

# 制御工学I講義ノート

2022年度前期（制御工学I）

島根大学総合理工学部  
機械・電気電子工学科

吉田 和信

*Copyright ©2022 Kazunobu Yoshida. All rights reserved.*

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>モデリング，線形微分方程式と伝達関数</b>	<b>1</b>
1.1	微分方程式と伝達関数	1
1.2	伝達関数	2
1.3	基本伝達関数	3
1.4	演習問題	6
<b>第 2 章</b>	<b>ブロック線図と等価変換</b>	<b>11</b>
2.1	ブロック線図の構成要素と基本的な等価変換	11
2.2	メイソンのゲイン公式	11
2.3	演習問題	17
<b>第 3 章</b>	<b>過渡応答</b>	<b>21</b>
3.1	強制応答の求め方	21
3.2	インパルス関数，ステップ関数，ランプ関数	21
3.3	インパルス応答，ステップ応答，ランプ応答	22
3.4	モードの形	24
3.5	1次遅れ要素の過渡応答	26
3.6	2次要素の過渡応答	28
3.7	演習問題	30
<b>第 4 章</b>	<b>周波数応答</b>	<b>33</b>
4.1	周波数応答の計算法	33
4.2	伝達関数の積と商の周波数特性	36
4.3	演習問題	40
4.4	ボード線図の定義	43
4.5	伝達関数の積と商のボード線図	45
4.6	演習問題	49
<b>第 5 章</b>	<b>ラウス・フルビッツの安定判別法</b>	<b>51</b>
5.1	ラウスの安定判別法	51
5.1.1	連分数表現された伝達関数の安定性条件	51
5.1.2	ラウス表による安定判別法	53
5.2	フルビッツの安定判別法	56
5.3	安定度を指定した判定法	59
5.4	演習問題	60

<b>第 6 章</b>	<b>ナイキストの安定判別法</b>	<b>63</b>
6.1	ナイキストの安定判別法	63
6.2	簡易化されたナイキストの安定判別法	66
6.3	位相余裕とゲイン余裕	67
6.4	演習問題	69
<b>第 7 章</b>	<b>定常特性と制御系の型</b>	<b>73</b>
7.1	制御系の型と定常偏差	73
7.2	演習問題	77
<b>第 8 章</b>	<b>制御系の性能評価</b>	<b>81</b>
8.1	ステップ応答とゲイン特性による評価	81
8.2	2次要素の標準形の特性	84
8.3	演習問題	86
8.4	開ループ周波数特性による評価	91
8.4.1	安定度	91
8.4.2	速応性	92
8.4.3	目標値追従性	94
8.4.4	外乱除去特性	95
8.5	演習問題	96
8.6	開ループ周波数特性による評価	99
8.6.1	観測雑音遮断特性	99
8.6.2	ロバスト安定性	100
8.7	演習問題	105
<b>第 9 章</b>	<b>根軌跡法</b>	<b>107</b>
9.1	フィードバック系の根軌跡	107
9.2	1パラメータを持つ特性方程式の根軌跡	114
9.3	演習問題	114
<b>第 10 章</b>	<b>ループ整形法による設計</b>	<b>119</b>
10.1	ゲイン補償器	119
10.2	位相進み補償器	120
10.3	位相遅れ補償器	122
10.4	ループ整形法による設計例 (台車系)	125
10.4.1	ゲイン補償器	125
10.4.2	ゲイン位相進み補償器	126
10.4.3	ゲイン位相進み遅れ補償器	126
10.5	演習問題	129

# 第1章 モデリング，線形微分方程式と伝達関数

## 1.1 微分方程式と伝達関数

機械系 (mechanical system) を例として，系の数学モデルである微分方程式を求める．このとき，入力 (input) と出力 (output) の選び方に注意する．入力とは，系に与えることができる力や電圧など自由に操作できる変数 (variable) である．出力とは，制御する量 (制御量 (controlled variable)) として注目する変数である．

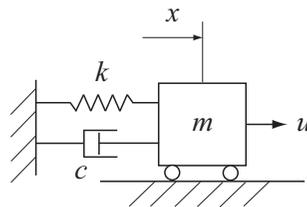


図 1.1: 1 自由度減衰系

図 1.1 の 1 自由度減衰系 (damped one-degree system) の数学モデルを求めよう．同図において， $x$  は物体の変位 (displacement)， $u$  は物体に作用する力 (force)， $m$  は質量 (mass)， $k$  はばね定数 (spring constant)， $c$  は粘性減衰係数 (viscous damping coefficient) である．ダランベールの原理 (D'Alembert's principle) (動的な力も含めて力のつりあい式を立てることができるという原理) により運動方程式 (equation of motion) を求めると

$$u - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0$$

すなわち

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \tag{1.1}$$

を得る．この場合，入力は  $u$  である．出力 ( $y$  で表す) としては， $x$  や  $\dot{x}$ ，またはこれらの線形結合

$$y = b_0x + b_1\dot{x} \tag{1.2}$$

などを考えることができる． $y$  が (1.2) 式で与えられる場合， $y$  と  $u$  に関する微分方程式を求めてみよう．(1.1) 式に  $b_0$  を掛ける．

$$b_0(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) = b_0u$$

(1.1) 式を  $t$  で微分し， $b_1$  を掛ける．

$$b_1(mx^{(3)} + c\ddot{x} + k\dot{x}) = b_1\dot{u}$$

これらを辺々たすと

$$m(b_0\ddot{x} + b_1x^{(3)}) + c(b_0\dot{x} + b_1\ddot{x}) + k(b_0x + b_1\dot{x}) = b_0u + b_1\dot{u}$$

すなわち

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = b_0u + b_1\dot{u} \quad (1.3)$$

を得る．

広範囲の系の数学モデルが (1.3) 式のような微分方程式で表現できる．制御工学 I で考える微分方程式の一般形は次のとおりである．

微分方程式の一般形

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (1.4)$$

ここで， $n \geq m$ ．

## 1.2 伝達関数

伝達関数 (transfer function) は入力と出力の関係を与える関数であり，以下のように定義される．

伝達関数の定義

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.5)$$

ここで， $Y(s)$ ， $U(s)$  はそれぞれ  $y(t)$ ， $u(t)$  のラプラス変換 (Laplace transform) である．ただし，すべての初期値は 0 とおく．

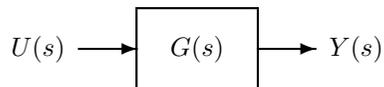


図 1.2: 伝達関数  $G(s)$  を持つ系のブロック線図

(1.5) 式はブロック線図 (block diagram) によって図 1.2 のように表される． $s$  は微分演算  $d/dt$  を表す記号 (演算子 (operator)) であると解釈してもよい．

**例題 1.1** 次の微分方程式で表される系の伝達関数を求めよ.

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_1\dot{u} + b_0u$$

[解] 微分方程式をすべての初期値が 0 ( $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $u(0) = 0$ ) という条件のもとでラプラス変換すると

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_1sU(s) + b_0U(s)$$

となる. これから, 伝達関数として次式を得る.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

上述のように微分方程式と伝達関数はいずれも系の数学モデルを表すものであり, 一方から他方が得られるという意味で, 等価である. 次に, 系の伝達関数が与えられた場合, これに対応する微分方程式を求めてみよう.

**例題 1.2** 次の伝達関数で表される系の微分方程式を求めよ.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

[解] 伝達関数表現から次式を得る.

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_1sU(s) + b_0U(s)$$

これを時間領域表現に直すと

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_1\dot{u} + b_0u$$

となる.

## 1.3 基本伝達関数

簡単な系の伝達関数や系の構成単位となる伝達関数として, 次の基本伝達関数がある. 比例要素 (proportional element), 微分要素 (derivative element), 積分要素 (integral element), 1次遅れ要素 (first-order lag element), 2次要素 (second-order element), むだ時間要素 (dead time element). これらの伝達関数を表 1.1 に示す.

**例題 1.3** 比例要素の時間領域の入出力関係を求めよ.

[解]

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K$$

から時間領域の表現として

$$y = Ku$$

を得る.

表 1.1: 基本伝達関数

要素名	$G(s)$
比例要素	$K$
微分要素	$s$
積分要素	$\frac{1}{s}$
1次遅れ要素	$\frac{1}{1+Ts}$
2次要素	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
むだ時間要素	$e^{-Ls}$

例題 1.4 1次遅れ要素の時間領域の入出力関係を求めよ.

[解]

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$

これから

$$(1+Ts)Y(s) = U(s)$$

時間領域に直すと

$$T\dot{y} + y = u$$

となる.

例 1.1 (比例要素) ばね系: 力を  $u$ , 変位を  $y$ , ばね定数を  $k$  とすると次の関係 (フックの法則 (Hook's law)) がある.

$$y = \frac{1}{k}u$$

これをラプラス変換すると

$$Y(s) = \frac{1}{k}U(s)$$

となる. これから伝達関数として次式を得る.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{k}$$

## 1.3. 基本伝達関数

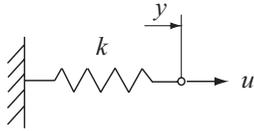


図 1.3: ばね系 (比例要素)

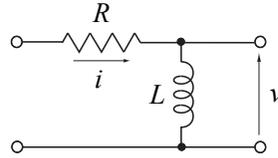


図 1.4: RL 回路系 (微分要素)

例 1.2 (微分要素) RL 回路系 : 電圧  $v$  と電流  $i$  との間に次の関係がある.

$$v(t) = L\dot{i}(t)$$

これを初期値 0 として ( $i(0) = 0$ ) ラプラス変換すると次式を得る.

$$V(s) = LsI(s)$$

よって,  $I(s)$  から  $V(s)$  までの伝達関数は

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Ls$$

となる.

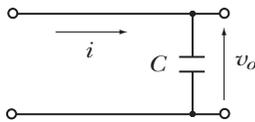


図 1.5: C 回路系 (積分要素)

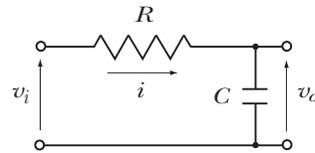


図 1.6: RC 回路系 (1次遅れ要素)

例 1.3 (積分要素) C 回路系 : 電圧  $v_o$  と電流  $i$  との間に次の関係がある.

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

これを  $t$  で微分すると

$$\dot{v}_o = \frac{1}{C} i$$

ラプラス変換して

$$sV_o(s) = \frac{1}{C} I(s)$$

よって,  $I$  から  $V_o$  までの伝達関数は

$$\frac{V_o(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

となる.

例 1.4 (1次遅れ要素) RC回路系：電圧の平衡式から

$$Ri(t) + v_o(t) = v_i(t)$$

$v_o$  と  $i$  との間には

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

すなわち

$$i(t) = C\dot{v}_o(t)$$

という関係があり，これを用いて整理すると

$$\dot{v}_o(t) = \frac{1}{RC}(v_i(t) - v_o(t))$$

を得る．さらに，ラプラス変換すると

$$sV_o(s) = \frac{1}{RC}(V_i(s) - V_o(s))$$

よって， $V_i(s)$  から  $V_o(s)$  までの伝達関数は

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$

となる．

## 1.4 演習問題

1. 次の伝達関数を持つ系の時間領域の入出力関係を求めよ．

$$(1) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

2. 次の微分方程式で表される系の伝達関数を求めよ．

$$(1) \dot{h}(t) = \frac{1}{C}q(t) \quad \text{入力: } q \quad \text{出力: } h \quad (\text{水槽系 [11]p.19})$$

$$(2) LC\ddot{e}_o(t) + RC\dot{e}_o(t) + e_o(t) = e_i(t) \quad \text{入力: } e_i \quad \text{出力: } e_o \quad (\text{RLC回路系 [11]p.31})$$

3. 図 1.7 の 2 自由度系の伝達関数を求めよ．ただし， $m_1, m_2$  は質量， $c_1$  は粘性減衰係数， $k_1, k_2$  はばね定数， $f$  は外力， $x_1, x_2$  は変位である．入力を  $f$ ，出力を  $x_1$  とする．

4. 図 1.8 の直列結合された水槽系の伝達関数を求めよ．ただし， $q_1$  は基準流入量からの偏差， $x_1, x_2$  は平衡水位からの偏差， $C_1, C_2$  は水槽の断面積， $R_1, R_2$  は流出抵抗である．入力を  $q_1$ ，出力を  $x_2$  とする．

5. 図 1.9 の回路系の伝達関数を求めよ．入力を  $v_i$ ，出力を  $v_o$  とする．

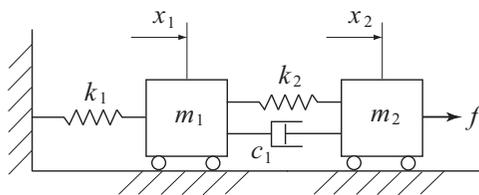


図 1.7: 2 自由度系

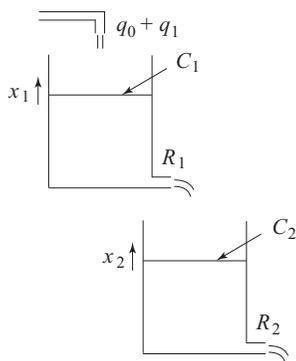


図 1.8: 直列結合された水槽系

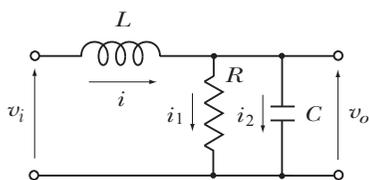


図 1.9: LRC 回路系

## 第1章の演習問題の解答

1.

$$(1) \ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u \quad (2) \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 5\dot{u} + 5u$$

2.

$$(1) \frac{H}{Q} = \frac{1}{Cs} \quad (2) \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

3.  $m_1$  と  $m_2$  について力のつりあい式を立てると

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ f - m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = c_1\dot{x}_2 + k_2x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_1\dot{x}_2 + k_2x_2 = c_1\dot{x}_1 + k_2x_1 + f \end{cases}$$

これを  $s$  領域で表すと

$$\begin{cases} (m_1s^2 + c_1s + k_1 + k_2)X_1(s) = (c_1s + k_2)X_2(s) \\ (m_2s^2 + c_1s + k_2)X_2(s) = (c_1s + k_2)X_1(s) + F(s) \end{cases}$$

となる．これを次のように表す．

$$\begin{cases} A_1X_1 = BX_2 \\ A_2X_2 = BX_1 + F \end{cases}$$

 $A_1, A_2, B$  は対応する  $s$  の多項式である．第1式に  $A_2$  を掛け，第2式を代入すると

$$A_1A_2X_1 = BA_2X_2 = B(BX_1 + F)$$

これから

$$(A_1A_2 - B^2)X_1 = BF$$

を得る．よって， $F$  から  $X_1$  までの伝達関数は

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{B}{A_1A_2 - B^2} = \frac{c_1s + k_2}{(m_1s^2 + c_1s + k_1 + k_2)(m_2s^2 + c_1s + k_2) - (c_1s + k_2)^2}$$

と求まる．

4. 流量バランスの式を立てると

$$\begin{cases} C_1\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1}x_1 + q_1 \\ C_2\dot{x}_2 = \frac{1}{R_1}x_1 - \frac{1}{R_2}x_2 \end{cases}$$

$s$  領域では

$$\begin{cases} C_1 s X_1 = -\frac{1}{R_1} X_1 + Q_1 \\ C_2 s X_2 = \frac{1}{R_1} X_1 - \frac{1}{R_2} X_2 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} (C_1 R_1 s + 1) X_1 = R_1 Q_1 \\ (C_2 R_2 s + 1) X_2 = \frac{R_2}{R_1} X_1 \end{cases}$$

これを次のように表す.

$$\begin{cases} A_1 X_1 = R_1 Q_1 \\ A_2 X_2 = \frac{R_2}{R_1} X_1 \end{cases}$$

$A_1, A_2$  は対応する  $s$  の多項式である. 第 2 式に  $A_1$  を掛けて, 第 1 式を代入すると

$$A_1 A_2 X_2 = \frac{R_2}{R_1} A_1 X_1 = \frac{R_2}{R_1} R_1 Q_1 = R_2 Q_1$$

よって,  $Q_1$  から  $X_2$  までの伝達関数は

$$\frac{X_2}{Q_1} = \frac{R_2}{A_1 A_2} = \frac{R_2}{(C_1 R_1 s + 1)(C_2 R_2 s + 1)}$$

となる.

5. 回路図から次の関係を得る.

$$v_i = L \dot{i} + v_o, \quad v_o = \frac{1}{C} \int i_2 dt = R i_1$$

$$i = i_1 + i_2$$

$s$  領域に変換すると

$$V_i = L s I + V_o, \quad V_o = \frac{I_2}{C s} = R I_1$$

$$I = I_1 + I_2$$

これらから

$$V_i = \left\{ L s \left( \frac{1}{R} + C s \right) + 1 \right\} V_o$$

よって,  $V_i$  から  $V_o$  までの伝達関数は

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{L s (1/R + C s) + 1} = \frac{R}{L s (C R s + 1) + R}$$

となる.



## 第2章 ブロック線図と等価変換

ブロック線図は、伝達関数で表される要素間の結合 (interconnection) を図式的に表すためのツール (tool) である。系をブロック線図で描くことにより、系の構造 (structure) が理解しやすくなる。また、線図の等価変換 (reduction) により線図上で結合系 (interconnected system) の伝達関数の計算を見通しよく行うことができる。ブロック線図とその等価変換は「システムと制御入門」[11] 第7, 8章で詳しく見たところである。ここでは、メイソンのゲイン公式 (Mason's gain formula) を用いて、結合系の伝達関数を求める方法を紹介する。

### 2.1 ブロック線図の構成要素と基本的な等価変換

ブロック線図は次の構成要素を持つ。

1. 矢印 (arrow) : 信号 (signal) を表す。
2. ブロック (block) : 系 (system) (要素 (element)) を表す。ブロックの中には伝達関数を書く。
3. 加え合わせ点 (summing point) : 信号の加算, 減算を行う。
4. 引き出し点 (take-off point) : 信号を複製する。

基本的な等価変換は次のとおりである。

1. 直列結合 (series connection)
2. 並列結合 (parallel connection)
3. フィードバック結合 (feedback connection)

### 2.2 メイソンのゲイン公式

ブロック線図は信号間の連立一次方程式 (system of linear equations) に相当する関係を表す。メイソンのゲイン公式は、入力から出力までの伝達関数を求める公式であり、ブロック線図が表す連立一次方程式の解を与える公式と解釈できる。メイソンのゲイン公式によれば、結合系の伝達関数を効率的に計算することができる。

メイソンのゲイン公式

$$G(s) = \frac{Y_{out}}{Y_{in}} = \frac{1}{\Delta} (F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2 + \cdots + F_N \Delta_N) \quad (2.1)$$

ただし

$Y_{in}$ : 入力,  $Y_{out}$ : 出力

$N$ :  $Y_{in}$  から  $Y_{out}$  までの前向き経路 (forward path) の数

$F_k$ :  $k$  番目の前向き経路の伝達関数

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{1i} + \sum_j L_{2j} - \sum_k L_{3k} + \cdots$$

$L_{1i}$ : ループ伝達関数 (loop transfer function)  
(ループ (loop) を構成している部分の一巡伝達関数)

$L_{2j}$ : 二つの非接触ループ伝達関数の積 (product)

$L_{3k}$ : 三つの非接触ループ伝達関数の積

$\Delta_k$ :  $\Delta$  で  $k$  番目の前向き経路に接触する  $L_{1i}$  を除いて計算したもの

$\Delta$  を計算するとき,  $\sum$  はすべての組み合わせ (combination) について和を計算するという意味である. では, [11] で扱ったブロック線図にメイソンのゲイン公式を適用してみよう.

**例題 2.1** 図 2.1 のブロック線図 ([11]p.70) の  $U$  から  $Y$  までの伝達関数を求めよ.

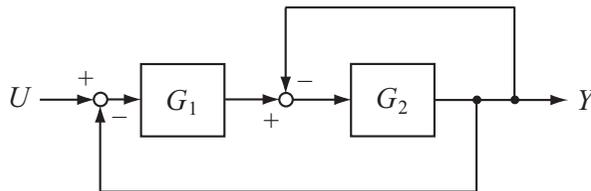


図 2.1: 例題 2.1 のブロック線図

[解]  $U$  から  $Y$  までの前向き経路は一つである.

$$F_1 = G_1 G_2$$

ループは二つあり, これらのループ伝達関数は

$$L_{11} = -G_1 G_2, \quad L_{12} = -G_2$$

これから

$$\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} = 1 + G_1 G_2 + G_2$$

これらのループは二つとも前向き経路 1 に接触しているので、 $\Delta_1$  を計算するとき、上式で  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  を除外する。よって

$$\Delta_1 = 1$$

以上から、求める伝達関数は次式となる。

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{F_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_2}$$

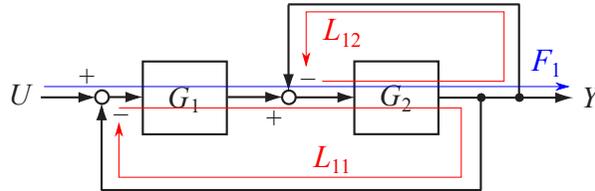


図 2.2: 例題 2.1 のブロック線図

例題 2.2 図 2.3 のブロック線図 ([11]p.72) の  $U$  から  $Y$  までの伝達関数を求めよ。

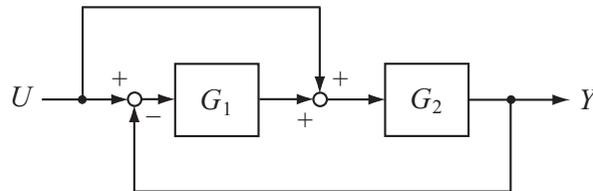


図 2.3: 例題 2.2 のブロック線図

[解] 前向き経路は二つあり、次の伝達関数を持つ。

$$F_1 = G_1 G_2, \quad F_2 = G_2$$

ループは一つあり、そのループ伝達関数は

$$L_{11} = -G_1 G_2$$

よって

$$\Delta = 1 - L_{11} = 1 + G_1 G_2$$

また、このループは経路 1, 2 とも接触しているので、これを除外して  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  を計算すると

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1$$

以上から、求める伝達関数は次式となる。

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 + G_2}{1 + G_1 G_2} = \frac{(G_1 + 1) G_2}{1 + G_1 G_2}$$

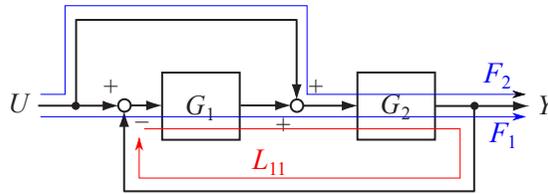


図 2.4: 例題 2.2 のブロック線図

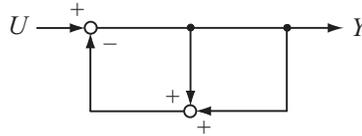


図 2.5: 例題 2.3 のブロック線図

例題 2.3 図 2.5 のブロック線図 ([11]p.73) の  $U$  から  $Y$  までの伝達関数を求めよ.

[解] 前向き経路は一つあり, 伝達関数は次式である.

$$F_1 = 1$$

ループは次の二つがある.

$$L_{11} = -1, \quad L_{12} = -1$$

したがって

$$\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} = 3$$

二つのループは前向き経路に接触するので

$$\Delta_1 = 1$$

よって

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{F_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{3}$$

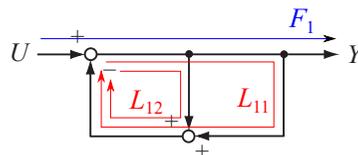


図 2.6: 例題 2.3 のブロック線図

例題 2.4 図 2.7 のブロック線図 ([11]p.74) の  $U$  から  $Y$  までの伝達関数を求めよ.

