \theta, \quad y = -L \cos \theta$$

また, 以下に注意する.

$$\dot{x} = \dot{r} - \dot{L} \sin \theta - L \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = -\dot{L} \cos \theta + L \dot{\theta} \sin \theta$$

荷の速度を v で表す. 系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V は次式で計算される.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left\{ (\dot{r} - \dot{L} \sin \theta - L \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\dot{L} \cos \theta + L \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{L}^2 - m \dot{r} \dot{L} \sin \theta - m L \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$V = -mgL \cos \theta$$

これらをラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = f_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{L}} \right) - \frac{\partial T}{\partial L} + \frac{\partial V}{\partial L} = f_L$$

に代入すると (15.1), (15.2), (15.3) 式を得る.

2. 省略

3.

$$\dot{x} = \frac{1}{T_d}(u - x)$$

$$y = \frac{1}{T_d}(u - x)$$

4. 省略

5. 省略

6. G_0 の零点は $\pm j5$, 極は $0, -2 \pm j\sqrt{21}$ である. G_0 の相対次数 (分母の s の次数 - 分子の s の次数) は 1 なので, 根軌跡の漸近線の角度は π である. 以上から, 図 A.4 の根軌跡 (Scilab の関数 `evans` を用いて描いた) を得る.

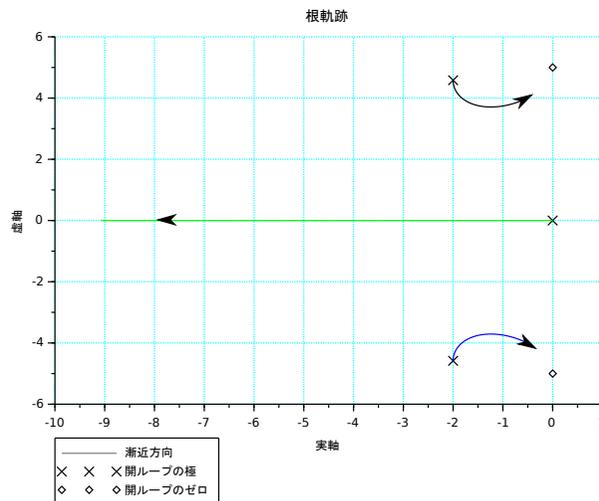


図 A.4: 根軌跡

A.16 第 16 章

1. 省略

2. 省略

3. $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}$ とする.

$$k_0 = \frac{1}{1 + f_1 + f_3}$$

4.

$$\left| \begin{array}{c} C \\ CA \end{array} \right| = \frac{\omega_n^2}{L_1^2 R^2}$$

5. 可制御性行列は次式と計算される.

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\omega_n^2}{T} \\ 0 & -\frac{\omega_n^2}{T} & \frac{\omega_n^2}{T^2} \\ \frac{1}{T} & -\frac{1}{T^2} & \frac{1}{T^3} \end{bmatrix}$$

$\text{rank}M_C = 3$ より可制御である.

可観測性行列は次式と計算される.

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}M_O = 3$ より可観測である.

6.

$$G_F(s) = \tilde{F}(sI_3 - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \frac{\omega_n + \epsilon}{s - \omega}$$

7. 計算により得られたグラフ (ナイキスト線図) を図 A.5 に示す. \times 印は $-1 + j0$ (ナイキストの安定判別法の臨界点) である.

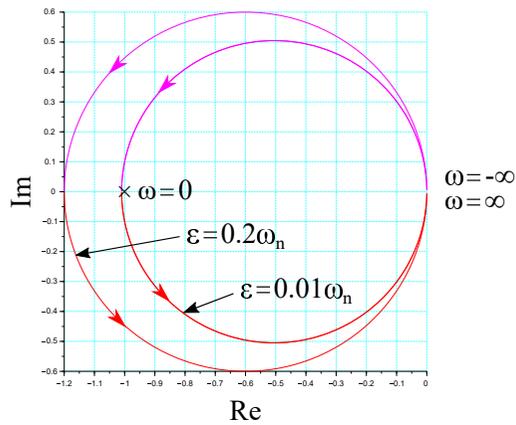


図 A.5: ナイキスト線図

制御工学 III 講義ノート

2020 年 8 月 11 日

2021 年 9 月 12 日改訂

2022 年 3 月 21 日改訂

Copyrights © 2022 吉田 和信

著者 吉田 和信