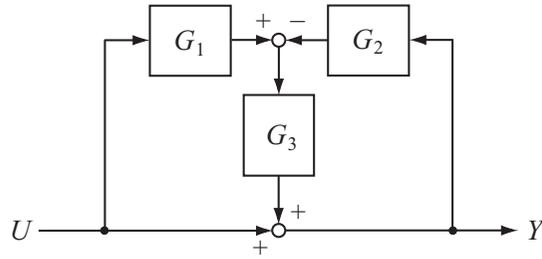


図 2.7: 例題 2.4 のブロック線図

[解] 前向き経路は二つあり，次の伝達関数を持つ．

$$F_1 = 1, \quad F_2 = G_1 G_3$$

ループは一つあり，そのループ伝達関数は

$$L_{11} = -G_2 G_3$$

よって

$$\Delta = 1 - L_{11} = 1 + G_2 G_3$$

また，このループは経路 1, 2 とも接触しているので，これを除外して  $\Delta_1, \Delta_2$  を計算すると

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1$$

以上から，求める伝達関数は次式となる．

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{1 + G_1 G_3}{1 + G_2 G_3}$$

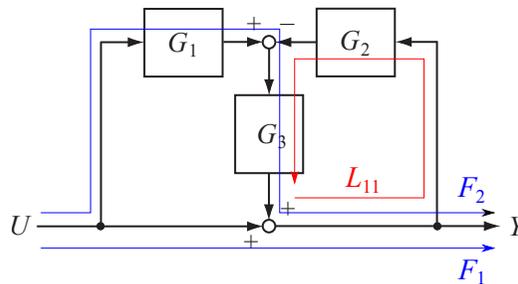


図 2.8: 例題 2.4 のブロック線図

例題 2.5 図 2.9 のブロック線図 ([11]p.79) の  $E_i$  から  $E_o$  までの伝達関数を求めよ．

[解] 前向き経路は一つあり，次の伝達関数を持つ．

$$F_1 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

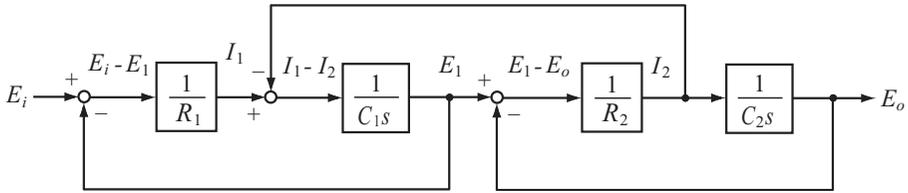


図 2.9: 例題 2.5 のブロック線図

ループは三つあり，それらのループ伝達関数は

$$L_{11} = -\frac{1}{R_1 C_1 s}, \quad L_{12} = -\frac{1}{R_2 C_2 s}, \quad L_{13} = -\frac{1}{R_2 C_1 s}$$

非接触のループが二組あり，それらの積は

$$L_{21} = L_{11} L_{12} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

よって

$$\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} - L_{13} + L_{21} = 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

また，三つのループは経路 1 と接触しているので，これらを除外して  $\Delta_1$  を計算すると

$$\Delta_1 = 1$$

以上から，求める伝達関数は次式となる．

$$\begin{aligned} G &= \frac{E_o}{E_i} = \frac{F_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}}{1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}} \\ &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + R_1 C_1 s + R_1 C_2 s + 1} \end{aligned}$$

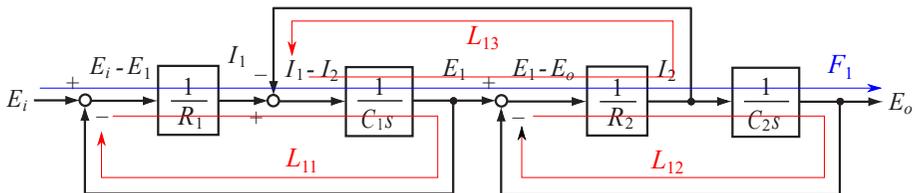


図 2.10: 例題 2.5 のブロック線図

**例題 2.6** 図 2.11 のブロック線図 ([11]p.80) の  $E_i$  から  $E_o$  までの伝達関数を求めよ．

[解] 前向き経路は三つあり，次の伝達関数を持つ．

$$F_1 = \frac{1}{R_1 C_2 s}, \quad F_2 = R_2 C_1 s, \quad F_3 = \frac{R_2}{R_1}$$

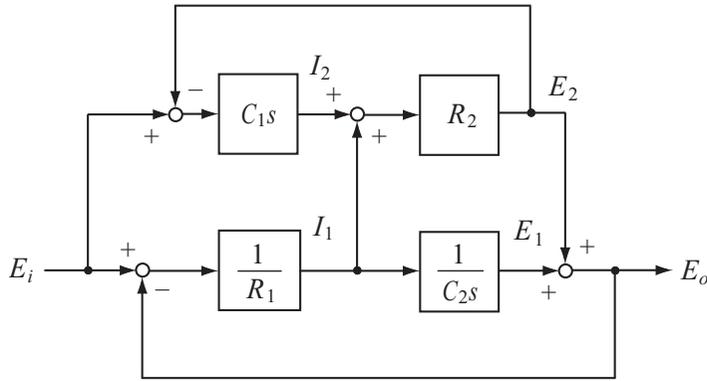


図 2.11: 例題 2.6 のブロック線図

ループは三つあり，それらのループ伝達関数は

$$L_{11} = -\frac{1}{R_1 C_2 s}, \quad L_{12} = -R_2 C_1 s, \quad L_{13} = -\frac{R_2}{R_1}$$

非接触のループが一組あり，それらの積は

$$L_{21} = L_{11} L_{12} = \frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}$$

よって

$$\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} - L_{13} + L_{21} = 1 + \frac{1}{R_1 C_2 s} + R_2 C_1 s + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}$$

また，経路 1 はループ 1, 3 と接触しているので，これらを除外して  $\Delta_1$  を計算すると

$$\Delta_1 = 1 - L_{12} = 1 + R_2 C_1 s$$

経路 2, 3 はループ 1, 2, 3 と接触しているので，これらを除外して  $\Delta_2, \Delta_3$  を計算すると

$$\Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 1$$

以上から，求める伝達関数は次式となる．

$$\begin{aligned} G &= \frac{E_o}{E_i} = \frac{F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2 + F_3 \Delta_3}{\Delta} = \frac{\frac{1}{R_1 C_2 s} (1 + R_2 C_1 s) + R_2 C_1 s + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{R_1 C_2 s} + R_2 C_1 s + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} \\ &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_2 C_1 s + R_2 C_2 s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_1 C_2 s + R_2 C_2 s + R_2 C_1 s + 1} \end{aligned}$$

## 2.3 演習問題

- 以下のブロック線図の  $U$  から  $Y$  までの伝達関数をメイソンのゲイン公式を用いて求めよ．



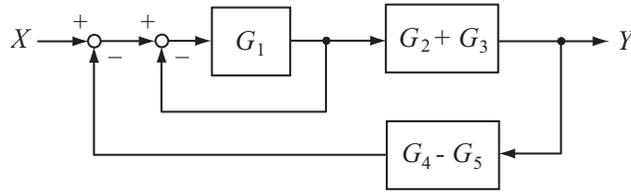


図 2.18: (6) のブロック線図

以上から

$$G = \frac{F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 - G_3}{1 + G_1 G_2}$$

(2) 前向き経路の伝達関数  $F_1 = G_1$ ,  $F_2 = G_3$ , ループ伝達関数  $L_{11} = -G_1 G_2$ ,  $L_{12} = -G_1$ ,  $L_{13} = -G_2 G_3$ ,  $\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} - L_{13} = 1 + G_1 G_2 + G_1 + G_2 G_3$ ,  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 1$ .

以上から

$$G = \frac{F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_3}{1 + G_1 G_2 + G_1 + G_2 G_3}$$

(3) 前向き経路の伝達関数  $F_1 = G_1 G_2$ , ループ伝達関数  $L_{11} = -G_1 G_2 G_3 G_4$ ,  $L_{12} = -G_1 G_3$ ,  $\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} = 1 + G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_3$ ,  $\Delta_1 = 1$ .

以上から

$$G = \frac{F_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_3}$$

(4) 前向き経路の伝達関数  $F_1 = G_1$ ,  $F_2 = G_3$ , ループ伝達関数  $L_{11} = -G_1 G_2$ ,  $L_{12} = -G_1 G_2$ ,  $L_{13} = -G_2 G_3$ ,  $\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} - L_{13} = 1 + 2G_1 G_2 + G_2 G_3$ ,  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 1$ .

以上から

$$G = \frac{F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_3}{1 + 2G_1 G_2 + G_2 G_3}$$

(5) 前向き経路の伝達関数

$$F_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$$

ループ伝達関数

$$L_{11} = -G_2 G_3, \quad L_{12} = -G_3 G_4$$

よって

$$\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} = 1 + G_2 G_3 + G_3 G_4, \quad \Delta_1 = 1$$

以上から

$$G = \frac{F_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 + G_3 G_4}$$

(6) 前向き経路の伝達関数

$$F_1 = G_1(G_2 + G_3)$$

ループ伝達関数

$$L_{11} = -G_1, \quad L_{12} = -G_1(G_2 + G_3)(G_4 - G_5)$$

よって

$$\Delta = 1 - L_{11} - L_{12} = 1 + G_1 + G_1(G_2 + G_3)(G_4 - G_5), \quad \Delta_1 = 1$$

以上から

$$G = \frac{F_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{1 + G_1 + G_1(G_2 + G_3)(G_4 - G_5)}$$

## 第3章 過渡応答

系の出力  $y(t)$  を応答 (time response) という。応答には定常状態に達するまでの過渡応答 (transient response) と定常状態での定常応答 (steady-state response) がある。

また、応答には初期値による応答である初期値応答 (free response to initial condition) と入力による応答の強制応答 (forced response) がある。応答は、系の微分方程式の解を求めることによって得られる。微分方程式の解法の便利な道具としてラプラス変換 (Laplace transform) が利用できることはすでに見たとおりである。

ここでいう過渡応答とは、テスト信号 (test signal) と呼ばれる入力に対する強制応答を示す。テスト信号には、インパルス関数 (impulse function)、ステップ関数 (step function)、ランプ関数 (ramp function) などがある。今週は、これらに対する強制応答、すなわち、インパルス応答 (impulse response)、ステップ応答 (step response)、ランプ応答 (ramp response) の計算法を学習する。

### 3.1 強制応答の求め方

強制応答は、初期値 (initial value) の影響を 0 としたときの、入力に対する応答である。一方、伝達関数  $G(s)$  は、「すべての初期値を 0 としたときの入力と出力のラプラス変換の比 (ratio)」と定義される。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

よって、これから得られる  $Y(s)$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

は強制応答のラプラス変換である。強制応答  $y(t)$  は上式を逆ラプラス変換して得られる。

強制応答の計算式

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \quad (3.1)$$

### 3.2 インパルス関数、ステップ関数、ランプ関数

入力のテスト信号として次のインパルス関数 (図 3.1)、ステップ関数 (図 3.2)、ランプ関数 (図 3.3) が使われる。

$$u(t) = \delta(t), \quad u(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \quad u(t) = t\mathbf{1}(t) \quad (3.2)$$

これらの関数のラプラス変換はそれぞれ次式となる.

$$U(s) = 1, \quad U(s) = \frac{1}{s}, \quad U(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3.3)$$

これらがテスト信号として使われる理由は次のとおりである.

1. 過渡応答が計算しやすい. 特にインパルス関数の場合.
2. 過渡応答が系の特徴を表す.
3. 特にステップ関数の場合, 実現しやすい.

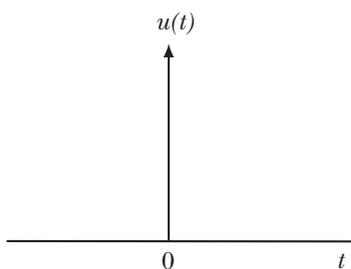


図 3.1: インパルス関数

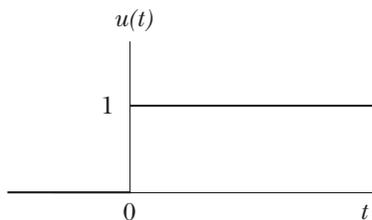


図 3.2: ステップ関数

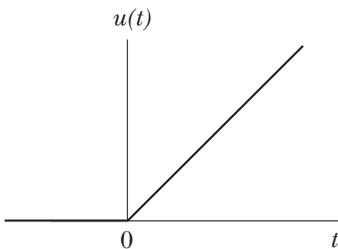


図 3.3: ランプ関数

### 3.3 インパルス応答, ステップ応答, ランプ応答

インパルス応答, ステップ応答, ランプ応答はそれぞれ次式で計算できる.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right], \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s^2}\right] \quad (3.4)$$

一般的な伝達関数を次式で表す.

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \quad m < n \quad (3.5)$$

$p_i$  は極 (pole),  $z_i$  は零点 (zero) と呼ばれる. これらは一般に複素数 (complex number) である. 簡単のため,  $G(s)U(s)$  は重複極 (multiple pole) を持たないとする. このとき, インパルス応答は次のように計算される.

$U(s) = 1$  に対する  $Y(s)$  を部分分数展開 (partial fraction expansion) し

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

これを逆ラプラス変換すると, インパルス応答が次式で得られる.

$$y(t) = (K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}) \mathbf{1}(t)$$

インパルス応答は伝達関数の逆ラプラス変換であることに注意する.

極  $p_i$  によって決まる関数  $e^{p_i t}$  をモード (mode) という. 上式からインパルス応答は系のすべてのモードを含むことがわかる. すなわち, インパルス応答から系の特徴 (系が振動的か非振動的か (oscillatory or nonoscillatory), 応答が速いか遅いか (fast or slow), 安定か不安定か (stable or unstable) など) がわかる.

時間の経過とともに系のモードがすべて 0 に収束するとき, 系は安定であるという. したがって, 系の安定性条件は

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

となる. 特にインパルス応答と安定性との関係について次がいえる.

#### インパルス応答と系の安定性

インパルス応答が 0 に収束することと系の安定性は同値である.

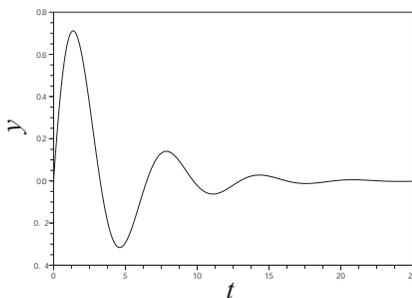


図 3.4: インパルス応答 (安定)

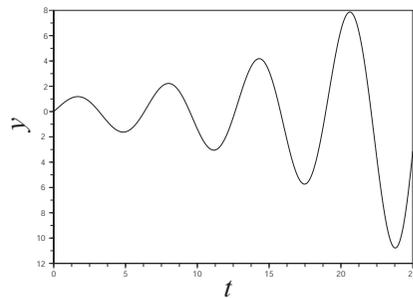


図 3.5: インパルス応答 (不安定)

次に, (3.5) 式の  $G(s)$  のステップ応答を計算しよう.

同様に,  $U(s) = 1/s$  に対する  $Y(s)$  を部分分数展開すると

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

これを逆ラプラス変換してステップ応答が得られる.

$$y(t) = (K_0 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}) \mathbf{1}(t)$$

$K_0$  の定数項が現れるが, ステップ応答もインパルス応答と同様に系のすべてのモードを含んでいる. よって, ステップ応答から系の性質を把握することができる. 特に, ステップ応答と安定性との関係について次がいえる.

#### ステップ応答と系の安定性

ステップ応答が一定値に収束することと系の安定性は同値である.

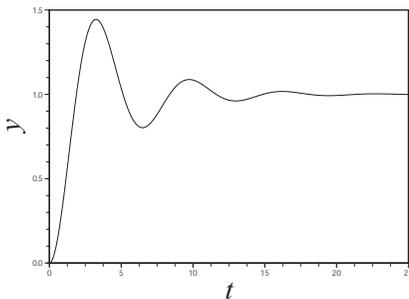


図 3.6: ステップ応答 (安定)

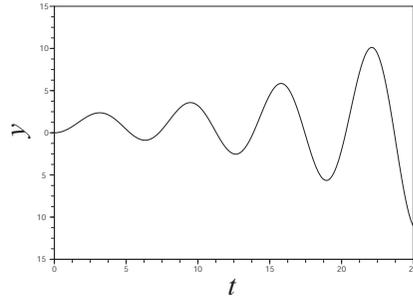


図 3.7: ステップ応答 (不安定)

### 3.4 モードの形

伝達関数の極  $p_i$  を

$$p_i = \sigma + j\omega$$

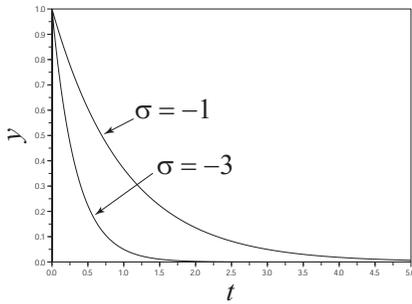
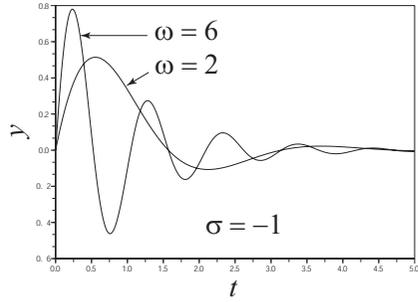
と表す.  $j$  は虚数単位  $\sqrt{-1}$  である. このとき,  $e^{p_i t}$  はオイラーの公式 (Euler's formula) を用いると

$$e^{p_i t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

と表される.  $y(t)$  の計算では, 共役な複素数が現れるので虚数部が消え, 次の関数が残る.

$$e^{\sigma t} (\omega = 0 \text{ の場合}), e^{\sigma t} \cos \omega t, e^{\sigma t} \sin \omega t$$

これらの関数の例を図 3.8, 3.9 に示す.

図 3.8:  $e^{\sigma t}$  のグラフ図 3.9:  $e^{\sigma t} \sin \omega t$  のグラフ

**例題 3.1** 次の伝達関数の極とインパルス応答を計算せよ.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

[解] 極は

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -2$$

である. インパルス応答は次の  $Y(s)$  を逆ラプラス変換して得られる.

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

展開公式から

$$K_1 = (s+1)Y(s)|_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_2 = (s+2)Y(s)|_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

よって,  $Y(s)$  は

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

これから

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{1}(t)$$

を得る.

**例題 3.2** 次の伝達関数のステップ応答を計算せよ.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

[解] ステップ応答は次の  $Y(s)$  を逆ラプラス変換して得られる.

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

展開公式から

$$K_0 = sY(s)|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_1 = (s+1)Y(s)|_{s=-1} = \frac{1}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_2 = (s+2)Y(s)|_{s=-2} = \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

よって

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}$$

これから

$$y(t) = \left( \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) \mathbf{1}(t)$$

を得る.

### 3.5 1次遅れ要素の過渡応答

伝達関数は次式である.  $T$  を時定数という.

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

インパルス応答は次のように計算できる.

$$Y(s) = G(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{T} \frac{1}{s+1/T}$$

よって

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t) \tag{3.7}$$

ステップ応答は次のように計算できる.

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{Ts+1}$$

展開公式から  $K_1, K_2$  を求めると

$$K_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{1}{Ts+1} \Big|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = (Ts+1)Y(s)|_{s=-1/T} = \frac{1}{s} \Big|_{s=-1/T} = -T$$

よって

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}$$

これを逆ラプラス変換して

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \mathbf{1}(t) \quad (3.8)$$

ランプ応答は次のように計算できる.

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(Ts + 1)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{Ts + 1}$$

展開係数を求めると

$$K_{12} = s^2 Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{Ts + 1} \Big|_{s=0} = 1$$

$$K_{11} = \frac{d}{ds} \left\{ s^2 Y(s) \right\} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{Ts + 1} \right\} \Big|_{s=0} = \frac{-T}{(Ts + 1)^2} \Big|_{s=0} = -T$$

$$K_2 = (Ts + 1) Y(s) \Big|_{s=-1/T} = \frac{1}{s^2} \Big|_{s=-1/T} = T^2$$

よって

$$Y(s) = -\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T^2}{Ts + 1} = -\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T}{s + 1/T}$$

これを逆ラプラス変換すると

$$y(t) = \left(-T + t + Te^{-\frac{t}{T}}\right) \mathbf{1}(t) \quad (3.9)$$

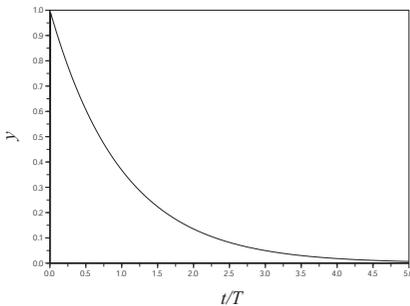


図 3.10: 1次遅れ要素のインパルス応答

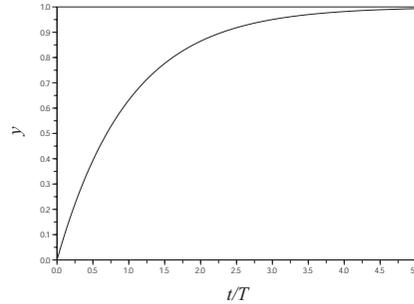


図 3.11: 1次遅れ要素のステップ応答

例 3.1 1次遅れ要素のステップ応答から次がいえる.

$$(1) y(T) \simeq 0.632 \quad (2) \frac{dy(0)}{dt} = \frac{1}{T}$$

すなわち, (1) は  $t = T$  におけるステップ応答  $y(t)$  が最終値  $y(\infty) = 1$  の 63.2% となることを, (2) は  $t = 0$  のステップ応答の接線の傾きが  $1/T$  であることを意味する.

例 3.2 1次遅れ要素のランプ応答から次がいえる.

「ランプ応答の漸近線の時間軸との交点は  $T$  である。」

漸近線の方程式は, (3.9) 式の指数関数の項を 0 とおくことによって

$$y = t - T$$

と求まる. よって, 漸近線は  $t = T$  で時間軸と交わる.

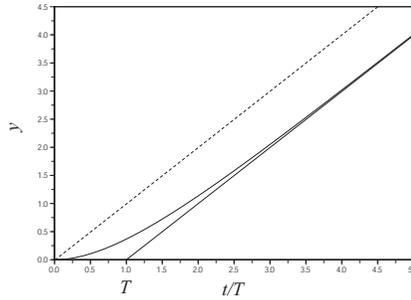


図 3.12: 1次遅れ要素のランプ応答

### 3.6 2次要素の過渡応答

2次要素の過渡応答の求め方を具体例で説明しよう。

**例題 3.3** 次の2次要素のインパルス応答を求めよ。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

[解] ラプラス変換表を適用できるように変形する。

$$Y(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} \frac{\sqrt{0.75}}{(\frac{s+0.5}{\sqrt{0.75}})^2 + 0.75}$$

これを逆ラプラス変換すると

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75} t \cdot \mathbf{1}(t)$$

または

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \cdot \mathbf{1}(t)$$

**例題 3.4** 次の2次要素のステップ応答を求めよ。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

[解]

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + s + 1}$$

分子の恒等式から

$$K_1(s^2 + s + 1) + (K_2 s + K_3)s = 1$$

すなわち

$$(K_1 + K_2)s^2 + (K_1 + K_3)s + K_1 = 1$$

両辺の係数の比較から

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -1, \quad K_3 = -1$$

がわかる。よって

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

第2項を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^2+s+1} &= \frac{(s+0.5)+0.5}{(s+0.5)^2+0.75} \\ &= \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.75} + \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} \cdot \frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2+0.75} \end{aligned}$$

以上から

$$y(t) = \left\{ 1 - e^{-0.5t} \left( \cos \sqrt{0.75}t + \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} \sin \sqrt{0.75}t \right) \right\} \mathbf{1}(t)$$

または

$$y(t) = \left\{ 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right\} \mathbf{1}(t)$$

標準の2次要素

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

のインパルス応答とステップ応答を図 3.13, 3.14 に示す。この場合も上記と同様の方法でインパルス応答とステップ応答の表現を求めることができる。これらについてはテキストを参照されたい。

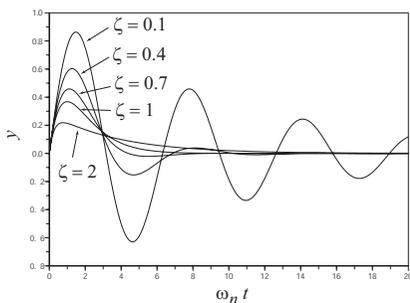


図 3.13: 2次要素のインパルス応答

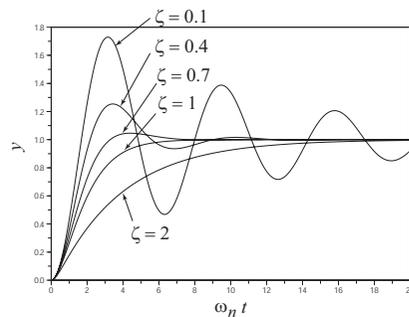


図 3.14: 2次要素のステップ応答

### 3.7 演習問題

1. 例題4 (2重直列結合された水槽系) の伝達関数

$$G(s) = \frac{R_2}{(C_1 R_1 s + 1)(C_2 R_2 s + 1)}$$

の(1) 極, (2) インパルス応答を求めよ. ただし

$$C_1 R_1 = 1, \quad C_2 R_2 = 2, \quad R_2 = 0.1$$

とする.

2. 例題5 (LRC回路系) の伝達関数

$$G(s) = \frac{R}{Ls(CRs + 1) + R}$$

の(1) 極, (2) ステップ応答を求めよ. ただし

$$R = 1, \quad L = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{4}$$

とする.

3. 次の伝達関数  $G(s)$  のステップ応答を求めよ.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)}$$

### 第3章の演習問題の解答

1. 伝達関数は

$$G(s) = \frac{0.1}{(s+1)(2s+1)}$$

$$(1) p_1 = -1, p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$(2) Y(s) = G(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{2s+1}$$

$$K_1 = (s+1)Y(s)|_{s=-1} = \frac{0.1}{2s+1} \Big|_{s=-1} = -0.1$$

$$K_2 = (2s+1)Y(s)|_{s=-1/2} = \frac{0.1}{s+1} \Big|_{s=-1/2} = 0.2$$

よって

$$Y(s) = -\frac{0.1}{s+1} + \frac{0.2}{2s+1} = -\frac{0.1}{s+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{0.2}{s+1/2} \right)$$

$$y(t) = 0.1 \left( -e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}} \right) \mathbf{1}(t)$$

2. 伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{5}s \left( \frac{1}{4}s + 1 \right) + 1} = \frac{1}{\frac{1}{20}s^2 + \frac{1}{5}s + 1} = \frac{20}{s^2 + 4s + 20}$$

$$(1) p_{1,2} = -2 \pm j4$$

$$(2) Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{20}{s(s^2 + 4s + 20)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 4s + 20}$$

分子の恒等式から展開係数を求める.

$$K_1(s^2 + 4s + 20) + (K_2s + K_3)s = (K_1 + K_2)s^2 + (4K_1 + K_3)s + 20K_1 = 20$$

これから

$$K_1 = 1, K_2 = -1, K_3 = -4$$

よって

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2 + 4s + 20} = \frac{1}{s} - \frac{(s+2) + \frac{1}{2} \cdot 4}{(s+2)^2 + 4^2}$$

$$y(t) = \left\{ 1 - e^{-2t} \left( \cos 4t + \frac{1}{2} \sin 4t \right) \right\} \mathbf{1}(t)$$

3.

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{(s+1)^3} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{23} = (s+1)^3 Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} (s+1)^3 Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{-(2s+2)}{(s^2+2s)^2} \Big|_{s=-1} = 0$$

$$K_{21} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{-2(s^2+2s)^2 + (2s+2)2(s^2+2s)(2s+2)}{(s^2+2s)^4} \right) \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_3 = (s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s(s+1)^3} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

よって

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$y(t) = \left( \frac{1}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) \mathbf{1}(t)$$

## 第4章 周波数応答

周波数応答 (frequency response) とは、正弦波入力 (sine wave input) に対する定常応答である。線形系の周波数応答は入力と同じ周波数を持つ正弦波となるが、一般に、入出力間の振幅比 (amplitude ratio) (ゲイン (gain)) と位相差 (phase shift) (位相 (phase)) は周波数に依存して変化する。各周波数に対するゲインと位相を周波数特性 (frequency characteristics) という。周波数特性は伝達関数から計算でき、系の解析や制御系の設計に利用される。ここでは周波数応答の計算法およびグラフ表示法について説明する。

### 4.1 周波数応答の計算法

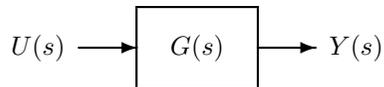


図 4.1: 線形系

図 4.1 の線形系は、角周波数  $\omega$  の正弦波入力

$$u(t) = \sin \omega t$$

に対して次の形の定常応答解を持つ。

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

系が安定なとき定常解は安定 (応答が定常応答に収束する) となり、系が不安定なとき、定常解は不安定 (応答が定常応答に収束しない) となる。上式で  $\sin$  を  $\cos$  で置き換えてもよい。このことを以下に示す。

いま、次の系を考えよう。

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (4.1)$$

正弦波入力として

$$u = e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

を考え、これに対する定常解 (特解) を

$$y = A e^{j(\omega t + \phi)} \quad (4.3)$$

と仮定する。(4.2), (4.3) 式を (4.1) 式に代入すると

$$\{(j\omega)^2 + a_1j\omega + a_0\}Ae^{j(\omega t + \phi)} = (b_1j\omega + b_0)e^{j\omega t}$$

よって

$$Ae^{j\phi} = \frac{b_1j\omega + b_0}{(j\omega)^2 + a_1j\omega + a_0}$$

右辺は伝達関数の  $s$  に  $j\omega$  を代入した関数となっている。以上から、一般に、次式が成り立つ。

$$Ae^{j\phi} = G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega) \quad (4.4)$$

すなわち、ゲインと位相は伝達関数で  $s = j\omega$  とした複素数の絶対値 (magnitude) と偏角 (argument) によってそれぞれ表される。 $G(j\omega)$  は周波数伝達関数 (sinusoidal transfer function) と呼ばれる<sup>1</sup>。

ゲインと位相の計算式 角周波数  $\omega$  のゲインと位相はそれぞれ次式で計算できる。

$$\text{ゲイン } A = |G(j\omega)| \quad (4.5)$$

$$\text{位相 } \phi = \angle G(j\omega) \quad (4.6)$$

**例題 4.1** 次の伝達関数のゲインと位相を求めよ。

$$G(s) = s$$

[解]

$$G(j\omega) = j\omega$$

から

$$|G(j\omega)| = \omega, \quad \angle G(j\omega) = 90^\circ$$

**例題 4.2** 次の伝達関数のゲインと位相を求めよ。

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

[解]

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

<sup>1</sup>ゲインと位相の計算式は不安定な  $G(s)$  に対しても有効である。不安定な  $G(s)$  に対する周波数応答を実験的に求めるには、 $G(s)$  を安定化するフィードバック系を構成し、フィードバック系の入力として  $\sin \omega t$  を与える。応答が定常的になったとき、フィードバック系の内部信号も同じ周波数  $\omega$  の正弦波信号となるので、 $G(s)$  の入力と出力から (これらも周波数  $\omega$  の正弦波になっている) ゲインと位相を計算できる。

よって

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\text{Im}(1+j\omega)}{\text{Re}(1+j\omega)} = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1}$$

偏角を表すとき、 $\tan^{-1} \omega$  よりも  $\tan^{-1} \omega/1$  と書く方が良い。というのは、前者は、考えている複素数が複素平面の第1象限か第3象限か区別がつかないが、後者は、第1象限に絞られるからである。

ゲインと位相を  $\omega$  の関数として表すとき、これらをそれぞれゲイン特性 (gain characteristic)、位相特性 (phase characteristic) という。また、両者を合わせて周波数特性という。  $G(j\omega)$  を  $\omega = 0 \sim \infty$  に対して複素平面に描いた図をベクトル軌跡 (vector locus) またはナイキスト線図 (Nyquist diagram) という。

**例題 4.3** 例題 4.2 の伝達関数のベクトル軌跡を描け。

[解] 表 4.1 の計算結果から図 4.2 を得る (一般に、正確な周波数応答特性のグラフを描くには計算機で計算するしかない)。  $\text{Re}G(j\omega)$ 、 $\text{Im}G(j\omega)$  は次式で計算できる。

$$\text{Re}G(j\omega) = |G(j\omega)| \cos \angle G(j\omega)$$

$$\text{Im}G(j\omega) = |G(j\omega)| \sin \angle G(j\omega)$$

表 4.1: 周波数特性の計算表

$\omega$	$\text{Re } G(j\omega)$	$\text{Im } G(j\omega)$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	1	0	1	$0^\circ$
0.1	0.990	-0.1	0.995	$-5.7^\circ$
0.3	0.917	-0.275	0.958	$-16.7^\circ$
0.6	0.735	-0.441	0.857	$-31.0^\circ$
1.6	0.281	-0.449	0.530	$-58.0^\circ$
3	0.1	-0.3	0.316	$-71.6^\circ$
10	0.01	-0.1	0.1	$-84.3^\circ$

1 次の伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

のベクトル軌跡は半円 (half circle) となることに注意する。このことは次のように示せる。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{a(1+j\omega T) + b(1-j\omega T)}{1+j\omega T}$$

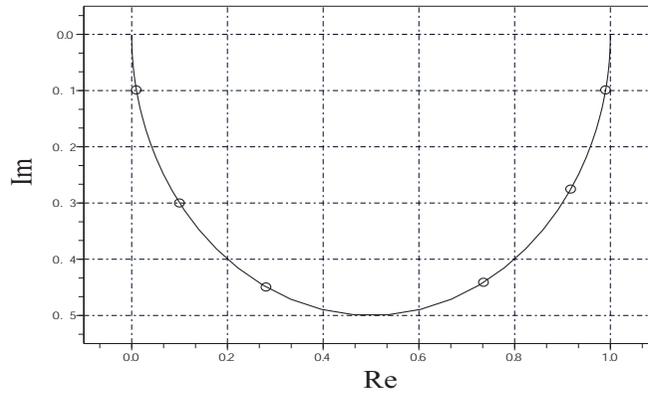


図 4.2: 例題 4.3 のベクトル軌跡

と変形すれば，分子の比較から

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

これから

$$a = b = \frac{1}{2}$$

を得る．よって

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} \right)$$

となる．ここで

$$\left| \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} \right| = \frac{|1 - j\omega T|}{|1 + j\omega T|} = 1$$

なので， $G(j\omega)$  の軌跡は

$$\text{中心} = \left( \frac{1}{2}, 0 \right), \text{半径} = \frac{1}{2}$$

の円上にあることがわかる．

## 4.2 伝達関数の積と商の周波数特性

複素数の計算規則から，伝達関数の積と商のゲインと位相に関して次がわかる．

ゲインと位相の計算式 (積)

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

のゲインと位相はそれぞれ次式で計算できる.

$$\text{ゲイン} \quad |G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)| \quad (4.7)$$

$$\text{位相} \quad \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \quad (4.8)$$

ゲインと位相の計算式 (商)

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{G_2(s)}$$

のゲインと位相はそれぞれ次式で計算できる.

$$\text{ゲイン} \quad |G(j\omega)| = \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} \quad (4.9)$$

$$\text{位相} \quad \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) - \angle G_2(j\omega) \quad (4.10)$$

例題 4.4 次の伝達関数のゲインと位相を計算せよ.

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \quad K > 0$$

[解]

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

よって, ゲインと位相は

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{K}{|1 + j\omega T_1||1 + j\omega T_2|} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}} \end{aligned}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle K - \angle(1 + j\omega T_1) - \angle(1 + j\omega T_2) = -\tan^{-1} \frac{\omega T_1}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T_2}{1}$$

例題 4.5 次の伝達関数のゲインと位相を計算せよ.

$$G(s) = \frac{1 + T_2s}{1 + T_1s} \quad (4.11)$$

[解]

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1}$$

よって、ゲインと位相は

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1} \right| = \frac{|1 + j\omega T_2|}{|1 + j\omega T_1|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{1 + \omega^2 T_1^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_2) - \angle(1 + j\omega T_1) = \tan^{-1} \frac{\omega T_2}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T_1}{1}$$

(4.11) 式のベクトル軌跡は円上にあることに注意する。このことは次のように示せる。

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1} = \frac{a(1 + j\omega T_1) + b(1 - j\omega T_1)}{1 + j\omega T_1}$$

と変形すれば、分子の比較から

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ (a - b)T_1 & = T_2 \end{cases}$$

これから

$$a = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{T_2}{T_1} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

よって、 $G(j\omega)$  は次式で表される。

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \frac{1 - j\omega T_1}{1 + j\omega T_1}$$

上式から、 $G(j\omega)$  の軌跡は

$$\text{中心} = (a, 0), \quad \text{半径} = |b|$$

の円上にあることがわかる。 $T_2 > T_1$  のとき、 $\angle G(j\omega) \geq 0$  となり、ベクトル軌跡は実軸から上の半円となる（制御系の設計で位相進み補償器 (phase-lead compensator) として利用される）。 $T_2 < T_1$  のとき、 $\angle G(j\omega) \leq 0$  となり、ベクトル軌跡は実軸から下の半円となる（制御系の設計で位相遅れ補償器 (phase-lag compensator) として利用される）。また、始点 (starting point) と終点 (ending point) は次式で求まる。

$$G(j0) = 1, \quad G(j\infty) = \frac{T_2}{T_1}$$

例題 4.6 次の伝達関数について、 $\omega = 5$  [rad/s] における位相を  $30^\circ$  とする  $T_2$  を設計せよ。

$$G(s) = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s}, \quad T_1 = \frac{1}{5} \text{ [s]}$$

[解] 位相の計算式は

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T_2}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T_1}{1} = \tan^{-1} \frac{5T_2}{1} - \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1} \frac{5T_2}{1} - 45^\circ = 30^\circ$$

これから

$$T_2 = \frac{\tan 75^\circ}{5} = 0.7464 \text{ [s]}$$

を得る. この結果を確認するため, 入力  $u = \sin 5t$  に対する強制応答  $y/|G(j5)|$  を図 4.3 に示す. 両振幅を一致させるため, 出力をゲイン  $|G(j5)|$  で割っている. ゲインは

$$|G(j5)| = 2.732$$

である. 出力の位相が入力に対して  $30^\circ$  進んでいるのがわかる.

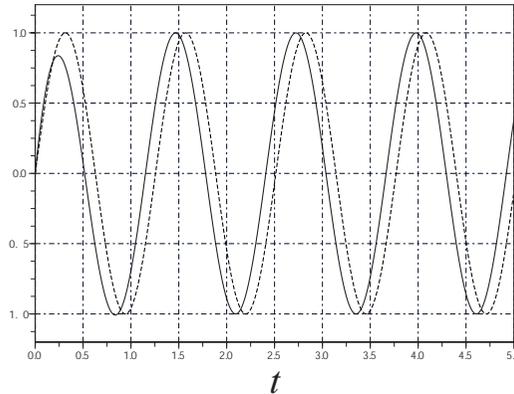


図 4.3: 例題 4.6 の入力  $u = \sin 5t$  (破線 (broken line)) と出力  $y/|G(j5)|$  (実線 (solid line))

**例題 4.7** 次の 2 次要素に対するゲインと位相を計算せよ.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

[解]

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

ここで

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

とおくと

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega}$$

よって, ゲインと位相は

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2}$$

$\zeta = 0.3, 0.5, 1, 2$  に対する 2 次要素のベクトル軌跡を図 4.4 に示す.

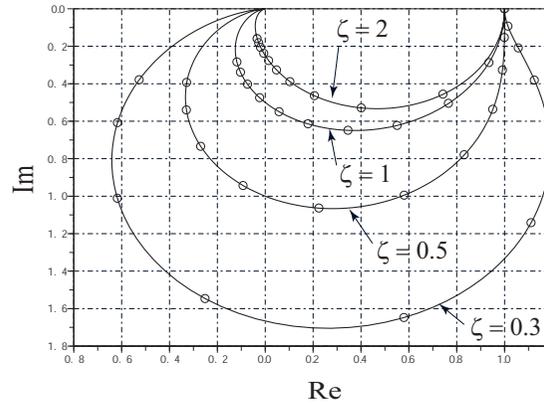


図 4.4: 例題 4.7 のベクトル軌跡 ( $\Omega = 0 : 0.15 : 1.5$ )

### 4.3 演習問題

1. 次の伝達関数のゲインと位相の計算式を求めよ.

$$(1) G(s) = \frac{1}{s^2} \quad (2) G(s) = \frac{1}{s(1+Ts)}$$

$$(3) G(s) = \frac{s}{1+Ts} \quad (4) G(s) = \left( \frac{1+T_2s}{1+T_1s} \right) \left( \frac{1+T_4s}{1+T_3s} \right)$$

2. 次の伝達関数について,  $\omega = 5$  [rad/s] における位相を  $50^\circ$  とする  $T_2$  を設計せよ.

$$G(s) = \left( \frac{1+T_2s}{1+T_1s} \right)^2, \quad T_1 = \frac{1}{5}$$

3. 次の伝達関数のベクトル軌跡の概形を描け.

$$G(s) = \frac{1+5s}{1+s}$$

## 4.3 の演習問題の解答

1.

$$(1) |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega} \right| \left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega^2}, \quad \angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle j\omega = -180^\circ$$

$$(2) |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega(1+j\omega T)} \right| = \left| \frac{1}{j\omega} \right| \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle(1+j\omega T) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

$$(3) |G(j\omega)| = \left| \frac{j\omega}{1+j\omega T} \right| = \frac{|j\omega|}{|1+j\omega T|} = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega - \angle(1+j\omega T) = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

$$(4) |G(j\omega)| = \left| \frac{1+j\omega T_2}{1+j\omega T_1} \right| \left| \frac{1+j\omega T_4}{1+j\omega T_3} \right| = \sqrt{\frac{1+\omega^2 T_2^2}{1+\omega^2 T_1^2}} \sqrt{\frac{1+\omega^2 T_4^2}{1+\omega^2 T_3^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\omega^2 T_2^2)(1+\omega^2 T_4^2)}{(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_3^2)}}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T_2}{1} + \tan^{-1} \frac{\omega T_4}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T_1}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T_3}{1}$$

2.

$$\angle G(j\omega) = \angle \left( \frac{1+j\omega T_2}{1+j\omega T_1} \right)^2 = 2\angle \frac{1+j\omega T_2}{1+j\omega T_1} = 50^\circ$$

よって

$$\angle \frac{1+j\omega T_2}{1+j\omega T_1} = 25^\circ$$

すなわち

$$\tan^{-1} \frac{\omega T_2}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T_1}{1} = \tan^{-1} \frac{5T_2}{1} - \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1} \frac{5T_2}{1} - 45^\circ = 25^\circ$$

これから

$$T_2 = \frac{\tan 70^\circ}{5} = 0.5495$$

3. ベクトル軌跡を図 4.5 に示す. ちなみに,  $G(j\omega)$  の実部と虚数部は,  $|G(j\omega)|$  と  $\angle G(j\omega)$  から

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = |G(j\omega)| \cos \angle G(j\omega)$$

$$\operatorname{Im} G(j\omega) = |G(j\omega)| \sin \angle G(j\omega)$$

と計算できる.

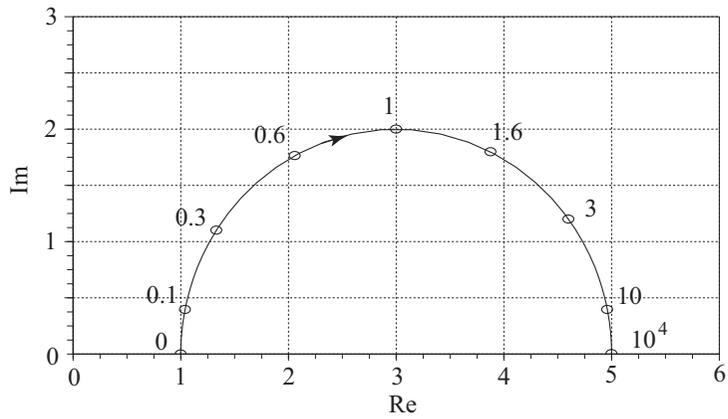


図 4.5: 問題 4 のベクトル軌跡 ( $\omega = 0, 0.1, 0.3, 0.6, 1, 1.6, 3, 10, 10^4$ )

## 周波数応答（続き）

周波数応答のグラフ表示法としてボード線図 (Bode diagram, Bode plot) がある。ボード線図は、1940 年にフィードバック増幅器 (feedback amplifier) の有効な設計法を提案したことで有名な Bode が考案した。電気回路も動的システムであり、回路理論と制御工学は同じ現象を対象としている。回路理論 II でいう「ベクトルの軌跡」はベクトル軌跡に、「周波数応答」は周波数応答に、「過渡現象」は過渡応答に対応する。ボード線図では、横軸に角周波数  $\omega$  を対数目盛りでとり、縦軸にゲインをデシベル (dB) で、位相を度 ( $^\circ$ ) でプロットする。結合系の周波数特性の作図に便利で、 $\omega$ 、ゲインとも広い範囲を扱えるので、制御系の解析および設計で通常利用されるのはボード線図である。今週はボード線図について学習する。

### 4.4 ボード線図の定義

**ゲイン特性** 横軸を  $\omega$  の対数目盛り、縦軸を  $|G(j\omega)|$  の dB (すなわち  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ ) 表示としたゲイン曲線 (magnitude curve) で表す。

**位相特性** 横軸を  $\omega$  の対数目盛り、縦軸を  $\angle G(j\omega)$  の  $^\circ$  表示とした位相曲線 (phase curve) で表す。

表 4.2: 絶対値とデシベル値の対応表

絶対値	0.01	0.1	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	10	100
デシベル値	-40 dB	-20 dB	-3 dB	0 dB	3 dB	20 dB	40 dB

**例題 4.8** 次の伝達関数のボード線図を描け。

$$G(s) = s$$

[解]

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega, \quad \angle G(j\omega) = 90^\circ$$

上式から図 4.6, 4.7 を得る。ゲイン曲線は、 $\omega$  が 10 倍になるとゲインが 20 dB 増加する直線となる。このとき、ゲインは 20 dB/dec (デカード (decade)) で増加するという。

**例題 4.9** 次の伝達関数のボード線図を描け。

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

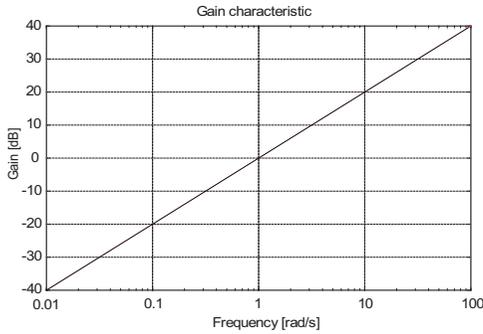


図 4.6: 例題 4.8 のゲイン曲線

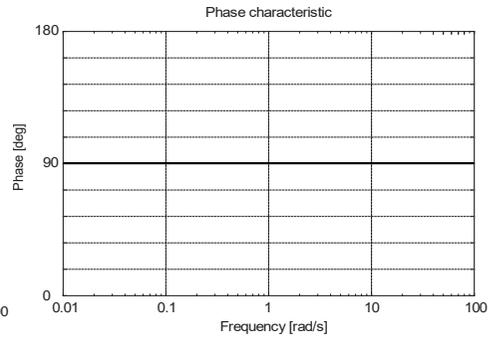


図 4.7: 例題 4.8 の位相曲線

[解]

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2} = -10 \log_{10}(1 + \omega^2)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1}$$

これらを用いてゲインと位相を計算すればよい。表 4.3 の計算結果から図 4.8, 4.9 を得る。

表 4.3: 周波数特性の計算表

$\omega$	$20 \log_{10}  G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$10^{-2} = 0.01$	-0.0043	-0.57
$10^{-1.5} = 0.0316$	-0.0043	-1.81
$10^{-1} = 0.1$	-0.043	-5.71
$10^{-0.5} = 0.316$	-0.414	-17.55
$10^0 = 1$	-3.01	-45
$10^{0.5} = 3.16$	-10.41	-72.45
$10^1 = 10$	-20.04	-84.295
$10^{1.5} = 31.6$	-30.00	-88.19
$10^2 = 100$	-40.00	-89.43

1 次遅れ要素の伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

のボード線図は折れ線で近似できることを示そう。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

から、ゲインと位相の計算式は次式となる。

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -10 \log_{10}(1 + \omega^2 T^2)$$

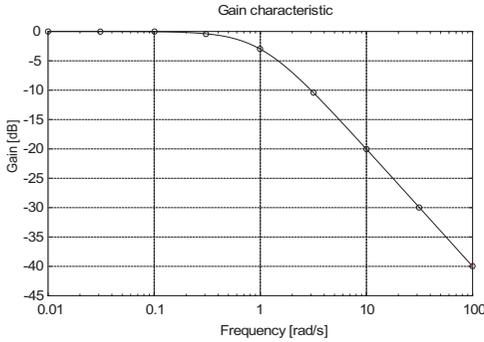


図 4.8: 例題 4.9 のゲイン曲線

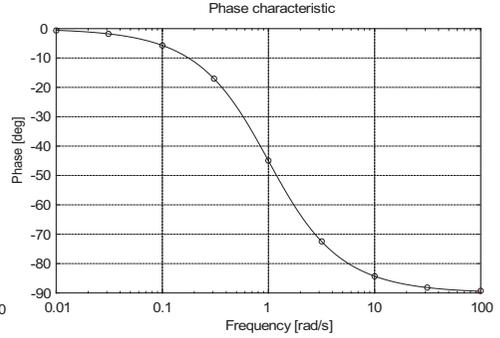


図 4.9: 例題 4.9 の位相曲線

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

よって

$$\omega T \ll 1 \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| \simeq -10 \log_{10} 1 = 0 \quad \angle G(j\omega) \simeq 0^\circ$$

$$\omega T = 1 \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| = -10 \log_{10} 2 \simeq -3\text{dB} \quad \angle G(j\omega) = -45^\circ$$

$$\omega T \gg 1 \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| \simeq -20 \log_{10} \omega T \quad \angle G(j\omega) \simeq -90^\circ$$

これらから、1次遅れ要素のボード線図は図 4.10, 4.11 のように折れ線近似 (straight-line approximation) できる (破線は計算機で求めた正確な曲線)。二本の漸近線の交点の周波数を

$$\omega = \frac{1}{T}$$

を折れ点周波数 (corner frequency, break frequency) という。

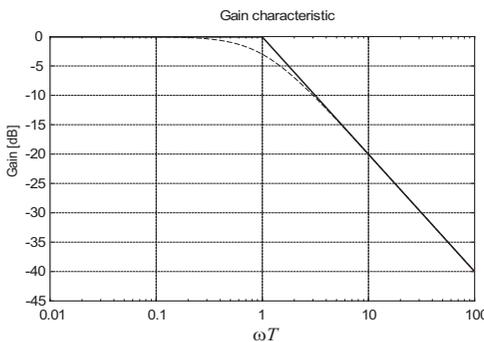


図 4.10: 例題 4.9 のゲイン曲線 (折れ線近似)

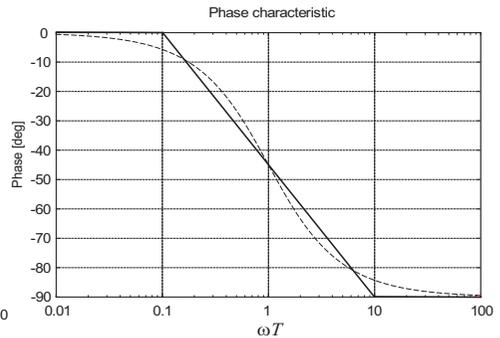


図 4.11: 例題 4.9 の位相曲線 (折れ線近似)

## 4.5 伝達関数の積と商のボード線図

対数の計算規則から、伝達関数の積と商のゲインと位相 (位相の計算式はベクトル軌跡と同じ) に関して次がわかる。

ボード線図のためのゲインと位相の計算式（積）

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

のゲインと位相はそれぞれ次式で計算できる。

$$\begin{aligned} \text{ゲイン} \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\text{位相} \quad \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \quad (4.13)$$

ボード線図のためのゲインと位相の計算式（商）

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{G_2(s)}$$

のゲインと位相はそれぞれ次式で計算できる。

$$\begin{aligned} \text{ゲイン} \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|} \\ &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| - 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\text{位相} \quad \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) - \angle G_2(j\omega) \quad (4.15)$$

よって、伝達関数の積および商の周波数特性は、ボード線図上では、単に、ゲイン曲線同士、位相曲線同士の和、差となることに注意する。

**例題 4.10** 次の伝達関数のボード線図（折れ線近似）を描け。

$$G(s) = 1 + Ts$$

[解]

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

から、ゲインと位相の計算式は次式となる。

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 10 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2), \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

これは、 $1/(1 + Ts)$  のボード線図でゲインと位相の符号を変えたものに等しい。ボード線図を図 4.12, 4.13 に示す。

**例題 4.11** 次の伝達関数のボード線図（折れ線近似）を描け。

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s)(1 + 0.1s)}$$

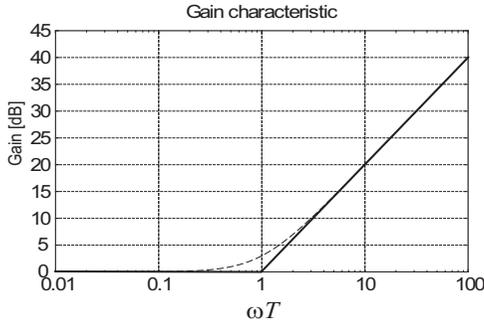


図 4.12: 例題 4.10 のゲイン曲線 (折れ線近似)

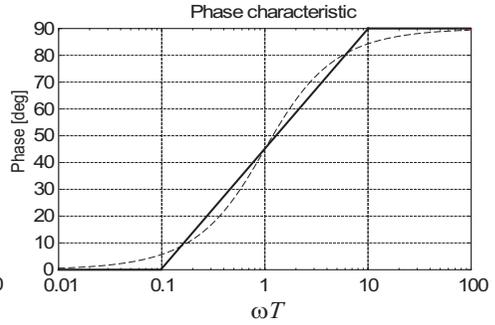


図 4.13: 例題 4.10 の位相曲線 (折れ線近似)

[解]

$$G_1(s) = \frac{1}{1+s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$

のそれぞれのボード線図 (折れ線近似) の和をグラフ上で求めればよい。  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  の折れ点周波数はそれぞれ

$$\omega_1 = 1[\text{rad/s}], \quad \omega_2 = \frac{1}{0.1} = 10[\text{rad/s}]$$

である。ボード線図を図 4.14, 4.15 に示す。

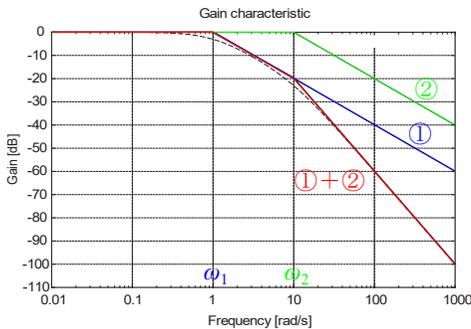


図 4.14: 例題 4.11 のゲイン曲線 (折れ線近似)

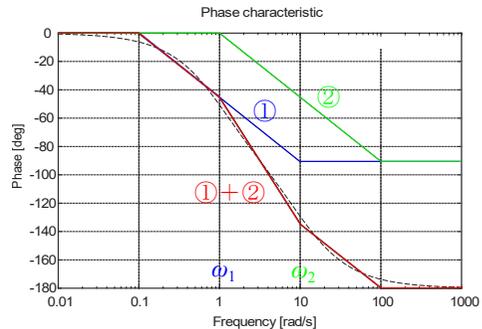


図 4.15: 例題 4.11 の位相曲線 (折れ線近似)

例題 4.12 次の伝達関数のボード線図 (折れ線近似) を描け。

$$G(s) = \frac{1+s}{1+0.1s}$$

[解]

$$G_1(s) = 1+s, \quad G_2(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$

のそれぞれのボード線図（折れ線近似）の和をグラフ上で求めればよい。  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  の折れ点周波数はそれぞれ

$$\omega_1 = 1[\text{rad/s}], \quad \omega_2 = \frac{1}{0.1} = 10[\text{rad/s}]$$

である。ボード線図を図 4.16, 4.17 に示す。

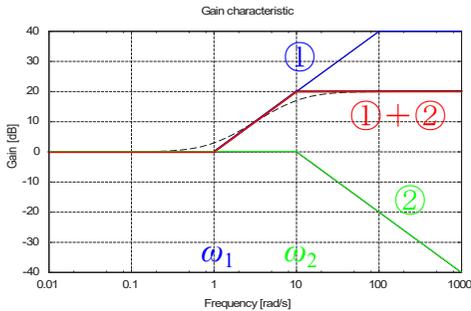


図 4.16: 例題 4.12 のゲイン曲線（折れ線近似）

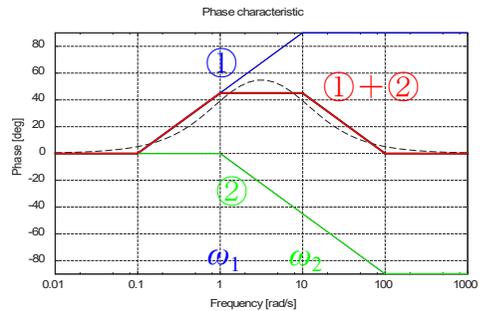


図 4.17: 例題 4.12 の位相曲線（折れ線近似）

上で見たようにボード線図を折れ線近似で描くときに基本となる伝達関数は

$$G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = s, \quad G_3(s) = \frac{1}{1+Ts}, \quad G_4(s) = 1+Ts$$

である。また、ゲイン  $K > 0$  を含む伝達関数

$$G(s) = KG_0(s)$$

のゲイン曲線は

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} |G_0(j\omega)|$$

となることからわかるように、 $K = 1$  の場合の伝達関数  $G_0(s)$  のゲイン曲線を縦方向に  $20 \log_{10} K$  だけ移動することによって求まる。位相曲線は  $K$  の影響を受けない。

以上から、ボード線図（折れ線近似）を描く手順を分母が 2 次、分子が 1 次の伝達関数で説明すれば次のようになる。

### 1. 伝達関数

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

を次の形に変形する。

$$G(s) = \frac{K(1+T_3 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

### 2. 折れ点周波数を求める。

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{T_3}$$

3. 次の三つの伝達関数のゲイン曲線と位相曲線を描く。

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + T_1 s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{1 + T_2 s}, \quad G_3(s) = 1 + T_3 s$$

4. 線図上で三つのゲイン曲線の和を求める。

5. 線図上で三つの位相曲線の和を求める。

6. ゲイン曲線を縦方向に  $20 \log_{10} K$  だけ移動する。

伝達関数は 2 次の因子を持つ場合もあるので、2 次要素に対するボード線図の形を紹介しておく。

**例題 4.13** 次の 2 次要素に対するボード線図を描け。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \zeta = 0.1, 0.3, 0.5, 1$$

[解] 例題 4.7 の結果から、ゲインと位相は次式となる。

$$20 \log_{10} |G(j\Omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} = -10 \log_{10} \{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2\}$$

$$\angle G(j\Omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2}$$

ただし、 $\Omega = \omega/\omega_n$  である。周波数応答は次の  $\Omega$  の範囲で

$$\Omega \ll 1 \quad 20 \log_{10} |G(j\Omega)| \simeq 0 \text{ dB} \quad \angle G(j\Omega) \simeq 0^\circ$$

$$\Omega \gg 1 \quad 20 \log_{10} |G(j\Omega)| \simeq -40 \log_{10} \Omega \text{ dB} \quad \angle G(j\Omega) \simeq -180^\circ$$

と近似的に表されることに注意する。2 次要素のボード線図を図 4.18, 4.19 に示す。

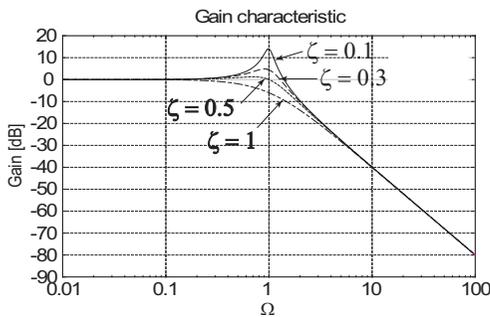


図 4.18: 例題 4.13 のゲイン曲線

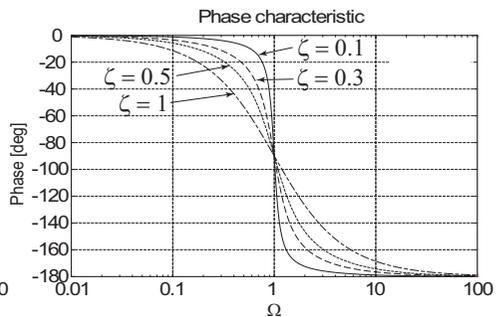


図 4.19: 例題 4.13 の位相曲線

## 4.6 演習問題

1. 次の伝達関数のゲイン (dB) と位相の計算式を求めよ。

$$(1) G(s) = \frac{\sqrt{10}}{s(1+s)} \quad (2) G(s) = \frac{1+s}{1+10s}$$

2. 問題 1 の伝達関数のボード線図 (折れ線近似) を描け。

### 4.6 の演習問題の解答

1.

$$\begin{aligned} (1) \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \frac{\sqrt{10}}{|j\omega(1+j\omega)|} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{10}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \\ &= 10\text{dB} - 20 \log_{10} \omega - 10 \log_{10}(1+\omega^2) \end{aligned}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{\sqrt{10}}{j\omega(1+j\omega)} = -\angle j\omega - \angle(1+j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{1}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} \frac{|1+j\omega|}{|1+j10\omega|} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+100\omega^2}} \\ &= 10 \log_{10}(1+\omega^2) - 10 \log_{10}(1+100\omega^2) \end{aligned}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1+j\omega}{1+j10\omega} = \angle(1+j\omega) - \angle(1+j10\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{10\omega}{1}$$

2.

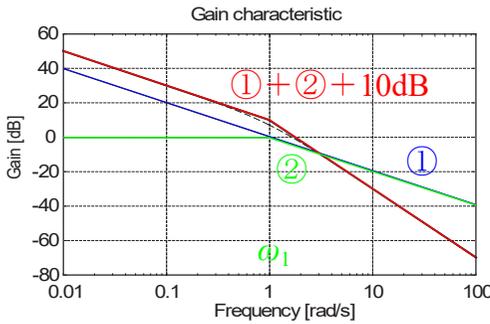


図 4.20: (1) のゲイン曲線 (折れ線近似)

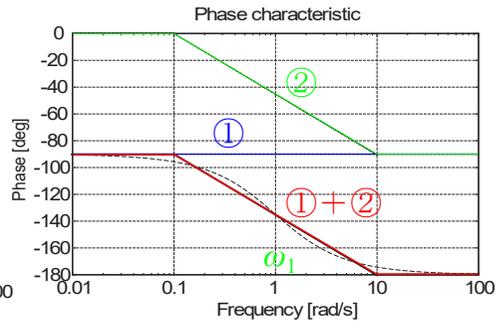


図 4.21: (1) の位相曲線 (折れ線近似)

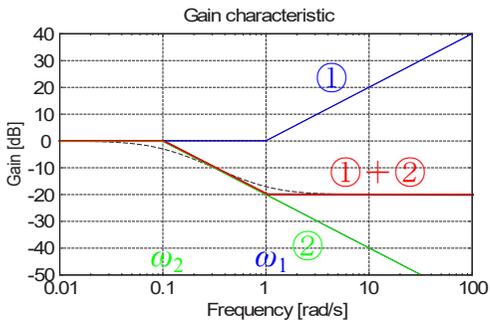


図 4.22: (2) のゲイン曲線 (折れ線近似)

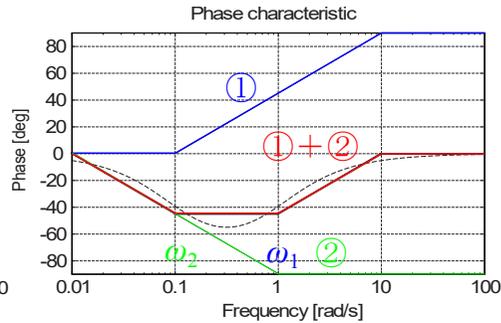


図 4.23: (2) の位相曲線 (折れ線近似)

## 第5章 ラウス・フルビッツの安定判別法

系の安定性は、伝達関数の分母 (denominator) を 0 とおいた方程式 (特性方程式 (characteristic equation)) の根 (root) (解 (solution)), すなわち、極によって決まることを第3章で述べた。具体的には、系の安定性はすべての極が負の実部 (negative real part) を持つことに同値である。代数方程式の根が複素平面の指定した領域にいくつあるかを定める問題は古くから研究されてきた。この種の問題は多項式の非線形性のため解法が困難であるが、ストルム (Strum), コーシー (Cauchy), エルミート (Hermite) による基礎的な研究結果があった。1868年に、電磁気学への貢献者マックスウェル (Maxwell) が、ワット (Watt) のガバナー (調速器) (governor) の安定性問題から生じた「 $n$  次代数方程式 ( $n$ th-order algebraic equation) の根がすべて負の実部を持つことをいかに判定するか。」という問題を提起し、ラウス (Routh) がストルムとコーシーの結果を利用してそれに答えた (1877年)。マックスウェル自身は、3次までの代数方程式の条件を導いている。また、のちに、タービン理論の創始者のストドラ (Stodola) がラウスの結果を知らずに同じ問題をフルビッツ (Hurwitz) に相談した。フルビッツもラウスの結果に気付くことなく、エルミートの結果を用いて別の解法を与えた (1895年)。形は異なるが両者は同値であることがのちに示されたので、両者をまとめてラウス・フルビッツの安定判別法 (Routh-Hurwitz stability test) という。今週は、 $n$  次系へ適用できるこれらの安定判別法を紹介する。

### 5.1 ラウスの安定判別法

ラウスの安定判別法に入る前に、判定すべき安定性条件 (stability condition) を確認しておく。

系の安定性は、伝達関数の分母を 0 とおいて得られる特性方程式

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0 \quad (5.1)$$

の根 (極)  $p_i, i = 1, \dots, n$  がすべて負の実部を持つことに等しい。すなわち、安定性条件は以下の条件である。

安定性条件

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

#### 5.1.1 連分数表現された伝達関数の安定性条件

まず、連分数 (continued fraction) で表された伝達関数  $G(s)$  と安定性との関係を述べる。

1.  $n = 1$  の場合 伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{1 + \alpha_1 s} \quad (5.3)$$

に対する特性方程式は次式である.

$$\Delta(s) = s + \frac{1}{\alpha_1} = 0$$

[11]p.89 から, 安定性条件は次式である.

$$\frac{1}{\alpha_1} > 0, \text{ すなわち, } \alpha_1 > 0$$

2.  $n = 2$  の場合 伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{1 + \alpha_1 s + \frac{1}{\alpha_2 s}} = \frac{\alpha_2 s}{\alpha_1 \alpha_2 s^2 + \alpha_2 s + 1} \quad (5.4)$$

に対する特性方程式は次式である.

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{1}{\alpha_1} s + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} = 0$$

[11]p.89 から, 安定性条件は次式である.

$$\frac{1}{\alpha_1} > 0, \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} > 0, \text{ すなわち, } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

3.  $n = 3$  の場合 伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{1 + \alpha_1 s + \frac{1}{\alpha_2 s + \frac{1}{\alpha_3 s}}} = \frac{\alpha_2 \alpha_3 s^2 + 1}{(1 + \alpha_1 s)(\alpha_2 \alpha_3 s^2 + 1) + \alpha_3 s} \quad (5.5)$$

に対する特性方程式は

$$(1 + \alpha_1 s)(\alpha_2 \alpha_3 s^2 + 1) + \alpha_3 s = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 s^3 + \alpha_2 \alpha_3 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_3)s + 1 = 0$$

すなわち

$$\Delta(s) = s^3 + \frac{1}{\alpha_1} s^2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} s + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0$$

[11]p.89 から, 安定性条件は次式である.

$$\frac{1}{\alpha_1} > 0, \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > 0, \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > 0, \left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right) - \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > 0$$

第1式から,  $\alpha_1 > 0$ . 第1, 3, 4式から

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > 0 \rightarrow \alpha_3 > 0$$

第3式と  $\alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0$  から,  $\alpha_2 > 0$ . よって

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$$

を得る.

$n \geq 4$  についても, 任意の係数の  $\Delta(s)$  を分母を持つ伝達関数の連分数表現を求めることができる. 次式の連分数表現された伝達関数が (5.1) 式の特性方程式を持つように  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  を与えたとする.

$$G(s) = \frac{1}{1 + \alpha_1 s + \frac{1}{\alpha_2 s + \frac{1}{\ddots \frac{1}{\alpha_{n-1} s + \frac{1}{\alpha_n s}}}}} \quad (5.6)$$

このとき次がいえる (リアプノフの安定定理 (Lyapunov's stability theorem)(1892) (制御工学 II で紹介する) を用いて証明できる).

連分数表現された伝達関数の安定性条件 (5.2) 式は次の条件に同値である.

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \quad (5.7)$$

### 5.1.2 ラウス表による安定判別法

一般的に, 最高次の係数を  $a_n > 0$  とした特性多項式 (characteristic polynomial) を以下とする.

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0$$

また,  $\Delta(s)$  から一つ置きに項を取り出して得られるつぎの多項式を定義する.

$$\Delta_0(s) = a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-4} s^{n-4} + \dots$$

$$\Delta_1(s) = a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-5} s^{n-5} + \dots$$

そして,  $\Delta(s)$  を分母とする次の伝達関数を考える.

$$G(s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_1(s) + \Delta_0(s)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta_0(s)}{\Delta_1(s)}}$$

$\Delta_0(s)/\Delta_1(s)$  はつぎのように連分数で表されることに注意する.

$$\frac{\Delta_0(s)}{\Delta_1(s)} = \alpha_1 s + \frac{1}{\alpha_2 s + \frac{1}{\ddots \frac{1}{\alpha_{n-1} s + \frac{1}{\alpha_n s}}}}$$

$\alpha_i$  は、連分数を計算する過程から以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta_0(s)}{\Delta_1(s)} &= \frac{a_n}{a_{n-1}}s + \frac{A_1s^{n-2} + A_2s^{n-4} + \dots}{\Delta_1(s)} = \alpha_1s + \frac{\Delta_2(s)}{\Delta_1(s)} \\
 \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_2(s)} &= \frac{a_{n-1}}{A_1}s + \frac{B_1s^{n-3} + B_2s^{n-5} + \dots}{\Delta_2(s)} = \alpha_2s + \frac{\Delta_3(s)}{\Delta_2(s)} \\
 \frac{\Delta_2(s)}{\Delta_3(s)} &= \frac{A_1}{B_1}s + \frac{C_1s^{n-4} + C_2s^{n-6} + \dots}{\Delta_3(s)} = \alpha_3s + \frac{\Delta_4(s)}{\Delta_3(s)} \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$\Delta_2(s)$  の係数 (coefficient), すなわち,  $A_1, A_2, \dots$  は

$$\Delta_2(s) = \Delta_0(s) - \frac{a_n}{a_{n-1}}s\Delta_1(s)$$

の計算から下表のように得られる。

表 5.1:  $\Delta_2(s)$  の係数の計算表

$\Delta_0$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
$-\frac{a_n}{a_{n-1}}s\Delta_1$	$-a_n$	$-\frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$-\frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\dots$
$\Delta_0 - \frac{a_n}{a_{n-1}}s\Delta_1$	0	$A_1 = a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$A_2 = a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\dots$

よって,  $\Delta_i(s)$ ,  $i = 2, 3, \dots$  の係数は, つぎのラウス表 (Routh table) を用いて系統的に計算できることがわかる。

表 5.2: ラウス表

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\dots$
$s^{n-3}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$\dots$
$s^{n-4}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$s^1$	$\dots$	0		
$s^0$	$\dots$			

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & A_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \dots \\
 B_1 &= \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1} & B_2 &= \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1} & \dots \\
 C_1 &= \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{B_1} & C_2 &= \frac{B_1 A_3 - A_1 B_3}{B_1} & \dots \\
 & \dots & & & 
 \end{aligned}$$

(5.8) 式からわかるように,  $\alpha_i$  は次式で与えられる.

$$\alpha_1 = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \alpha_2 = \frac{a_{n-1}}{A_1}, \alpha_3 = \frac{A_1}{B_1}, \alpha_4 = \frac{B_1}{C_1}, \dots$$

よって, (5.7) 式の条件は

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, \dots$$

となる. 以上から次を得る.

(ラウスの安定判別法)

(5.2) 式は, ラウス表の第 1 列の係数がすべて正となることと同値である.

上の判定法に次の条件 (必要条件 (necessary condition)) を含めてもよい.

$\Delta(s)$  のすべての係数  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  が正.

これは余分な (redundant) 条件であるが, この条件を満たさない場合, ラウス表を作成するまでもなく不安定と判定できる. また, ラウス表の第 1 列に 0 の係数が現れた場合<sup>1</sup>, それ以降のラウス表を計算できない. これは上記の条件を満たさないので不安定である. よって, この場合, ラウス表の作成を止めて, 不安定と判定する.

**例題 5.1** 次の特性多項式を持つ系の安定性を判定せよ.

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

[解] ラウス表を表 5.3 に示す. 第 1 列がすべて正なので, 系は安定である.

**例題 5.2** 次の特性多項式を持つ系が安定となる  $K$  の範囲を求めよ.

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (3 + K)s + 1$$

[解]

ラウス表を表 5.4 に示す. ラウス表の第 1 列が正となる条件

$$\frac{9 - K}{3} > 0, \quad \frac{(9 - K)(3 + K) - 9}{9 - K} > 0$$

から次の範囲を得る.

$$3 - 3\sqrt{3} < K < 3 + 3\sqrt{3}$$

<sup>1</sup>特異なケースであり, 極が特定のパターン (不安定極を含む) のとき生じることが知られている.

表 5.3: 例題 5.1 のラウス表

$s^4$	1	3	1
$s^3$	2	2	0
$s^2$	2	1	0
$s^1$	1	0	
$s^0$	1		

表 5.4: 例題 5.2 のラウス表

$s^4$	1	4	1
$s^3$	3	$3+K$	0
$s^2$	$\frac{9-K}{3}$	1	0
$s^1$	$\frac{(9-K)(3+K)-9}{9-K}$	0	
$s^0$	1		

例題 5.3 次の特性多項式を持つ系の安定性を判定せよ。

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + 5$$

[解] ラウス表を表 5.5 に示す。第 1 列に負の要素があるので系は不安定である。

ラウス表の第 1 列の符号変化回数は不安定極 (unstable pole) (正の実部を持つ極) の数を表す。この場合、第 1 列の符号変化回数は 2 である。実際、 $\Delta(s) = 0$  の根を求めると

$$p_{1,2} = -1.1104 \pm j1.1013, \quad p_{3,4} = 0.1104 \pm j1.4255$$

となり、不安定極の数は 2 であることが確認できる。

表 5.5: 例題 5.3 のラウス表

$s^4$	1	4	5
$s^3$	2	4	0
$s^2$	2	5	0
$s^1$	-1	0	
$s^0$	5		

## 5.2 フルビッツの安定判別法

系の特性多項式を次式とする。

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0$$

フルビッツの方法は、フルビッツ行列 (Hurwitz matrix) と呼ばれる次の  $n \times n$  行列の主座小行列式 (principal minor) を計算することによって系の安定性を判定するものである。

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & a_0 \end{bmatrix}$$

ただし、存在しない係数は 0 とおく。また、 $H$  の  $i$  次主座小行列式を  $H_i$  とする。すなわち

$$H_1 = a_{n-1}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

ラウス表の第 1 列と  $H_i$  との間に次の関係がある。

$$a_{n-1} = H_1, \quad A_1 = \frac{H_2}{H_1}, \quad B_1 = \frac{H_3}{H_2}, \quad \dots$$

この関係は次のように示せる。説明のため、 $H_4$  を考える。

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

以下では、行列式の値を変えない行列の基本変形を用いる。第 1 行に  $a_n/a_{n-1}$  を掛けて第 2 行から引き、第 3 行に  $a_n/a_{n-1}$  を掛けて第 4 行から引くと

$$\begin{aligned} H_4 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & a_{n-6} - \frac{a_n a_{n-7}}{a_{n-1}} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & 0 & a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第 2 行に  $a_{n-1}/A_1$  を掛けて、第 3 行から引くと

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & a_{n-3} - \frac{a_{n-1} A_2}{A_1} & a_{n-5} - \frac{a_{n-1} A_3}{A_1} \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

さらに、第3行に  $A_1/B_1$  を掛けて、第4行から引くと

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 - \frac{A_1 B_2}{B_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{n-1} A_1 B_1 C_1$$

また、上記の計算から次式がわかる。

$$H_1 = a_{n-1}, \quad H_2 = a_{n-1} A_1, \quad H_3 = a_{n-1} A_1 B_1$$

よって、ラウス表の第1列が正であることは、 $H_i, i = 1, \dots, n$  が正であることに等しい。以上から次を得る。

(フルビッツの安定判別法)

(5.2) 式は、 $H_i > 0, i = 1, \dots, n$  に同値である。

上の判定法に次の条件（必要条件）を含めてもよい。

$\Delta(s)$  のすべての係数  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  が正。

これは余分な条件であるが、この条件に合わない場合、 $H_i$  を計算するまでもなく不安定と判定できる。

$H$  行列の形から

$$H_n = a_0 H_{n-1}$$

という関係があるので、 $H_n$  は  $H_{n-1}$  から直ちに計算できることに注意する。

**例題 5.4** 例題 5.1 の特性多項式を持つ系の安定性を判定せよ。

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

[解] フルビッツ行列は

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

これから

$$H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad H_4 = 4$$

を得る。すべての  $H_i$  が正なので系は安定である。

### 5.3 安定度を指定した判定法

極の実部はモードの収束速度に関係するので

$$\operatorname{Re} p_i < 0$$

ではなく、たとえば、より速い収束性を保証する

$$\operatorname{Re} p_i < -1$$

という基準を満たすかどうかを判定したいことがある。すなわち、系の極が図 5.1 のハッチング部分にあるかどうかの判定である。-1 を安定度 (degree of stability) と呼ぶ。

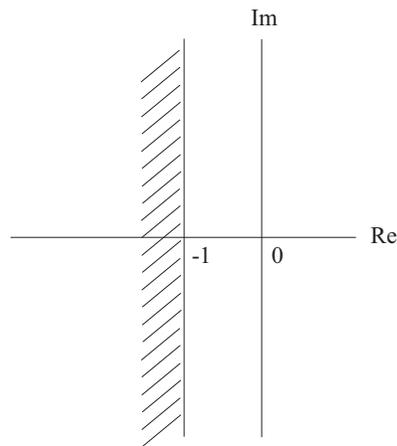


図 5.1: 実部が $-1$ より小さい領域 ( $s$  平面)

この問題に対しては  $s$  を次のように変換した特性多項式にラウス・フルビッツの安定判別法を適用すればよい。

$$q = s + 1 \tag{5.9}$$

この変換によって、 $s = -1$  が  $q$  平面の原点となる。たとえば

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 13s + 10$$

に (5.9) 式の変換を適用すると  $s = q - 1$  なので

$$\Delta(q - 1) = (q - 1)^3 + 6(q - 1)^2 + 13(q - 1) + 10 = q^3 + 3q^2 + 4q + 2$$

となる。この多項式にラウスの判別法を適用すると、表 5.6 を得て安定と判定される。すなわち、 $s$  平面では、すべての極の実部は  $-1$  よりも小さいと判定される。実際、 $\Delta(s) = 0$  の根は

$$p_{1,2} = -2 \pm j, \quad p_3 = -2$$

であり、この判定は正しいことが確認できる。

表 5.6:  $\Delta(q-1)$  のラウス表

$q^3$	1	4
$q^2$	3	2
$q^1$	$\frac{10}{3}$	0
$q^0$	2	

## 5.4 演習問題

1. 図 5.2 のフィードバック系が安定となる  $K$  の範囲を求めよ. ただし

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$$

とする.

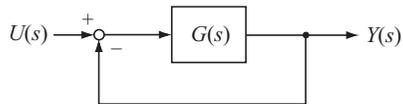


図 5.2: 問題 1 のブロック線図

2. 次の特性多項式を持つ系が安定となる  $K$  の範囲を求めよ.

$$\Delta(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + (10 + K)s + 4$$

3. 次の特性多項式を持つ系の安定性をラウスの方法とフルビッツの方法で調べよ.

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1$$

4.  $\Delta(s) = s^3 + 8s^2 + 15s + K$  の系に対して, 安定度  $-1$  を満たす  $K$  の範囲を求めよ.

## 第5章の演習問題の解答

1. 閉ループ系の伝達関数

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

の分母を 0 と置くことによって、次の特性方程式を得る.

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)^2} = \frac{s(s+1)^2 + K}{s(s+1)^2} = 0$$

これから、特性方程式は

$$s^3 + 2s^2 + s + K = 0$$

となる. ラウス表を表 5.7 に示す. ラウス表の第 1 列が正となる条件

$$\frac{2-K}{2} > 0, \quad K > 0$$

から

$$0 < K < 2$$

を得る.

2. 対応するラウス表を表 5.8 に示す. ラウス表の第 1 列が正となる条件

$$\frac{40-K}{5} > 0, \quad \frac{(40-K)(10+K) - 100}{40-K} > 0$$

から次の範囲を得る.

$$15 - 5\sqrt{21} < K < 15 + 5\sqrt{21}$$

表 5.7: 問題 1 のラウス表

$s^3$	1	1	0
$s^2$	2	$K$	0
$s^1$	$\frac{2-K}{2}$	0	
$s^0$	$K$		

表 5.8: 問題 2 のラウス表

$s^4$	1	10	4
$s^3$	5	$10+K$	0
$s^2$	$\frac{40-K}{5}$	4	0
$s^1$	$\frac{(40-K)(10+K) - 100}{40-K}$	0	
$s^0$	4		

3.  $\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1$ . ラウス表を表 5.9 に示す. 第 1 列がすべて正なので, 系は安定である.

表 5.9: ラウス表

$s^5$	1	4	2	0
$s^4$	2	5	1	0
$s^3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	
$s^2$	3	1	0	
$s^1$	1	0		
$s^0$	1			

フルビッツ行列および主座小行列式は以下となる.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = 2, \quad H_2 = 3, \quad H_3 = 9, \quad H_4 = 9, \quad H_5 = 9$$

すべて正なので, 系は安定である.

4. 安定度  $-1$  なので, 変数変換  $q = s + 1$  を行う.  $s = q - 1$  を  $\Delta(s)$  に代入して次式を得る.

$$\Delta(q-1) = (q-1)^3 + 8(q-1)^2 + 15(q-1) + K = q^3 + 5q^2 + 2q + K - 8$$

ラウス表を表 5.10 に示す. 第 1 列が正という条件から  $8 < K < 18$  を得る.

表 5.10: ラウス表

$q^3$	1	2	0
$q^2$	5	$K - 8$	0
$q^1$	$\frac{18 - K}{5}$	0	
$q^0$	$K - 8$		

## 第6章 ナイキストの安定判別法

ナイキストの安定判別法 (Nyquist's stability test) は、ナイキスト (Nyquist) がフィードバック増幅器の安定性の研究から開発したフィードバック系の安定判別法である (1932年)。ラウス・フルビッツの方法とは異なり、ループ伝達関数の周波数特性から閉ループ系 (closed-loop system) の安定性を判定するものであり、閉ループ系の安定性を改善するためのループ伝達関数の設計方針 (design principle) も与える。ループ伝達関数は、通常、補償器 (compensator) と制御対象 (plant, controlled object) の直列結合で構成されるので、ループ伝達関数の設計方針から補償器の設計方針も得られる。

### 6.1 ナイキストの安定判別法

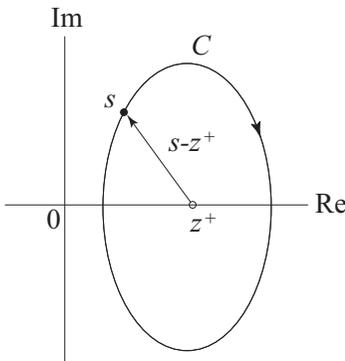


図 6.1:  $s - z^+$  の偏角の変化

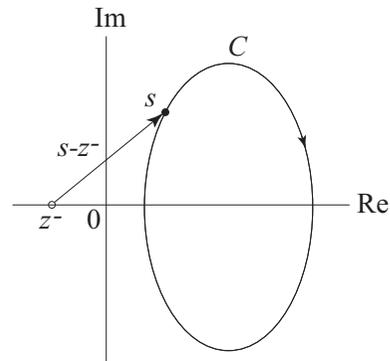


図 6.2:  $s - z^-$  の偏角の変化

準備として、図 6.1, 6.2 に示すように、複素平面におけるある領域を囲む閉曲線 (closed curve)  $C$  に沿って、 $s$  を時計方向 (角度が負の方向) に 1 回転させたときの複素関数 (complex function)  $s - z^+$ ,  $s - z^-$  の偏角の変化 (variation of argument) は次式となる。

$$\Delta\angle(s - z^+) = -2\pi, \quad \Delta\angle(s - z^-) = 0$$

閉曲線の内側 (inside) にある  $z^+$  では偏角の変化があり、閉曲線の外側 (outside) にある  $z^-$  では偏角の変化がない。また、これらの逆数 (reciprocal number) の複素関数では、元の偏角とは符号が逆になるので、閉曲線  $C$  に沿う偏角の変化は次式となる。

$$\Delta\angle\frac{1}{s - z^+} = 2\pi, \quad \Delta\angle\frac{1}{s - z^-} = 0$$

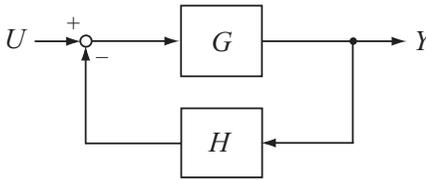


図 6.3: フィードバック系

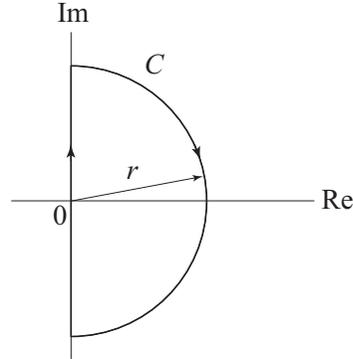


図 6.4: 不安定領域を囲む閉曲線

つぎに、図 6.3 のフィードバック系の安定性条件を導く．ループ伝達関数を

$$L(s) = G(s)H(s)$$

とおく．また、 $L(s)$  の分母の次数は分子の次数よりも大きい（厳密にプロパー (strictly proper)）とする．閉ループ系の伝達関数

$$\frac{Y}{U} = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

から、閉ループ系の特性方程式は

$$1 + L(s) = 0$$

となる． $L(s)$  の極を  $p_i, i = 1, \dots, n$  とするとき、上式の左辺は次のように表記できる．

$$1 + L(s) = 1 + \frac{N(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は閉ループ系の極である．

さて、図 6.4 のように複素平面の右半面を囲む閉曲線  $C$  ( $r$  は十分大きくとる) に沿って  $s$  を 1 周させたときの  $1 + L(s)$  の偏角の変化は次式となる．

$$\Delta \angle(1 + L(s)) = 2\pi(P - \Lambda)$$

ただし、 $P$  は  $L(s)$  の不安定極（実部が正の極）の数、 $\Lambda$  は閉ループ系の不安定極の数である．閉ループ系が安定であるための条件は、 $\Lambda = 0$  なので安定性条件として次式を得る．

$$\Delta \angle(1 + L(s)) = 2\pi P$$

すなわち、 $C$  に沿って  $s$  を 1 周させたとき、 $1 + L(s)$  が原点 (origin) を反時計方向に  $P$  回転すれば閉ループ系は安定となる． $L(s)$  でいえば、 $-1 + j0$  のまわりを反時計方向に  $P$  回転するという条件になる．また、 $r \rightarrow \infty$  としたとき、閉曲線  $C$  の半円弧に対応する  $L(s)$  の軌跡は  $L(s)$  が厳密にプロパーなため原点に一致する．よって、このときの  $L(s)$  の軌跡は  $s$  が虚軸上を  $-j\infty$  から  $j\infty$  まで移動したときの軌跡、すなわち、 $L(j\omega)$ ,  $\omega = -\infty \sim \infty$  となる．正式には、この軌跡をナイキスト線図 (Nyquist plot) という．これを以下にまとめておく．

(ナイキストの安定判別法) ループ伝達関数  $L(s)$  の不安定極の数を  $P$  とする. このとき, 閉ループ系の安定性は  $L(j\omega)$ ,  $\omega = -\infty \sim \infty$  が  $-1 + j0$  を反時計方向に  $P$  回転することに同値である.

**例題 6.1** 次のループ伝達関数を持つ閉ループ系の安定性をナイキスト線図から判定せよ.

$$L(s) = \frac{1}{s+1}$$

[解] ループ伝達関数に不安定極はない. よって,  $P = 0$ . また, 図 6.5 から, ナイキスト線図は  $-1 + j0$  のまわりを回転しない. よって, 閉ループ系は安定である.

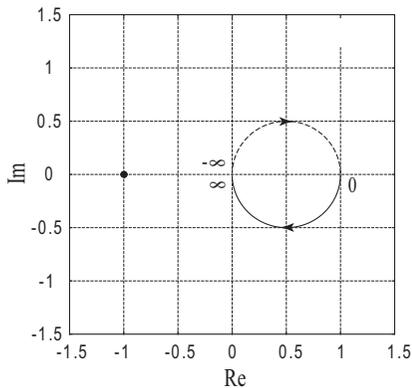


図 6.5: 例題 6.1 のナイキスト線図

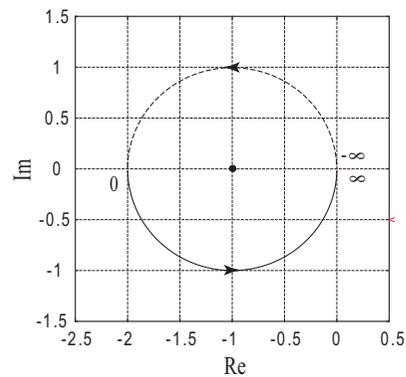


図 6.6: 例題 6.2 のナイキスト線図

**例題 6.2** 次のループ伝達関数を持つ閉ループ系の安定性をナイキスト線図から判定せよ.

$$L(s) = \frac{2}{s-1}$$

[解]  $L(j\omega)$  を次のように表す.

$$L(j\omega) = \frac{2}{-1 + j\omega} = \frac{a(-1 + j\omega) + b(-1 - j\omega)}{-1 + j\omega}$$

分子の比較から

$$\begin{cases} -a - b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

これから

$$a = b = -1$$

を得る. よって

$$L(j\omega) = -1 - \frac{-1 - j\omega}{-1 + j\omega}$$

となる。すなわち、ナイキスト線図は、中心  $= (-1, 0)$ 、半径  $= 1$  の円上にあることがわかる。一方、 $\omega = 0, \infty$  における  $L(j\omega)$  は

$$L(j0) = -2, \quad L(j\infty) = 0$$

である。また、位相は

$$\angle L(j\omega) = -\angle(-1 + j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{-1} < 0$$

となる。以上から図 6.6 のナイキスト線図を得る。 $P = 1$  であり、ナイキスト線図は  $-1 + j0$  のまわりを反時計方向に 1 回転しているので閉ループ系は安定である。

## 6.2 簡易化されたナイキストの安定判別法

ループ伝達関数  $L(s)$  は安定で、十分小さい  $K > 0$  に対して、 $KL(s)$  がナイキストの安定性条件を満たす、すなわち、 $\frac{KL(s)}{1+KL(s)}$  が安定とする。このような  $L(s)$  に対するナイキストの安定判別法は次の例が示すように簡単になる。

次の二つのループ伝達関数を考える。

$$L_1(s) = \frac{1.5}{(s+1)(s^2+s+1)}, \quad L_2(s) = \frac{4}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

これらに対するナイキスト線図を図 6.7, 6.8 に示す ( $\omega < 0$  の部分は省略)。いずれもループ伝達関数是不安定極を持たないので、 $P = 0$  である。よって、ナイキスト線図が  $-1 + j0$  を回転しないことが閉ループ系が安定となる条件である。このようなナイキスト線図の形では、ナイキスト線図が  $-1 + j0$  を回転しないことは、 $-1 + j0$  を左に見て原点に行くことに相当する。よって、次の結果を得る。

(簡易化されたナイキストの安定判別法) ループ伝達関数  $L(s)$  が安定で、十分小さい  $K > 0$  に対して、 $\frac{KL(s)}{1+KL(s)}$  が安定な場合、閉ループ系の安定性は  $L(j\omega)$ ,  $\omega = 0 \sim \infty$  が  $-1 + j0$  を左に見て原点に行くことに同値である。

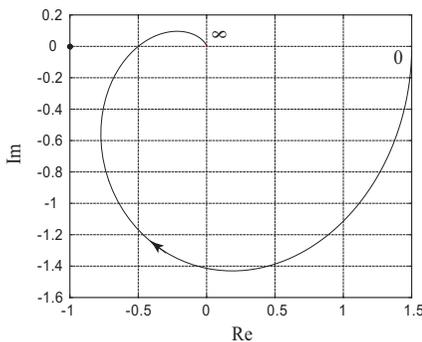


図 6.7:  $L_1(s)$  のナイキスト線図  
(閉ループ系は安定)

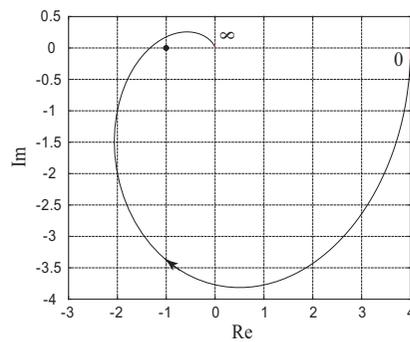


図 6.8:  $L_2(s)$  のナイキスト線図  
(閉ループ系は不安定)

ナイキスト線図が  $-1 + j0$  上を通過する場合、閉ループ系は不安定であるが、この場合、特に、安定限界 (marginally stable) といわれる。

**注意 6.1**  $L(s)$  が  $1/s$  を一つ含む場合にも簡易化されたナイキストの安定判別法が適用できる。

**注意 6.2** 一般に、 $L(s)$  が虚軸上に極を持つ場合、極を避けるように閉曲線  $C$  を修正する (図 6.9 参照)。図示するように、虚軸上の極を左に避けた場合、虚軸上の極を  $L(s)$  の不安定極としてカウントする。

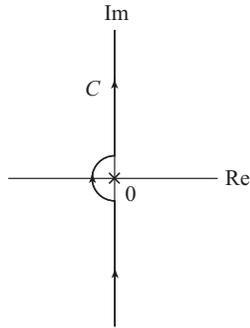


図 6.9:  $L(s)$  が虚軸上に極を持つ場合の閉曲線  $C$  の修正

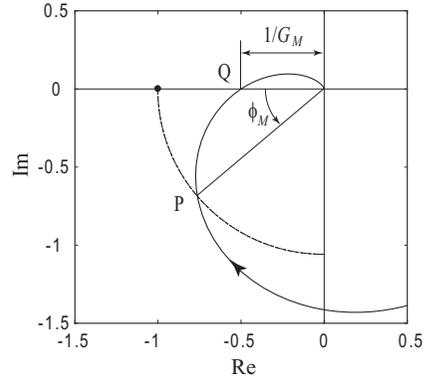


図 6.10: 位相余裕とゲイン余裕

## 6.3 位相余裕とゲイン余裕

簡易化されたナイキストの安定判別法が適用できるループ伝達関数  $L(s)$  に対して、閉ループ系が安定なとき、 $L(s)$  のナイキスト線図と  $-1 + j0$  との隔たりの大きさは、ある種の安定余裕を表すと考えられる。この安定余裕を表すには、文字通り、 $L(s)$  のナイキスト線図が  $-1 + j0$  に最接近したときの両者の距離をその尺度として用いれば合理的であるが、その計算は複雑になる。そこで、図 6.10 に示すように、位相とゲインで安定余裕を表す。すなわち次の量を定義する。

1. 位相余裕 (phase margin)  $\phi_M =$  ゲインが 1 となるナイキスト線図上の点と  $-1 + j0$  とが作る角度
2. ゲイン余裕 (gain margin)  $G_M =$  位相が  $-180^\circ$  となるナイキスト線図上の点におけるゲインの逆数

ゲインが 1 となる角周波数、すなわち

$$|L(j\omega)| = 1$$

となる角周波数をゲイン交差周波数 (gain-crossover frequency) といい、 $\omega_P$  で表す。また、位相が  $-180^\circ$  となる角周波数、すなわち

$$\angle L(j\omega) = -180^\circ$$

となる角周波数を位相交差周波数 (phase-crossover frequency) といい、 $\omega_Q$  で表す。

**例題 6.3** 次のループ伝達関数に対する位相余裕とゲイン余裕を計算せよ。

$$L_1(s) = \frac{1.5}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

[解] まず、ゲイン交差周波数  $\omega_P$  を求める。

$$\begin{aligned} |L_1(j\omega)|^2 &= \left| \frac{1.5}{(1+j\omega)(1-\omega^2+j\omega)} \right|^2 = \frac{1.5^2}{|1+j\omega|^2|1-\omega^2+j\omega|^2} \\ &= \frac{1.5^2}{(1+\omega^2)\{(1-\omega^2)^2+\omega^2\}} = 1 \end{aligned}$$

上式から、 $\Omega = \omega^2$  とおくと

$$\Omega^3 = 1.5^2 - 1 = 1.25$$

すなわち

$$\omega^6 = 1.25$$

を得る。これから、 $\omega_P = 1.25^{1/6} = 1.0379$ 。一方、位相の計算式を求めると

$$\angle L_1(j\omega) = -\angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

これに  $\omega_P$  を代入して位相余裕  $\phi_M$  を計算すると

$$\phi_M = \angle L_1(j\omega_P) + 180^\circ = -46.065^\circ - 94.256^\circ + 180^\circ = 39.68^\circ$$

を得る。つぎに、位相交差周波数  $\omega_Q$  を求める。 $L_1(j\omega)$  の位相が  $-180^\circ$  になる条件は、 $L_1(j\omega)$  の虚数部が 0 になる条件なので

$$L_1(j\omega) = \frac{1.5(1-j\omega)(1-\omega^2-j\omega)}{|1+j\omega|^2|1-\omega^2+j\omega|^2}$$

から

$$\text{Im}(1-j\omega)(1-\omega^2-j\omega) = 0$$

すなわち

$$\omega(\omega^2 - 2) = 0$$

となる。これを満たす  $\omega > 0$  として

$$\omega_Q = \sqrt{2}$$

を得る。よって、ゲイン余裕は

$$G_M = \frac{1}{|L_1(j\omega_Q)|} = 2$$

である。

## 6.4 演習問題

1. 次のループ伝達関数のナイキスト線図を描き，閉ループ系の安定性を判定せよ.

$$L(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$$

2. 次のループ伝達関数のナイキスト線図を描き，閉ループ系の安定性を判定せよ. また，安定な場合，ゲイン交差周波数  $\omega_P$ ，位相余裕  $\phi_M$ ，位相交差周波数  $\omega_Q$ ，ゲイン余裕  $G_M$  を求めよ.

$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

## 第6章の演習問題の解答

1.

$$L(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 - 1} = \frac{2 + j\omega}{-\omega^2 - 1} = -\frac{2}{\omega^2 + 1} - j\frac{\omega}{\omega^2 + 1}$$

これから表 6.1 を得る. また, 表 6.1 から図 6.11 を得る.  $L(s)$  の極は  $p_1 = -1, p_2 = 1$  であり, 不安定な極が一つある. よって,  $P = 1$  である. 図 6.11 からナイキスト線図は  $-1 + j0$  を反時計方向に 1 回転するので, 閉ループ系は安定である.

表 6.1: 周波数特性の計算表

$\omega$	$\text{Re } L(j\omega)$	$\text{Im } L(j\omega)$
0	-2	0
0.1	-1.980	-0.099
0.3	-1.835	-0.275
0.6	-1.471	-0.441
1	-1	-0.5
1.6	-0.562	-0.449
3	-0.2	-0.3
6	-0.054	-0.162
$\infty$	0	0

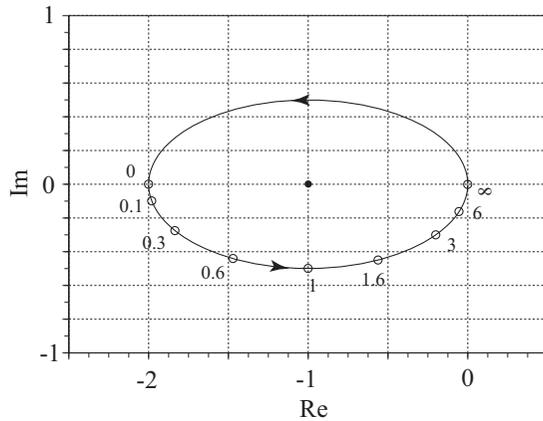


図 6.11: 問題 1 のナイキスト線図

2.

$$L(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(-\omega^2 + 1 + 0.5j\omega)} = \frac{1}{(1 + j\omega)(1 - \omega^2 + j0.5\omega)}$$

よって

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2} \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (0.5\omega)^2}}$$

$$\angle L(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{0.5\omega}{1 - \omega^2}$$

以上から図 6.12 を得る. これから, ナイキスト線図が  $-1 + j0$  を左に見て原点に行くので, 閉ループ系は安定である.

$|L(j\omega)|^2 = 1$  から, 次式を得る.

$$\Omega^2 - 0.75\Omega - 0.75 = 0, \quad \Omega = \omega^2$$

これから  $\Omega = 1.319$ ,  $\omega_P = \sqrt{1.319} = 1.148$  を得る. 位相余裕は

$$\phi_M = \angle L(j\omega_P) + 180^\circ = -48.941^\circ - 118.979^\circ + 180^\circ = 12.08^\circ$$

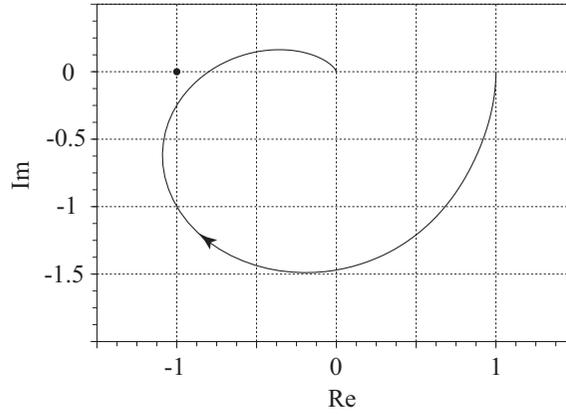


図 6.12: 問題 2 のナイキスト線図

次に  $\omega_Q$  を求める.

$$L(j\omega) = \frac{(1 - j\omega)(1 - \omega^2 - j0.5\omega)}{|1 + j\omega|^2 |1 - \omega^2 + j0.5\omega|^2}$$

から

$$\text{Im}(1 - j\omega)(1 - \omega^2 - j0.5\omega) = \omega^3 - 1.5\omega = \omega(\omega^2 - 1.5) = 0$$

を満たす  $\omega > 0$  として,  $\omega_Q = \sqrt{1.5}$ . ゲイン余裕は

$$G_M = \frac{1}{|L(j\omega_Q)|} = \sqrt{1 + \omega_Q^2} \sqrt{(1 - \omega_Q^2)^2 + (0.5\omega_Q)^2} = 1.25$$



## 第7章 定常特性と制御系の型

出力が目標入力 (reference input) に追従することを目的とする制御系において、目標入力と出力との差 (制御偏差 (control error) または単に偏差 (error) という) が問題となる。制御の途中においても最終においても偏差が小さいことが望まれる。制御の途中の偏差は制御系の過渡応答によって評価できる。過渡応答は、入力のラプラス変換と制御系の伝達関数から求めることができる。また、定常状態における偏差、すなわち、定常偏差 (steady-state error) は制御系の型 (type) に関係している。制御系の型とは、フィードバック系における前向き経路の伝達関数に含まれる積分器 ( $1/s$ ) の数をいう。例えば、積分器が一つ含まれている場合 ( $1/s$ )、その制御系を1型 (type 1) といい、二つ含まれている場合 ( $1/s^2$ )、2型 (type 2) という。ここでは、目標入力として、ステップ関数、ランプ関数、定加速度関数を考え、これらの入力に制御系の出力が追従するために必要とされる制御系の型を示す。

### 7.1 制御系の型と定常偏差

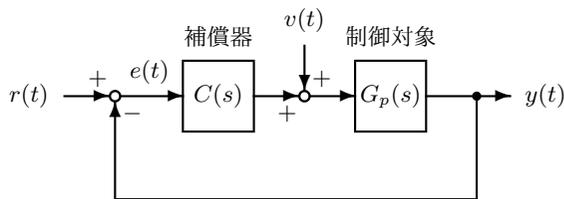


図 7.1: フィードバック制御系

図 7.1 の制御系における制御目的は、外乱  $v(t)$  の影響を抑えながら、出力  $y(t)$  を入力  $r(t)$  に追従させることである。定常特性 (steady-state property) とは、十分時間が経過したときの  $y(t)$  の状態をいい、次式で定義される定常偏差  $e(\infty)$  が 0 に近いほど、制御系は優れた定常特性を持つという。

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{r(t) - y(t)\}$$

$e(\infty) = 0$  とするために制御系に必要とされる条件を調べよう。外乱の影響は後ほど考えることにして、 $v(t) = 0$  とおくと、 $r$  から  $e$  までの伝達関数は

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)}$$

となる。また、これから

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)} R(s)$$

を得る。  $e(\infty)$  は、ラプラス変換の最終値定理から

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)G_p(s)} R(s)$$

と求まる。 つぎに、各目標入力に対する定常偏差を求める。

### 1. ステップ関数

$$r(t) = \mathbf{1}(t), \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

よって

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)}$$

ここで

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G_p(s)$$

とおくと

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}$$

となる。これを定常位置偏差 (steady-state position error) という。また、  $K_p$  を位置偏差定数 (position error constant) という。  $e(\infty) = 0$  となるためには、  $K_p = \infty$  となればよいので、  $C(s)G_p(s)$  が  $1/s$  を一つ以上持てばよい (すなわち、  $C(s)G_p(s)$  が 1 型以上)。

### 2. ランプ関数

$$r(t) = t\mathbf{1}(t), \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

よって

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + C(s)G_p(s))}$$

ここで

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G_p(s)$$

とおくと

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

となる。これを定常速度偏差 (steady-state velocity error) という。また、  $K_v$  を速度偏差定数 (velocity error constant) という。  $e(\infty) = 0$  となるためには、  $K_v = \infty$  となればよいので、  $C(s)G_p(s)$  が  $1/s$  を二つ以上持てばよい (すなわち、  $C(s)G_p(s)$  が 2 型以上)。

## 3. 定加速度関数

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \mathbf{1}(t), \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

よって

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2(1 + C(s)G_p(s))}$$

ここで

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)G_p(s)$$

とおくと

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a}$$

となる。これを定常加速度偏差 (steady-state acceleration error) という。また、 $K_a$  を加速度偏差定数 (acceleration error constant) という。 $e(\infty) = 0$  となるためには、 $K_a = \infty$  となればよいので、 $C(s)G_p(s)$  が  $1/s$  を三つ以上持つばよい (すなわち、 $C(s)G_p(s)$  が 3 型以上)。

次に、外乱  $v(t)$  がある場合を考えよう。簡単のため、 $r(t) = 0$  とすると

$$E(s) = -\frac{G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} V(s)$$

これから

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} V(s)$$

すなわち、 $V(s) = 1/s$  のとき、 $e(\infty) = 0$  とするためには、 $C(s)$  が  $1/s$  を含まなければならないことがわかる。このように、外乱を考える場合、型の条件が  $C(s)G_p(s)$  でなく、 $C(s)$  に要求されることに注意する。

$V(s) = 1/s^2$ 、 $V(s) = 1/s^3$  に対しても同様である。

**例題 7.1** 図 7.2 の制御系について以下の問いに答えよ。

- (1) 制御系の型を述べよ。
- (2)  $b_0 = 2$  のとき、ステップ入力  $r(t) = \mathbf{1}(t)$  に対する定常偏差  $e(\infty)$  を求めよ。
- (3) 制御系を安定とし、ランプ入力  $r(t) = t\mathbf{1}(t)$  に対して  $|e(\infty)| < 0.1$  となる  $b_0$  の範囲を求めよ。

[解]

(1) 1 型

(2)

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CG_p} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{2}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + 2} = 0$$

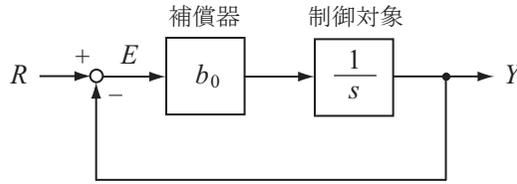


図 7.2: フィードバック制御系

(3)

$$|e(\infty)| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sCG_p} \right| = \left| \frac{1}{b_0} \right| < 0.1 \quad (7.1)$$

一方, 制御系の特性方程式は

$$1 + \frac{b_0}{s} = 0$$

すなわち

$$s + b_0 = 0$$

これから, 安定性条件は

$$b_0 > 0 \quad (7.2)$$

である. よって, (7.1), (7.2) 式から次式を得る.

$$b_0 > 10$$

**例題 7.2** 図 7.3 のフィードバック制御系の極を  $\{-2, -3\}$  とする補償器のパラメータ  $b_0, b_1$  を求めよ. また, ステップ応答とランプ応答から, これらの定常偏差を求めよ.

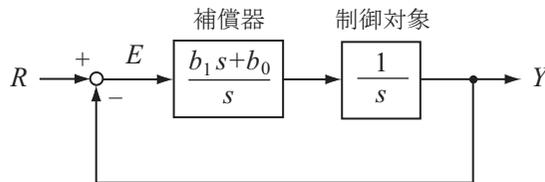


図 7.3: フィードバック制御系

[解]  $R$  から  $Y$  までの伝達関数は

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{b_1 s + b_0}{s^2}}{1 + \frac{b_1 s + b_0}{s^2}} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

となる. よって, 閉ループ系の極が指定極を持つ条件は

$$s^2 + b_1 s + b_0 = (s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$$

これから

$$b_1 = 5, \quad b_0 = 6$$

を得る. ステップ応答は次のように計算できる.

$$Y(s) = \frac{5s + 6}{s^2 + 5s + 6} R(s) = \frac{5s + 6}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{s+3}$$

これを逆ラプラス変換して

$$y(t) = (1 + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}) \mathbf{1}(t)$$

$y(t)$  のグラフを図 7.4 に示す. 定常偏差は

$$e(\infty) = 1 - y(\infty) = 0$$

となる.

ランプ応答は次のように計算できる.

$$Y(s) = \frac{5s + 6}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

これを逆ラプラス変換して

$$y(t) = (t - e^{-2t} + e^{-3t}) \mathbf{1}(t)$$

$y(t)$  のグラフを図 7.5 に示す. 定常偏差は

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{t - y(t)\} = 0$$

となる.

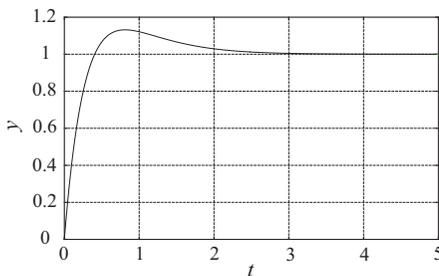


図 7.4: 例題 7.2 のステップ応答

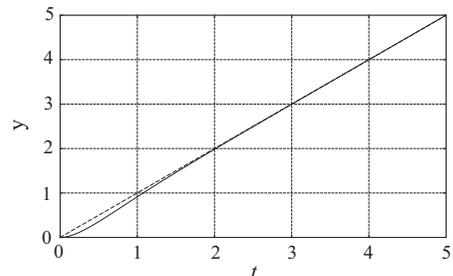


図 7.5: 例題 7.2 のランプ応答

## 7.2 演習問題

1. 図 7.6 の制御系について以下の問いに答えよ.

(1) 制御系の型を述べよ.

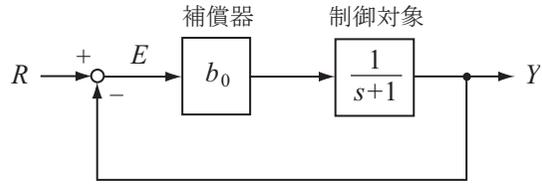


図 7.6: フィードバック制御系

(2) 制御系を安定とし、ステップ入力  $r(t) = \mathbf{1}(t)$  に対する定常偏差を  $|e(\infty)| < 0.05$  とする  $b_0$  の範囲を求めよ.

2. 図 7.7 のフィードバック制御系の極を  $\{-2, -3, -4\}$  とする補償器のパラメータ  $a_0, b_0, b_1$  を求めよ. また, ステップ応答とランプ応答から, これらの定常偏差を求めよ.

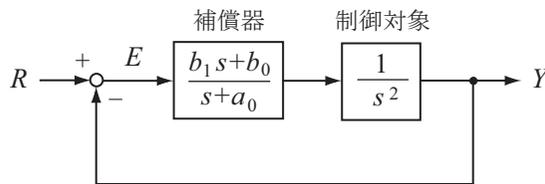


図 7.7: フィードバック制御系

## 第7章の演習問題の解答

1. (1) 0 型

(2)

$$|e(\infty)| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \right| = \left| \frac{1}{1+b_0} \right| < 0.05 \quad (\text{A1})$$

一方, 制御系の特性方程式は

$$1 + \frac{b_0}{s+1} = 0$$

すなわち

$$s+1+b_0=0$$

これから, 安定性条件は

$$1+b_0 > 0 \quad (\text{A2})$$

(A1), (A2) 式から,  $1+b_0 > 20$ , すなわち

$$b_0 > 19$$

2.  $R$  から  $Y$  までの伝達関数は

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{b_1 s + b_0}{s^2(s+a_0)}}{1 + \frac{b_1 s + b_0}{s^2(s+a_0)}} = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_0 s^2 + b_1 s + b_0}$$

となる. よって, 閉ループ系の極が指定極を持つ条件は

$$s^3 + a_0 s^2 + b_1 s + b_0 = (s+2)(s+3)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$$

これから

$$a_0 = 9, \quad b_1 = 26, \quad b_0 = 24$$

を得る. ステップ応答は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{26s+24}{s^3+9s^2+26s+24} R(s) = \frac{26s+24}{s(s+2)(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{7}{s+2} - \frac{18}{s+3} + \frac{10}{s+4} \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換して

$$y(t) = (1 + 7e^{-2t} - 18e^{-3t} + 10e^{-4t}) \mathbf{1}(t)$$

 $y(t)$  のグラフを図 7.8 に示す. 定常偏差は次式となる.

$$e(\infty) = 1 - y(\infty) = 0$$

ランプ応答は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{26s + 24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} R(s) = \frac{26s + 24}{s^2(s+2)(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{7}{2} \left( \frac{1}{s+2} \right) + \frac{6}{s+3} - \frac{5}{2} \left( \frac{1}{s+4} \right) \end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換して

$$y(t) = \left( t - \frac{7}{2}e^{-2t} + 6e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-4t} \right) \mathbf{1}(t)$$

$y(t)$  のグラフを図 7.9 に示す. 定常偏差は次式となる.

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{t - y(t)\} = 0$$

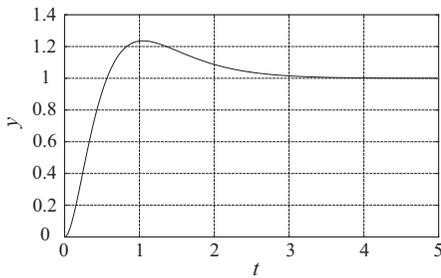


図 7.8: 問題 2 のステップ応答

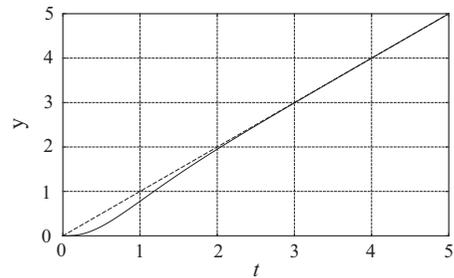


図 7.9: 問題 2 のランプ応答

## 第8章 制御系の性能評価

制御系の性能を評価する方法は種々あるが、直接的な方法として、設計された制御系のステップ応答によって評価する方法と制御系の入出力間の周波数特性（ゲイン特性）によって評価する方法がある。制御系の性能を評価する際に見るステップ応答とゲイン特性の特性値を紹介し、各特性値の意味と良好な性能を持つための特性値について、具体的な制御系によって説明する。

### 8.1 ステップ応答とゲイン特性による評価

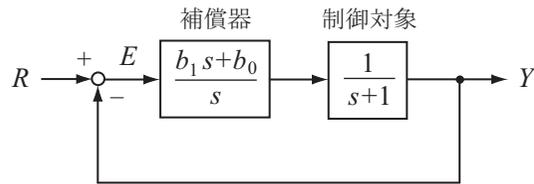


図 8.1: フィードバック制御系

図 8.1 の制御系を考える。  $R$  から  $Y$  までの伝達関数は次式である。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + (1 + b_1)s + b_0}$$

この特性多項式が 2 次要素の標準形の分母となるように補償器のパラメータ  $b_0, b_1$  を選ぶものとする。すなわち

$$s^2 + (1 + b_1)s + b_0 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

これから

$$b_1 = 2\zeta\omega_n - 1, \quad b_0 = \omega_n^2$$

を得る。

a.  $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$  の場合

$$\zeta = 0.2, \quad \omega_n = 2$$

に対するステップ応答を図 8.2 に示す。ステップ応答に対して次の特性値が定義される。

1. オーバーシュート（最大行過ぎ量）(overshoot) :  $A_1$ , 最終値に対してパーセント表示する場合が多い。

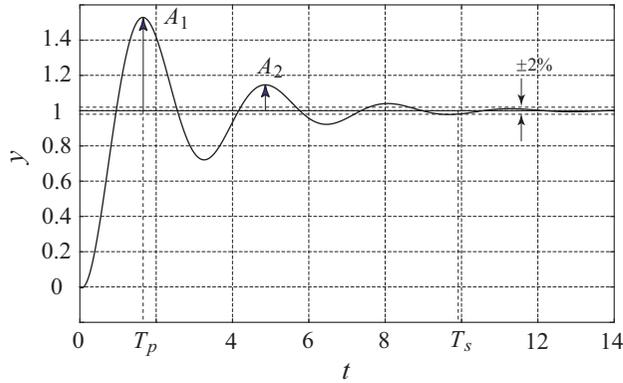


図 8.2: 図 8.1 の制御系のステップ応答 :  $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$

2. 行過ぎ時間 (peak time) :  $T_p$
3. 減衰比 (decay ratio) :  $A_2/A_1$
4. 整定時間 (settling time) :  $T_s$ , ステップ応答が最終値の  $\pm 2\%$  の範囲に収まるまでの時間 (5% という基準もある) .
5. 定常偏差 (steady-state error) :  $e(\infty)$ , 目標値と最終値との差.

この場合, ステップ応答の各特性値は以下のとおりである.

$$A_1 = 0.52 \text{ (52\%)}, T_p = 1.66, \frac{A_2}{A_1} = 0.28, T_s = 9.91, e(\infty) = 0$$

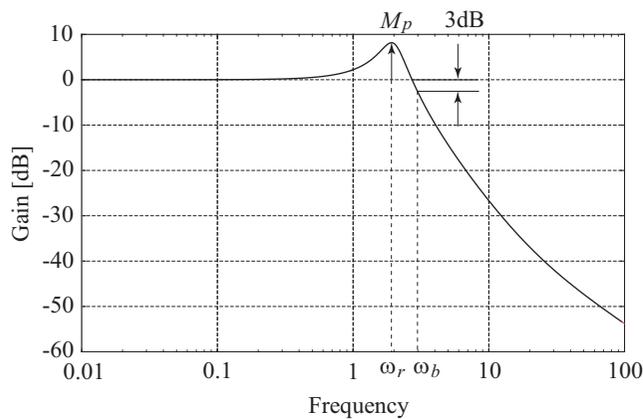


図 8.3: 図 8.1 の制御系のゲイン特性 :  $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$

制御系のゲイン特性を図 8.3 に示す. ゲイン特性に対して次の特性値が定義される.

1. ピークゲイン (共振ピーク) (resonant peak) :  $M_p$

2. 共振周波数 (resonant frequency) :  $\omega_r$
3. バンド幅 (帯域幅) (bandwidth) :  $\omega_b$ , ゲインが定常ゲイン  $|G(0)|$  の  $1/\sqrt{2} \simeq 0.707$  倍 (3dB 低下) となる角周波数.

$M_p$  が大きくなると振動的な系となる. 制御系が適度な減衰を持つためには

$$M_p = 1.1 (0.828\text{dB}) \sim 1.5 (3.52\text{dB})$$

の範囲がよいとされる. また, 目標入力の角周波数が  $\omega_b$  より大きくなると, 出力が入力に追従できなくなる. よって,  $\omega_b$  は制御系の速応性の目安として使われる. 図 8.3 の場合, ゲイン特性の各特性値は次のとおりである.

$$M_p = 2.56 (8.16\text{dB}), \quad \omega_r = 1.92, \quad \omega_b = 3.03$$

b.  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ ,  $\omega_n = 2$  の場合

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_n = 2$$

に対するステップ応答とゲイン特性を図 8.4, 8.5 に示す.

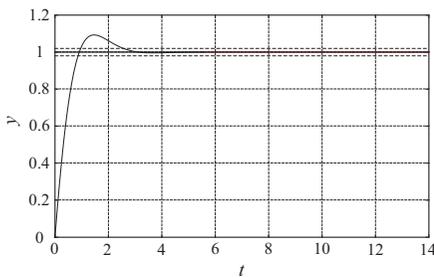


図 8.4: 図 8.1 の制御系のステップ  
応答 :  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 2$

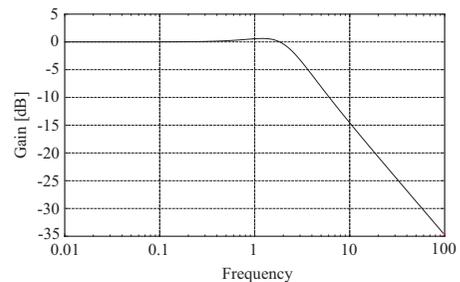


図 8.5: 図 8.1 の制御系のゲイン  
特性 :  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 2$

ステップ応答の特性値は

$$A_1 = 0.09 (9\%), \quad T_p = 1.49, \quad T_s = 2.55, \quad e(\infty) = 0$$

ゲイン特性の特性値は

$$M_p = 1.073 (0.613\text{dB}), \quad \omega_r = 1.205, \quad \omega_b = 2.925$$

c.  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ ,  $\omega_n = 0.6$  の場合

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_n = 0.6$$

に対するステップ応答とゲイン特性を図 8.6, 8.7 に示す.

ステップ応答の特性値は

$$A_1 = 0.048 (4.8\%), \quad T_p = 7.80, \quad T_s = 10.40, \quad e(\infty) = 0$$

ゲイン特性の特性値は

$$M_p = 1.0005 (4.4 \times 10^{-3}\text{dB}), \quad \omega_r = 0.107, \quad \omega_b = 0.619$$

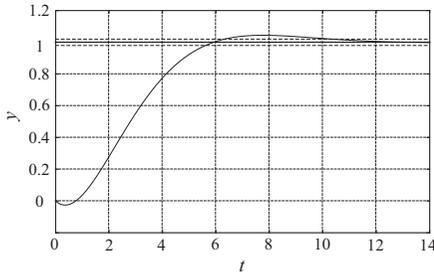


図 8.6: 図 8.1 の制御系のステップ  
応答 :  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 0.6$

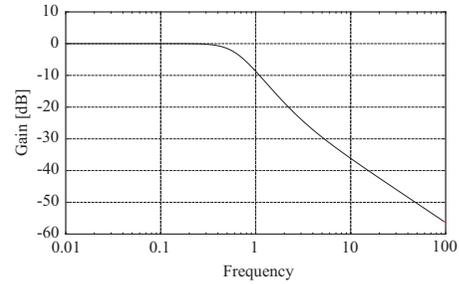


図 8.7: 図 8.1 の制御系のゲイン  
特性 :  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 0.6$

注意 ゲイン特性のみに着目する上記の評価方法では、評価する伝達関数を最小位相推移系（伝達関数が右半面に零点も極も持たない系．同じゲイン特性を持つ伝達関数のうち、位相遅れが最小となる．）と仮定している．例えば、次の伝達関数のゲイン特性と位相特性を見てみよう．

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

ゲイン特性は

$$|G(j\omega)| = \frac{|1-j\omega|}{|1+j\omega|} = 1$$

で一定であるが、位相特性は

$$\angle G(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1+j\omega) = \tan^{-1} \frac{-\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1} = -2 \tan^{-1} \omega$$

となり、最大  $180^\circ$  遅れる（図 8.8 参照）．

最小位相推移系に対して、ゲイン勾配が一定であるとき、ゲインと位相との間に次の関係がある．

$$\text{位相} = \frac{\text{ゲイン勾配 [dB/dec]}}{20} \times 90^\circ$$

よって、ゲイン勾配が  $0\text{dB/dec}$  であれば、位相は  $0^\circ$  となる．

## 8.2 2次要素の標準形の特性

2次要素の標準形

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

を規範として制御系を設計する場合が多いので、これに対するステップ応答とゲイン特性について述べる．

ステップ応答は次式で与えられる．

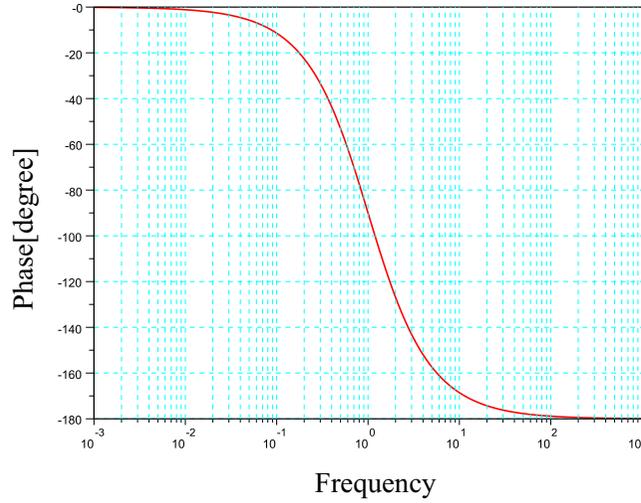


図 8.8:  $G(s) = (1 - s)/(1 + s)$  の位相特性

1.  $0 \leq \zeta < 1$  の場合

$$y(t) = \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right\} \mathbf{1}(t) \tag{8.1}$$

ただし

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

2.  $\zeta = 1$  の場合

$$y(t) = \{ 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \} \mathbf{1}(t)$$

ステップ応答とゲイン特性をそれぞれ図 8.9, 8.10 に示す.

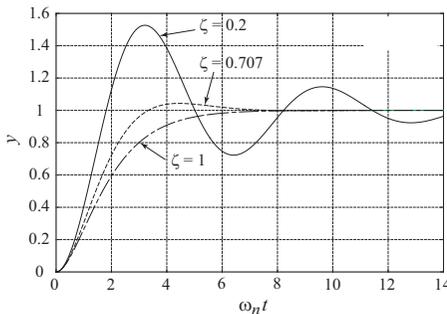


図 8.9: 2次要素の標準形のステップ応答 :  $\zeta = 0.2, 0.707, 1$

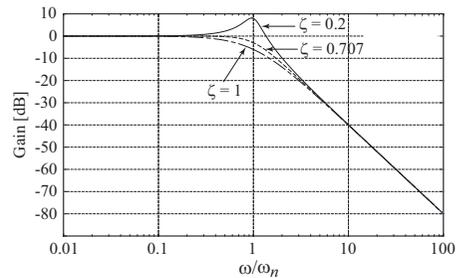


図 8.10: 2次要素の標準形のゲイン特性 :  $\zeta = 0.2, 0.707, 1$

(8.1) 式から,  $0 \leq \zeta < 1$  に対して行過ぎ時間  $T_p$  とオーバーシュート  $A_1$  が

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad A_1 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (A_1 = 100 \times e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\%) \quad (8.2)$$

と得られる. また, ピークゲイン  $M_p$  は次式で計算できる.

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.3)$$

$\zeta$  と  $A_1$  の関係,  $\zeta$  と  $M_p$  の関係をそれぞれ図 8.11, 8.12 に示す.

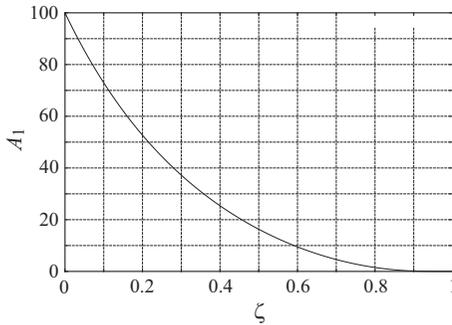


図 8.11: 2次要素の標準形の  $\zeta$  と  $A_1$  の関係

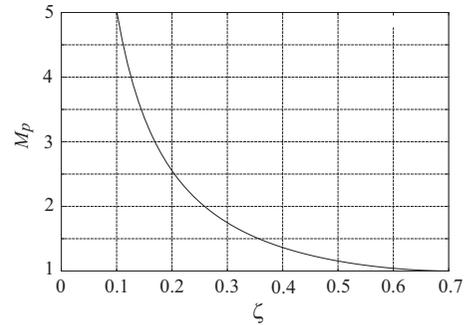


図 8.12: 2次要素の標準形の  $\zeta$  と  $M_p$  の関係

### 8.3 演習問題

1. 図 8.13 の制御系の特性多項式が 2 次要素の標準形の特性多項式となるように  $b_0, b_1$  を設計せよ. ただし,  $\zeta = 0.3, \omega_n = 1$  とする. また, ステップ応答を計算し, 次の特性値を求めよ.

オーバーシュート  $A_1$ , 行過ぎ時間  $T_p$ , 減衰比  $\frac{A_2}{A_1}$ , 整定時間  $T_s$

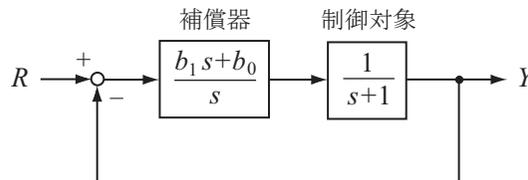


図 8.13: フィードバック制御系

2. (8.2) 式を証明せよ.
3. (8.3) 式を証明せよ.

## 8.3 の演習問題の解答

1.

$$b_1 = 2\zeta\omega_n - 1 = 2 \times 0.3 \times 1 - 1 = -0.4, \quad b_0 = \omega_n^2 = 1$$

ステップ応答を以下に求める.

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{-0.4s + 1}{s(s^2 + 0.6s + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 0.6s + 1}$$

分子の恒等式

$$K_1(s^2 + 0.6s + 1) + (K_2 s + K_3)s = -0.4s + 1$$

から

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -1, \quad K_3 = -1$$

よって

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{s^2 + 0.6s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{(s + 0.3)^2 + 0.91} = \frac{1}{s} - \frac{(s + 0.3) + 0.7}{(s + 0.3)^2 + 0.91}$$

これを逆ラプラス変換して

$$y(t) = \left\{ 1 - e^{-0.3t} \left( \cos \sqrt{0.91}t + \frac{0.7}{\sqrt{0.91}} \sin \sqrt{0.91}t \right) \right\} \mathbf{1}(t)$$

を得る. このステップ応答のグラフを図 8.14 に示す.

$$a = \sqrt{0.91}, \quad b = \frac{0.7}{\sqrt{0.91}}$$

とおく.  $y(t)$  が極値をとる条件は次式である.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (0.3e^{-0.3t} - abe^{-0.3t}) \cos at + (ae^{-0.3t} + 0.3be^{-0.3t}) \sin at \\ &= -0.4e^{-0.3t} \cos at + (a + 0.3b)e^{-0.3t} \sin at = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\tan(at + n\pi) = \frac{0.4}{a + 0.3b}, \quad n \text{ は整数}$$

これから

$$t = \frac{1}{a} \left( \tan^{-1} \frac{0.4}{a + 0.3b} - n\pi \right)$$

を得る.  $T_p$  は上式に  $n = -1$  を代入して求まる.

$$T_p = 3.6375, \quad A_1 = 0.3973 \text{ (39.7\%)}$$

$A_2$  の時刻は  $n = -3$  として求まる.

$$t = 10.224, \quad A_2 = 0.0551$$

よって、減衰比は

$$\frac{A_2}{A_1} = 0.139$$

となる。また、図から次を得る。

$$T_s = 13.7$$

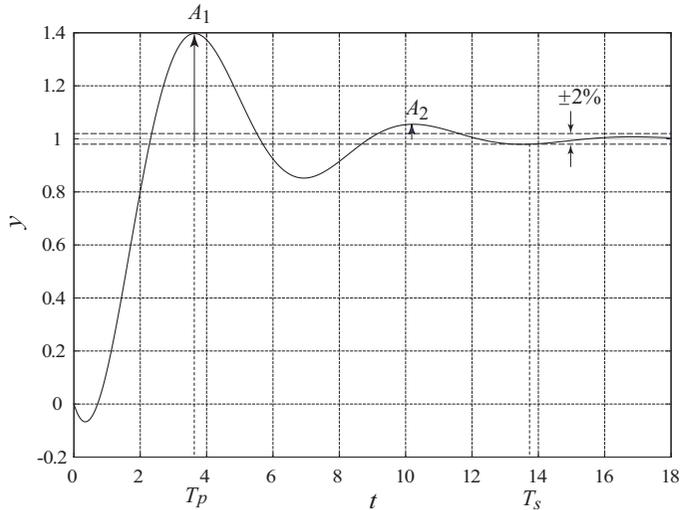


図 8.14: 問題 1 のステップ応答

```
-----
scilab-4.1
Copyright (c) 1989-2006
Consortium Scilab (INRIA, ENPC)
-----
```

```
-->t=0:0.01:18;
-->a=sqrt(0.91);
-->b=0.7/a;
-->y=1-exp(-0.3*t).*(cos(a*t)+b*sin(a*t));
-->plot2d(t,y)
-->xgrid()
```

2. (8.2) 式の証明 まず、行過ぎ時間  $T_p$  を求める。(8.1) 式を  $t$  で微分し、これを 0 とおけば、ピークの条件を得る。

$$\dot{y}(t) = \zeta\omega_n \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_d \cos(\omega_d t + \theta) = 0$$

これから、次式を得る.

$$\tan(\omega_d t + \theta - n\pi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, \quad n \text{ は整数}$$

上式から

$$t = \frac{n\pi}{\omega_d}$$

を得,  $t > 0$  の範囲で最小のものとして  $T_p$  が求まる.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

これを (8.1) 式に代入すると  $y$  のピーク値が得られる.

$$y(T_p) = 1 - \frac{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \theta) = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

よって,  $A_1$  は次式となる.

$$A_1 = y(T_p) - 1 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

3. (8.3) 式の証明 ゲインの計算式は次式である.

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

ゲインの極大点を与える  $\Omega$  を, ゲインの逆数の 2 乗の極小点を与える  $\Omega$  として求める.  
ゲインの逆数の 2 乗  $(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2$  を  $\Omega$  で微分して 0 とおくと

$$2(1-\Omega^2)(-2\Omega) + 8\zeta^2\Omega = 4\Omega(2\zeta^2 - 1 + \Omega^2) = 0$$

これから, ゲインの極大点を与える  $\Omega$  が

$$\Omega_p = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

と得られる. これをゲインの式に代入すれば, ゲインの極大値が

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

と求まる. また,  $\Omega_p$  の式から, ゲイン曲線に極大点が現れるのは  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  のときに限られることがわかる.



## 制御系の性能評価（続き）

今回は、開ループ周波数特性 (open-loop frequency characteristics) (ゲインと位相) から、制御系の性能 (performance of control system) を評価する方法を説明する。すなわち、制御系の安定度 (relative stability) (減衰性 (damping property)), 速応性 (speed of response), 目標値追従性 (steady-state accuracy), 外乱除去特性 (disturbance rejection property), ロバスト安定性 (robust stability) と開ループ周波数特性との関係を示す。開ループ伝達関数は補償器の伝達関数と制御対象の伝達関数の積であることが多いので、開ループ伝達関数の設計方針がわかれば、補償器の設計方針もわかる。具体的な制御系の例を用いて、各性能と開ループ周波数特性との関係を見ていく。

### 8.4 開ループ周波数特性による評価

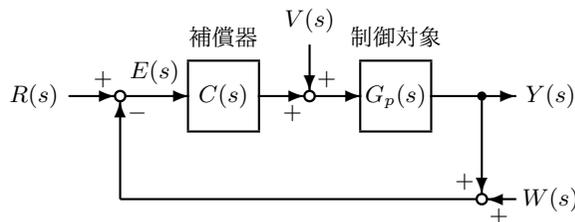


図 8.15: フィードバック制御系

図 8.15 に示すフィードバック制御系の諸特性を開ループ周波数応答

$$G_0(j\omega) = C(j\omega)G_p(j\omega)$$

によって評価する方法を紹介する。また、以後、開ループ周波数応答を扱う評価・設計において、 $G_0(s)$  は 0 以外の不安定極を持たないと仮定する。

#### 8.4.1 安定度

安定度の指標として、位相余裕  $\phi_M$  とゲイン余裕  $G_M$  が用いられる。経験上、良いとされる値は次のとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{サーボ系} : \phi_M = 40^\circ \sim 60^\circ, \quad G_M = 3.16 (10\text{dB}) \sim 10 (20\text{dB}) \\ \text{レギュレータ} : \phi_M \geq 20^\circ, \quad G_M = 1.41 (3\text{dB}) \sim 3.16 (10\text{dB}) \end{array} \right\}$$

2次系に限定すれば、 $\phi_M < 70^\circ$  という条件の下で

$$\phi_M \simeq 100\zeta$$

が成立する。この関係は、一般の制御系設計においても、 $\phi_M$  からおよその減衰特性を評価するとき利用される。

### 8.4.2 速応性

8.1節で述べたように、制御系の速応性はバンド幅  $\omega_b$  で見積もることができる。 $\phi_M \leq 90^\circ$  のとき、制御系のバンド幅  $\omega_b$  とゲイン交差周波数  $\omega_P$  との間に

$$\omega_P \leq \omega_b \tag{8.4}$$

が成り立つので、 $\omega_P$  が大きいとき、制御系の速応性も大きくなる。よって、開ループ周波数特性では制御系の速応性の目安として  $\omega_P$  を採用することができる。

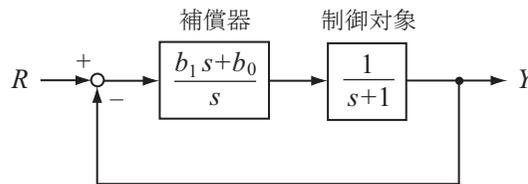


図 8.16: フィードバック制御系

図 8.16 は 8.1 節で扱った制御系である。8.1 節と同様に、この制御系の特性多項式が 2 次要素の標準形の分母  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$  となるようにパラメータ  $b_0, b_1$  を次式で与える。

$$b_1 = 2\zeta\omega_n - 1, \quad b_0 = \omega_n^2$$

開ループ伝達関数は

$$G_0(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s+1)} = \frac{(2\zeta\omega_n - 1)s + \omega_n^2}{s(s+1)}$$

である。8.1 節で与えたパラメータに対して位相余裕  $\phi_M$ 、ゲイン交差周波数  $\omega_P$ 、ゲイン余裕  $G_M$ 、位相交差周波数  $\omega_Q$  を求めよう。

a.  $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$  の場合

$$G_0(s) = \frac{-0.2s + 4}{s(s+1)}$$

$$\phi_M = 22.58^\circ, \quad \omega_P = 1.88, \quad G_M = 5 \text{ (13.98dB)}, \quad \omega_Q = 4.47$$

$\phi_M$  から  $\zeta \simeq 0.23$  と推定される。ナイキスト線図を図 8.17 に、ボード線図を図 8.19, 8.20 に示す。制御系のバンド幅は  $\omega_b = 3.03$  であり、 $\omega_b \geq \omega_P$  であることが確認できる。

b.  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ ,  $\omega_n = 2$  の場合

$$G_0(s) = \frac{1.828s + 4}{s(s + 1)}$$

$$\phi_M = 69.97^\circ, \omega_P = 2.31, G_M = \infty$$

$\phi_M$  から  $\zeta \simeq 0.70$  と推定される. ナイキスト線図を図 8.18 に, ボード線図を図 8.21, 8.22 に示す. 制御系のバンド幅は  $\omega_b = 2.93 \geq \omega_P$  である.

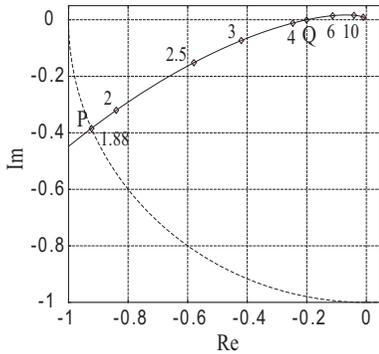


図 8.17:  $G_0(s)$  のナイキスト線図:  
 $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$

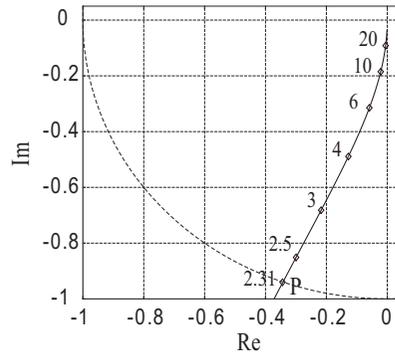


図 8.18:  $G_0(s)$  のナイキスト線図:  
 $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707, \omega_n = 2$

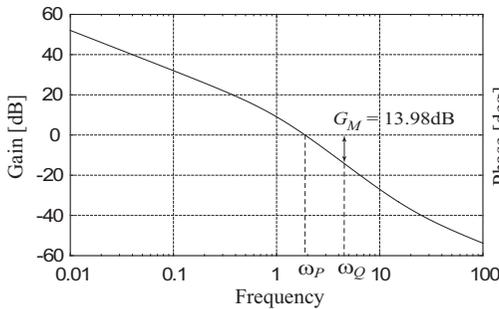


図 8.19:  $G_0(s)$  のゲイン曲線:  $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$

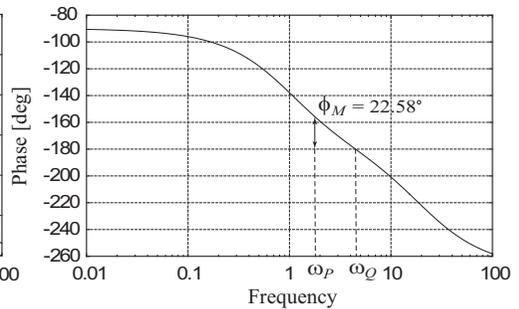


図 8.20:  $G_0(s)$  の位相曲線:  $\zeta = 0.2, \omega_n = 2$

c.  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ ,  $\omega_n = 0.6$  の場合

$$G_0(s) = \frac{-0.151s + 0.36}{s(s + 1)}$$

$$\phi_M = 62.78^\circ, \omega_P = 0.344, G_M = 6.60 (16.4\text{dB}), \omega_Q = 1.54$$

$\phi_M$  から  $\zeta \simeq 0.63$  と推定される. ナイキスト線図を図 8.23 に, ボード線図を図 8.24, 8.25 に示す. 制御系のバンド幅は  $\omega_b = 0.62 \geq \omega_P$  である.

三つの設計例に対する  $\zeta$  とその推定値  $\phi_M/100$ ,  $\omega_b$  とその下界  $\omega_P$  をそれぞれ表 8.1, 8.2 に示す.

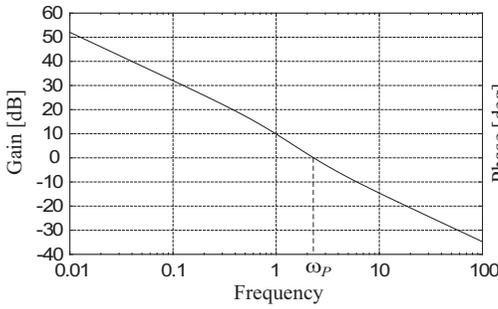


図 8.21:  $G_0(s)$  のゲイン曲線:  $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707, \omega_n = 2$

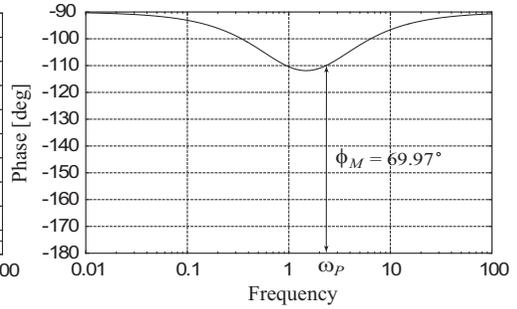


図 8.22:  $G_0(s)$  の位相曲線:  $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707, \omega_n = 2$

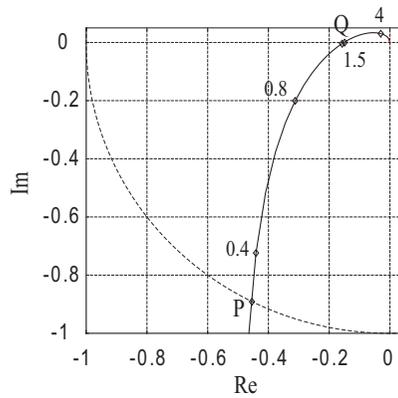


図 8.23:  $G_0(s)$  のナイキスト線図:  $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707, \omega_n = 0.6$

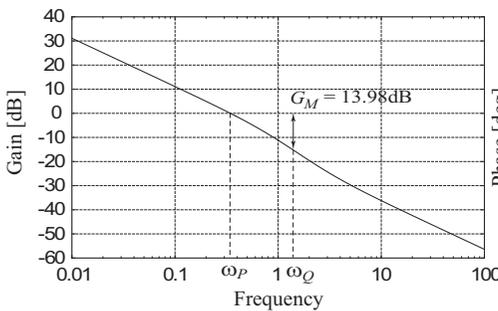


図 8.24:  $G_0(s)$  のゲイン曲線:  $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707, \omega_n = 0.6$

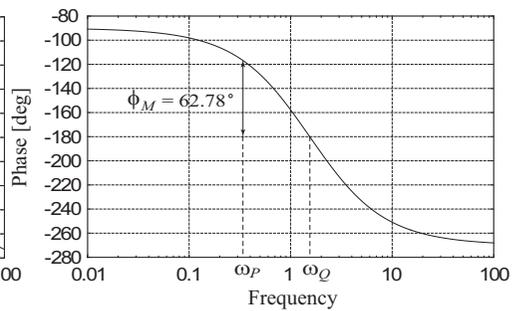


図 8.25:  $G_0(s)$  の位相曲線:  $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707, \omega_n = 0.6$

### 8.4.3 目標値追従性

図 8.15 から,  $R(s)$  から  $E(s)$  までの伝達関数は

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} \tag{8.5}$$

表 8.1:  $\zeta$  とその推定値  $\phi_M/100$ 

case	$\zeta$	$\phi_M/100$
a	0.2	0.23
b	0.707	0.70
c	0.707	0.63

表 8.2:  $\omega_b$  とその下界  $\omega_P$ 

case	$\omega_b$	$\omega_P$
a	3.03	1.88
b	2.93	2.31
c	0.62	0.344

となる。ここで

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

とおく ( $S(s)$  は感度関数 (sensitivity function) と呼ばれる)。  $|S(j\omega)|$  が小さいほど目標値追従性は良いと判断できるので、制御系が良好な目標値追従性を持つ条件は、目標値の周波数域で

$$|S(j\omega)| \ll 1$$

すなわち

$$|G_0(j\omega)| \gg 1$$

となることである。

#### 8.4.4 外乱除去特性

図 8.15 から、 $V(s)$  から  $Y(s)$  までの伝達関数は ( $R(s) = 0$  とおく)

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_0(s)} = G_p(s)S(s) \quad (8.6)$$

となる。よって、 $|G_p(j\omega)S(j\omega)|$  が小さいほど外乱除去特性は良いと判断できるので、制御系が良好な外乱除去特性を持つ条件は、外乱の周波数域で

$$|G_p(j\omega)S(j\omega)| \ll 1$$

すなわち

$$|C(j\omega)| \gg 1$$

となることである。

図 8.16 の制御系に外乱を加えた図 8.26 の制御系を考える。この制御系の目標値追従性と外乱除去特性を調べよう。上述の設計パラメータを与えるものとする。すなわち、次の場合を考える。

(a)  $\zeta = 0.2$ ,  $\omega_n = 2$  の場合

(b)  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ ,  $\omega_n = 2$  の場合

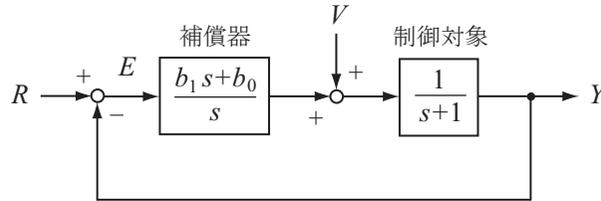


図 8.26: フィードバック制御系

(c)  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ ,  $\omega_n = 0.6$  の場合

### 1. 目標値追従性

角周波数  $\omega = 0.1$ , 振幅 1 の正弦波目標値に対する定常誤差  $\epsilon$  は次のようになる.

(a)  $\omega = 0.1$  に対して  $|G_0(j\omega)| = 39.80$  (32.0dB) よって (8.5) 式から

$$\begin{aligned}\epsilon &= |S(j0.1)| = \left| \frac{1}{1 + G_0(j0.1)} \right| \\ &\simeq \frac{1}{|G_0(j0.1)|} = \frac{1}{39.80} \simeq 0.025 \text{ (2.5 \%)}\end{aligned}$$

(b)  $\omega = 0.1$  に対して  $|G_0(j\omega)| = 39.84$  (32.0dB) よって

$$\epsilon \simeq \frac{1}{|G_0(j0.1)|} = \frac{1}{39.84} \simeq 0.025 \text{ (2.5 \%)}$$

(c)  $\omega = 0.1$  に対して  $|G_0(j\omega)| = 3.59$  (11.1dB) よって

$$\epsilon \simeq \frac{1}{|G_0(j0.1)|} = \frac{1}{3.59} \simeq 0.279 \text{ (27.9 \%)}$$

### 2. 外乱除去特性

角周波数  $\omega = 0.1$ , 振幅 1 の正弦波外乱に対する定常誤差  $\epsilon$  は次のようになる.

$$G_p = \frac{1}{s+1}$$

から,  $G_p$  の折れ点周波数は  $\omega = 1$  であるので,  $\omega = 0.1$  で  $|G_p(j0.1)| \simeq 1$  となる. よって (8.6) 式から

$$\epsilon = |G_p(j0.1)S(j0.1)| = |G_p(j0.1)||S(j0.1)| \simeq |S(j0.1)|$$

となり, この場合,  $\epsilon$  は目標値追従性の場合と同じ式で計算できることがわかる.

$v(t) = \sin(0.1t)\mathbf{1}(t)$ ,  $r(t) = 0$  としたときの制御系の応答  $y(t)$  を図 8.27, 8.28 に示す.

## 8.5 演習問題

1. 図 8.29 の制御系について以下の問に答えよ.

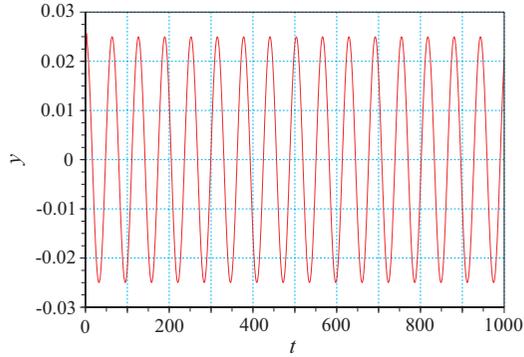


図 8.27:  $v = \sin(0.1t)\mathbf{1}(t)$ ,  $r(t) = 0$  に対する制御系の応答  $y(t)$ :  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707, \omega_n = 2$

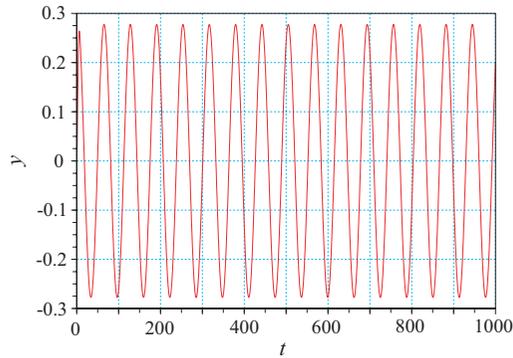


図 8.28:  $v = \sin(0.1t)\mathbf{1}(t)$ ,  $r(t) = 0$  に対する制御系の応答  $y(t)$ :  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707, \omega_n = 0.6$

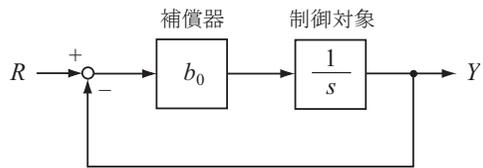


図 8.29: フィードバック制御系

- (1) ゲイン交差周波数が  $\omega_p = 2$  となるように補償器のパラメータ  $b_0$  を設計せよ。
- (2) 制御系のバンド幅  $\omega_b$  を求めよ。
- (3) 角周波数  $\omega = 0.1$  の振幅 1 の正弦波目標値に対する定常誤差  $\epsilon$  が 0.02 となるように  $b_0$  を設計せよ。

## 8.5 の演習問題の解答

1. (1) 開ループ伝達関数は

$$G_0(s) = \frac{b_0}{s}$$

ゲイン交差周波数は  $|G_0(j\omega)| = 1$  を満たす  $\omega$  として求められる.

$$G_0(j\omega) = \left| \frac{b_0}{j\omega} \right| = \frac{b_0}{\omega} = 1$$

これから,  $b_0 = \omega_P = 2$  を得る.  $G_0(s)$  のゲイン曲線を図 8.30 に示す.

(2) 制御系の伝達関数は

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s + b_0} = \frac{1}{\frac{1}{b_0}s + 1}$$

1次遅れ系の場合, 折れ点周波数  $b_0$  でゲインが  $-3\text{dB}$  となる. よって, バンド幅は  $\omega_b = b_0 = 2$ .  $Y(s)/R(s)$  のゲイン曲線を図 8.31 に示す.

(3)

$$\epsilon = |S(j0.1)| = \left| \frac{1}{1 + G_0(j0.1)} \right| \simeq \frac{1}{|G_0(j0.1)|} = 0.02$$

よって

$$|G_0(j0.1)| = \frac{b_0}{0.1} = \frac{1}{0.02} = 50$$

これから,  $b_0 = 50 \times 0.1 = 5$  (厳密解は  $\sqrt{25 - 0.1^2} \simeq 4.999$ ).

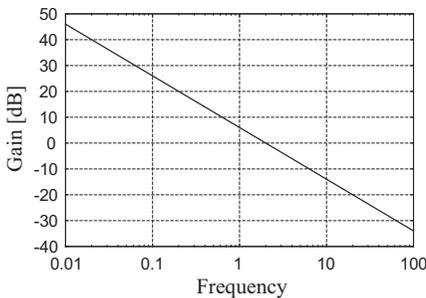


図 8.30:  $G_0(s)$  のゲイン曲線:  $b_0 = 2$

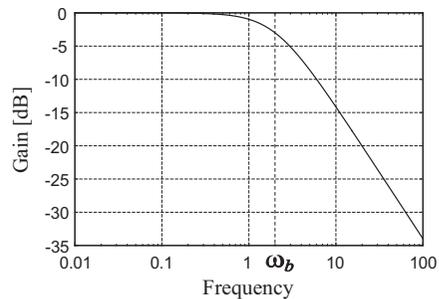


図 8.31:  $Y(s)/R(s)$  のゲイン曲線:  $b_0 = 2$

## 制御系の性能評価（続き）

前回に続き、開ループ周波数特性から制御系の性能を評価する方法を説明する。今回は、観測雑音遮断特性 (measurement noise attenuation property), ロバスト安定性と開ループ周波数特性との関係を示す。

### 8.6 開ループ周波数特性による評価

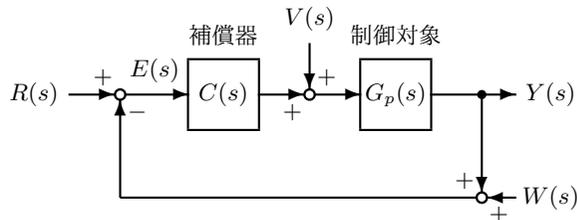


図 8.32: フィードバック制御系

#### 8.6.1 観測雑音遮断特性

ブロック線図から、観測雑音  $W(s)$  から出力  $Y(s)$  までの伝達関数が

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = -\frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

と求まる。ここで

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

とおく。  $T(s)$  は相補感度関数 (complementary sensitivity function) と呼ばれる。すなわち

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = -T(s)$$

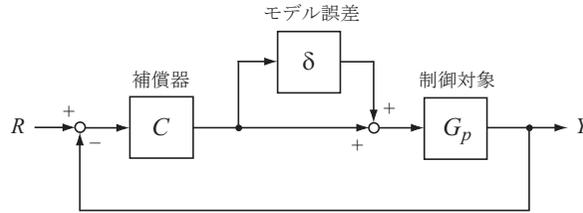
上式から、観測雑音の影響を小さくするには、観測雑音の周波数域で

$$|T(j\omega)| \ll 1$$

すなわち

$$|G_0(j\omega)| \ll 1$$

とすればよい。

図 8.33: モデル誤差  $\delta(s)$  がある制御系

### 8.6.2 ロバスト安定性

制御対象の表現にはモデル誤差 (model error)  $\delta(s)$  が含まれるとする.

$$(1 + \delta(s))G_p(s) \quad (8.7)$$

ただし,  $\delta(s)$  は安定とする. 制御対象に, あるクラスの変動があっても安定性が保たれるとき, 制御系はロバスト安定性を持つという. ナイキストの安定判別法により  $(1 + \delta(j\omega))G_0(j\omega)$  のベクトル軌跡が  $-1 + j0$  を左に見て原点にいけば制御系は安定となる. これから,  $\delta(s)$  が存在しても, ベクトル軌跡が  $-1 + j0$  を囲むほど変動しないように  $|G_0(j\omega)|$  を小さくすれば, 安定化できることがわかる. 特に,  $|\delta(j\omega)|$  が大きくなる周波数域で

$$|G_0(j\omega)| \ll 1$$

とすれば, ロバスト安定性が向上する.

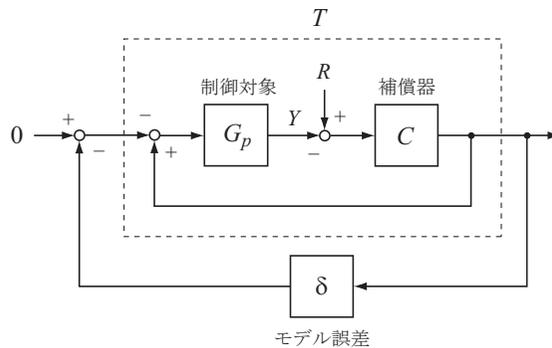


図 8.34: 図 8.33 の等価ブロック線図

ロバスト安定性の具体的条件は次のように求めることができる. すなわち, 図 8.33 を図 8.34 のように変形して, ナイキストの安定条件を適用すると,  $T(s)$ ,  $\delta(s)$  は安定なので,  $T(j\omega)\delta(j\omega)$  のナイキスト線図が  $-1 + j0$  のまわりを回転しないとき閉ループ系は安定となる. よって

$$|T(j\omega)\delta(j\omega)| < 1$$

のとき, ナイキストの安定条件が満たされることがわかる. 上式から, ロバスト安定性の条件として

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|\delta(j\omega)|}$$

を得る。すなわち、ロバスト安定性を向上させるためには、 $|\delta(j\omega)|$  が大きな周波数域で  $|T(j\omega)|$  を小さくしなければならない。

一般に、目標値追従性と外乱除去特性は低周波域 ( $\omega < \omega_L$ ) での条件であり、観測雑音遮断特性とロバスト安定性は高周波域 ( $\omega > \omega_H$ ) での条件である。

以上から、良好なフィードバック制御系を設計するための  $G_0(s)$  ( $C(s)$ ) に関する設計方針は次のようになる。

1. 所望の速応性を持たせるように、ゲイン交差周波数  $\omega_P$  を大きくとる。
2. 安定性を確保するために、十分な位相余裕  $\phi_M$  とゲイン余裕  $G_M$  を持たせる。
3. 良好な目標値追従性（外乱除去特性）を持たせるため、 $\omega < \omega_L$  の低周波域で  $|G_0(j\omega)|$  ( $|C(j\omega)|$ ) を大きくする。
4. 良好な観測雑音遮断特性とロバスト安定性を持たせるため  $\omega > \omega_H$  の高周波域で  $|G_0(j\omega)|$  を小さくする。

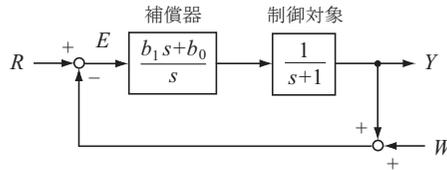


図 8.35: フィードバック制御系

図 8.16 の制御系に観測雑音を加えた図 8.35 の制御系を考える。この制御系の観測雑音遮断特性を調べよう。上述の設計パラメータを与えるものとする。すなわち

$$b_1 = 2\zeta\omega_n - 1, \quad b_0 = \omega_n^2$$

(a)  $\zeta = 0.2, \quad \omega_n = 2$  の場合

(b)  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707, \quad \omega_n = 2$  の場合

(c)  $\zeta = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707, \quad \omega_n = 0.6$  の場合

また、これらのパラメータを与えたときの  $G_0, T$  のゲイン曲線を図 8.36, 8.37 に示す。

目標値  $r$  は 0 とする。角周波数  $\omega = 10$ , 振幅 1 の正弦波観測雑音に対する出力の定常振幅  $\epsilon$  は次のようになる。

(a)  $\epsilon = |T(j10)| = 0.0464$  ( - 26.67dB)

(b)  $\epsilon = |T(j10)| = 0.186$  ( - 14.60dB)

(c)  $\epsilon = |T(j10)| = 0.0156$  ( - 36.16dB)

したがって、観測雑音遮断特性は、(c), (a), (b) の順に良い。このことは図 8.36 のゲイン曲線からも理解できる。

目標値追従性、外乱除去特性、観測雑音遮断特性、ロバスト安定性を評価するときに注目する伝達関数を表 8.3 に示す。

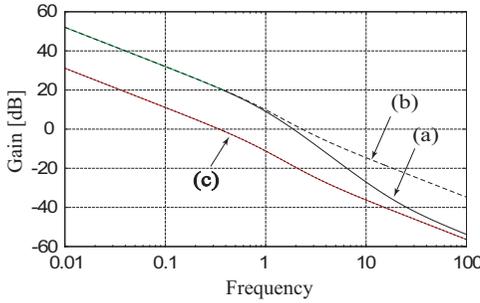
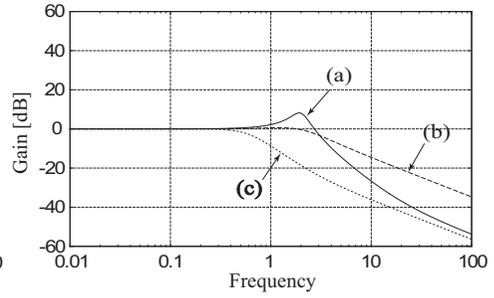
図 8.36:  $G_0$  のゲイン曲線図 8.37:  $T$  のゲイン曲線

表 8.3: 特性に関する伝達関数

特性	伝達関数	伝達関数の表現
目標値追従性	$\frac{E(s)}{R(s)}$	$\frac{1}{1 + G_0(s)} = S(s)$
外乱除去特性	$\frac{Y(s)}{V(s)}$	$\frac{G_p(s)}{1 + G_0(s)} = G_p(s)S(s)$
観測雑音遮断特性	$\frac{Y(s)}{W(s)}$	$-\frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = -T(s)$
ロバスト安定性	図 8.34 参照	$\frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = T(s)$

上記の (a), (b), (c) の場合の  $S$ ,  $G_p S$ ,  $T$  は次のとおりである。

$$S = \frac{1}{1 + G_0} = \frac{1}{1 + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + s}} = \frac{s^2 + s}{s^2 + (1 + b_1)s + b_0}$$

$$G_p S = \frac{G_p}{1 + G_0} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + s}} = \frac{s}{s^2 + (1 + b_1)s + b_0}$$

$$T = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + s}}{1 + \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + s}} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + (1 + b_1)s + b_0}$$

パラメータを代入すると

$$(a) \quad S = \frac{s(s+1)}{s^2 + 0.8s + 4}, \quad G_p S = \frac{s}{s^2 + 0.8s + 4}, \quad T = \frac{-0.2s + 4}{s^2 + 0.8s + 4}$$

$$(b) \quad S = \frac{s(s+1)}{s^2 + 2.8284s + 4}, \quad G_p S = \frac{s}{s^2 + 2.8284s + 4}, \quad T = \frac{1.8284s + 4}{s^2 + 2.8284s + 4}$$

(c)  $S = \frac{s(s+1)}{s^2 + 0.84853s + 0.36}$ ,  $G_p S = \frac{s}{s^2 + 0.84853s + 0.36}$ ,  $T = \frac{-0.15147s + 0.36}{s^2 + 0.84853s + 0.36}$   
 $S$ ,  $G_p S$  のゲイン曲線を図 8.38, 8.39 に示す。

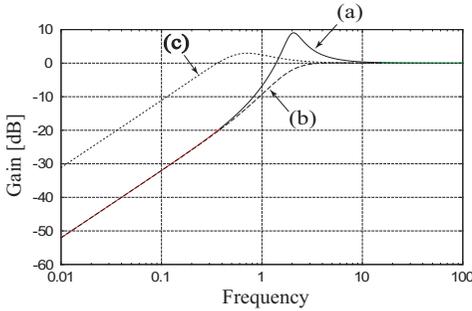


図 8.38:  $S$  のゲイン曲線

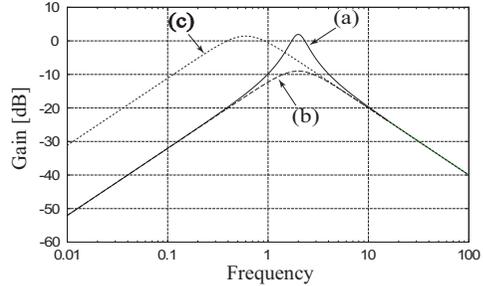


図 8.39:  $G_p S$  のゲイン曲線

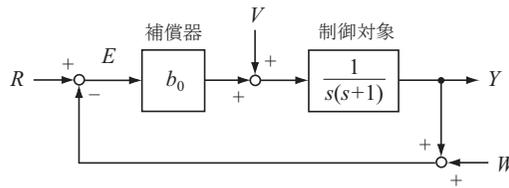


図 8.40: フィードバック制御系

例題 8.1 図 8.40 のフィードバック制御系について以下の問に答えよ。

- (1) 伝達関数  $S$ ,  $G_p S$ ,  $T$  のゲインを計算せよ。
- (2)  $r = \sin 0.1t$ ,  $v = w = 0$ ,  $b_0 = 1, 10$  に対する  $e$  の定常振幅  $\epsilon$  を求めよ。
- (3)  $v = \sin 0.1t$ ,  $r = w = 0$ ,  $b_0 = 1, 10$  に対する  $e$  の定常振幅  $\epsilon$  を求めよ。
- (4)  $w = \sin 10t$ ,  $r = v = 0$ ,  $b_0 = 1, 10$  に対する  $y$  の定常振幅  $\epsilon$  を求めよ。

[解]

(1)

$$G_p = \frac{1}{s(s+1)}, \quad G_0 = \frac{b_0}{s(s+1)}, \quad S = \frac{1}{1+G_0} = \frac{1}{1 + \frac{b_0}{s^2+s}} = \frac{s^2+s}{s^2+s+b_0}$$

$$G_p S = \frac{G_p}{1+G_0} = \frac{\frac{1}{s^2+s}}{1 + \frac{b_0}{s^2+s}} = \frac{1}{s^2+s+b_0}$$

$$T = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{\frac{b_0}{s^2 + s}}{1 + \frac{b_0}{s^2 + s}} = \frac{b_0}{s^2 + s + b_0}$$

これらから

$$|S(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^4 + \omega^2}{(b_0 - \omega^2)^2 + \omega^2}}, \quad |G_p(j\omega)S(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(b_0 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{|b_0|}{\sqrt{(b_0 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

(2)  $b_0 = 1$  の場合,  $\epsilon = |S(j0.1)| = 0.101$ .  $b_0 = 10$  の場合,  $\epsilon = |S(j0.1)| = 0.01$ .

(3)  $b_0 = 1$  の場合,  $\epsilon = |G_p(j0.1)S(j0.1)| = 1.005$ .  $b_0 = 10$  の場合,  $\epsilon = |G_p(j0.1)S(j0.1)| = 0.1$ .

(4)  $b_0 = 1$  の場合,  $\epsilon = |T(j10)| = 0.01$ .  $b_0 = 10$  の場合,  $\epsilon = |T(j10)| = 0.11$ .

伝達関数  $S$ ,  $G_p S$ ,  $T$  のゲイン曲線を図 8.41, 8.42, 8.43 に示す.

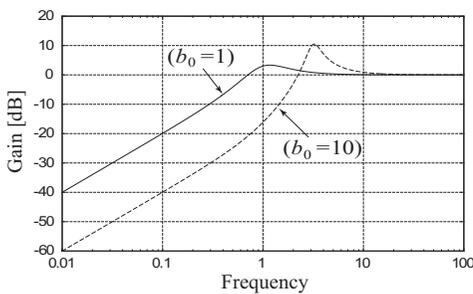


図 8.41:  $S$  のゲイン曲線

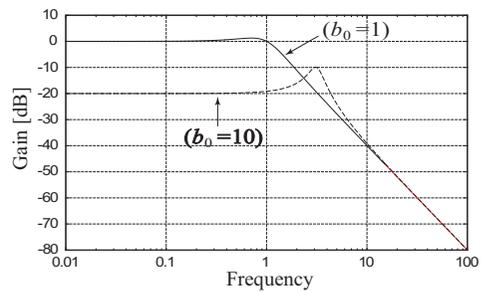


図 8.42:  $G_p S$  のゲイン曲線

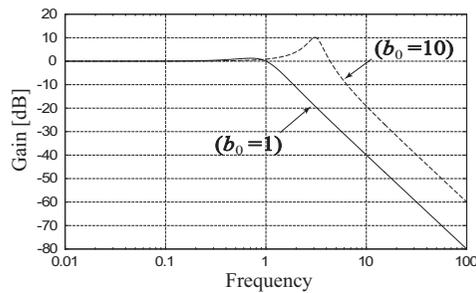


図 8.43:  $T$  のゲイン曲線

## 8.7 演習問題

1. 図 8.35 の制御系で上記の設計パラメータ (a), (b), (c) を与えるものとする. 目標値  $r$  は 0 とする. それぞれの場合について, 角周波数  $\omega = 15$ , 振幅 1 の正弦波観測雑音  $w$  に対する出力の定常振幅  $\epsilon$  を求めよ.
2. 図 8.44 の制御系において  $r = w = 0$  とする. 角周波数  $\omega = 0.1$ , 振幅 1 の正弦波外乱  $v$  に対する出力の定常振幅  $\epsilon$  が 0.01 以下となる  $b_0$  の範囲を求めよ.
3. 図 8.44 の制御系において  $r = v = 0$  とする. 角周波数  $\omega = 10$ , 振幅 1 の正弦波観測雑音  $w$  に対する出力の定常振幅  $\epsilon$  が 0.01 以下となる  $b_0$  の範囲を求めよ.

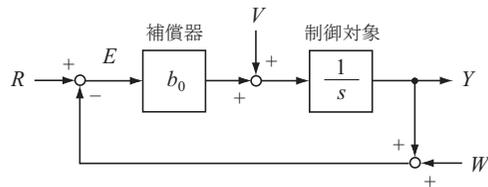


図 8.44: フィードバック制御系

## 8.7 の演習問題の解答

1.

$$(a) \epsilon = |T(j15)| = 0.0226, \quad (b) \epsilon = |T(j15)| = 0.123, \quad (c) \epsilon = |T(j15)| = 0.0102$$

2.  $V$  から  $Y$  までの伝達関数は

$$\frac{Y}{V} = G_p S = \frac{G_p}{1 + G_0} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{b_0}{s}} = \frac{1}{s + b_0}$$

よって

$$\epsilon = \left| \frac{1}{j0.1 + b_0} \right| \leq 0.01$$

$$\frac{1}{\sqrt{b_0^2 + 0.1^2}} \leq 0.01$$

これを解いて

$$b_0 \geq \sqrt{10^4 - 0.1^2} \simeq 100$$

を得る.

3.

$$T = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{\frac{b_0}{s}}{1 + \frac{b_0}{s}} = \frac{b_0}{s + b_0}$$

これから

$$|T(j10)| = \frac{|b_0|}{\sqrt{b_0^2 + 10^2}} \leq 0.01$$

$$\frac{b_0^2}{0.01^2} \leq b_0^2 + 10^2$$

$$(10^4 - 1)b_0^2 \leq 10^2$$

これを解いて

$$b_0 \leq \frac{10}{\sqrt{10^4 - 1}} \simeq 0.1$$

## 第9章 根軌跡法

系の特性方程式の一つのパラメータを変えたとき、特性方程式の根（系の極）がどのように変化するかを定性的にでも把握したいことがある。例えば、制御対象  $G_p(s)$  と補償器  $KC(s)$  のフィードバック制御系で  $K$  を変えたときの制御系の極 ( $1 + KC(s)G_p(s) = 0$  の根) の変化を知りたいという場合である。  $K$  を変えたときの（通常、  $K = 0 \sim \infty$  ）、特性方程式の根の軌跡を根軌跡 (root locus) という。根軌跡法 (root-locus technique) は、比較的低次の系に対して、開ループ伝達関数  $C(s)G_p(s)$  から得られる根軌跡の特徴を利用して根軌跡の概形を描く方法である。計算機が発達した現代においては、計算ツールを用いれば正確な根軌跡を手軽に描くことができるが、開ループ伝達関数を見て根軌跡を定性的に把握できることは、制御系の解析や設計に役立つので、根軌跡法は現在でもその重要性を失っていない。今週は、W. R. Evans (1950 年) によって開発された根軌跡法を説明する。

### 9.1 フィードバック系の根軌跡

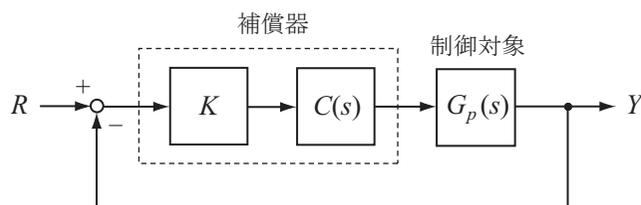


図 9.1: フィードバック系

図 9.1 のフィードバック制御系において、制御対象  $G_p(s)$  と補償器  $C(s)$  は与えられているとする。  $K$  はパラメータである。  $C(s)G_p(s) = G_0(s)$  とおくと、制御系の伝達関数は

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_0(s)}{1 + KG_0(s)}$$

なので、制御系の特性方程式は

$$1 + KG_0(s) = 0 \tag{9.1}$$

となる。

$$G_0(s) = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - q_1) \cdots (s - q_n)}, \quad m \leq n$$

とする。(9.1) 式から

$$G_0(s) = -\frac{1}{K}$$

したがって、特性方程式は次の二つの条件として書くこともできる。

$$\text{ゲイン条件} \quad |G_0(s)| = \frac{1}{|K|}$$

$$\text{位相条件} \quad \begin{cases} \angle G_0(s) = (2k+1)\pi & (K > 0) \\ \angle G_0(s) = 2k\pi & (K < 0) \end{cases}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$K$  を 0 から  $\infty$  まで ( $-\infty$  から 0, または, 両方扱う場合もある) 変えたときの特性方程式の根 (特性根, 制御系の極) の軌跡を根軌跡という。根軌跡法は次の根軌跡の性質を利用して, 根軌跡の概形を描く方法である。

1. 根軌跡は実軸に対して対称である。
2.  $K = 0$  のとき, 根は  $G_0(s)$  の極  $q_1, \dots, q_n$  ( $\times$  で示す) に一致する。
3.  $K \rightarrow \infty$  のとき,  $m$  個の根は  $G_0(s)$  の零点  $z_1, \dots, z_m$  ( $\circ$  で示す) へ収束し, 残りの  $n - m$  個の根は無遠点へ発散する。
4. 無限遠点に発散する根軌跡は, 実軸との角度が

$$\frac{l\pi}{n-m} [\text{rad}], \quad l = 1, 3, 5, \dots$$

の漸近線 (asymptote) を持つ。また,  $n - m \geq 2$  のとき漸近線と実軸は交点 (intersect) を一つ持ち, その座標は

$$\frac{(q_1 + \dots + q_n) - (z_1 + \dots + z_m)}{n - m}$$

で与えられる。

5. 実軸上の点の右側に  $G_0(s)$  の実極と実零点が (重複度を含め) 合計奇数個あれば, その点は, 根軌跡上の点である。
6. 実軌跡の実軸上の分岐点 (breakaway point) (または合流点) は

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{G_0(s)} = 0$$

を満たす。ただし, 逆は成立しない。

これらの性質は次のように示せる。

1. 特性方程式は実係数を持つので, 根は実軸対称となる (複素数の根があれば, その共役な複素数も根となる)。
2. 特性方程式

$$1 + KG_0 = 1 + K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - q_1) \cdots (s - q_n)} = 0 \quad (9.2)$$

から

$$(s - q_1) \cdots (s - q_n) + K(s - z_1) \cdots (s - z_m) = 0$$

上式で  $K = 0$  とおくと

$$(s - q_1) \cdots (s - q_n) = 0$$

を得る。よって、 $q_i$  が根となる。

3. および 4. 特性方程式 (9.2) を  $K$  で割り、 $K \rightarrow \infty$  とすると

$$\frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - q_1) \cdots (s - q_n)} = 0$$

よって、 $z_1, \dots, z_m$  は根となる。

$n > m$  とする。  $|s| \rightarrow \infty$  のとき、特性方程式は次式で近似できる。

$$1 + K \frac{s^m}{s^n} = 0$$

すなわち

$$s^{n-m} = -K$$

よって、 $s^{n-m}$  は負の実軸上にある。  $s$  を極座標表示すれば

$$r^{n-m} e^{j\theta(n-m)} = -K$$

上式の位相条件から

$$\theta(n-m) = \pi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

よって

$$\theta = \frac{\pi + 2\pi k}{n-m} = \frac{l\pi}{n-m}, \quad l = 1, 3, 5, \dots$$

特性方程式の根を  $p_1, \dots, p_n$  とすると性質 3 から、 $m$  個の根 ( $p_1, \dots, p_m$  とする) は  $G_0(s)$  の零点に近づき

$$p_i \rightarrow z_i, \quad i = 1, \dots, m$$

残りの根 ( $p_{m+1}, \dots, p_n$  とする) は無限遠点に発散する。これらの根に対して

$$s_g = \frac{p_{m+1} + \cdots + p_n}{n-m}$$

を定義する。  $s_g$  は  $p_{m+1}, \dots, p_n$  の重心であり、漸近線と実軸との交点となる。また、 $n-m \geq 2$  のとき、特性方程式

$$(s - q_1) \cdots (s - q_n) + K(s - z_1) \cdots (s - z_m) = (s - p_1) \cdots (s - p_n) = 0$$

は

$$s^n - \sum_{i=1}^n q_i s^{n-1} + \cdots = s^n - \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \cdots$$

となる.  $s^{n-1}$  の係数の比較から

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n q_i &= \sum_{i=1}^n p_i = (p_1 + \cdots + p_m) + (p_{m+1} + \cdots + p_n) \\ &= (z_1 + \cdots + z_m) + s_g(n-m)\end{aligned}$$

よって

$$s_g = \frac{(q_1 + \cdots + q_n) - (z_1 + \cdots + z_m)}{n-m}$$

5. 特性方程式 (9.2) から

$$\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-q_1)\cdots(s-q_n)} = -\frac{1}{K}$$

を得る. 上式のゲイン条件と位相条件を満たす  $s$  が根となるが, ゲイン条件は  $K$  を指定して常に満たすことができるので, 位相条件のみを調べればよい. 位相条件は

$$\sum_{i=1}^m \angle(s-z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s-q_i) = (2k+1)\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

これから, 実軸上の  $s$  の右側に  $z_i$  と  $q_i$  が合計で奇数個あれば  $s$  は位相条件を満たす.

6.  $K < \infty$  のとき, 根は  $G_0(s)$  の零点  $z_i$  に一致しないので,  $G_0(s) \neq 0$  である. よって, 特性方程式 (9.2) から

$$\frac{1}{G_0(s)} + K = 0$$

この方程式が重根を持つ条件として

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G_0(s)} \right) = 0$$

を得る. 実軸上の分岐点 (合流点) は重根であるが, 逆は言えないので上式は必要条件である.

### 例題 9.1

$$G_0(s) = \frac{1}{s}$$

に対するフィードバック系 (図 9.2) の根軌跡の概形を描け.

[解]  $G_0$  の零点はなく, 極は 0 である.  $n-m=1$  なので, 根軌跡の漸近線の角度は  $\pi$  である. よって, 図 9.3 を得る.

### 例題 9.2

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

に対するフィードバック系 (図 9.2) の根軌跡の概形を描け.

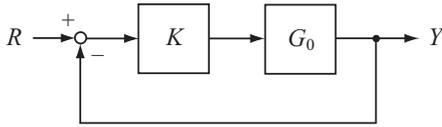


図 9.2: フィードバック系

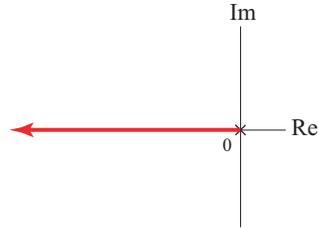


図 9.3: 例題 9.1 の根軌跡

[解]  $G_0$  の零点はなく、極は  $0, -2$  である.  $n - m = 2$  なので、根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

であり、漸近線の実軸との交点は

$$\frac{0 - 2}{2} = -1$$

である. 実軸上の分岐点は

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G_0} \right) = \frac{d}{ds} (s^2 + 2s) = 2s + 2 = 0$$

から  $s = -1$ . よって、図 9.4 を得る.

### 例題 9.3

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

に対するフィードバック系 (図 9.2) の根軌跡の概形を描け. また、根軌跡が虚軸に交わる  $K$  と根軌跡と虚軸との交点を求めよ.

[解]  $G_0$  の零点はなく、極は  $0, -1, -2$  である.  $n - m = 3$  なので、根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

であり、漸近線の実軸との交点は

$$\frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

である. 実軸上の分岐点の必要条件

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G_0} \right) = \frac{d}{ds} (s^3 + 3s^2 + 2s) = 3s^2 + 6s + 2 = 0$$

から

$$s = -1.577, -0.423$$

を得るが、実軸上の根である  $s = -0.423$  が分岐点となる。よって、図 9.5 を得る。一方、特性方程式は

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

から

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

よって、表 9.1 のラウス表から、閉ループ系は  $0 < K < 6$  のとき安定となる。これから、 $K = 6$  のとき根軌跡が虚軸と交わる。虚軸との交点は、 $K = 6$  とした特性方程式  $s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0$  の根

$$-3, \pm j\sqrt{2}$$

から、 $\pm j\sqrt{2}$  となる。

表 9.1: 例題 9.3 のラウス表

$s^3$	1	2	0
$s^2$	3	$K$	0
$s^1$	$\frac{6-K}{3}$	0	
$s^0$	$K$		

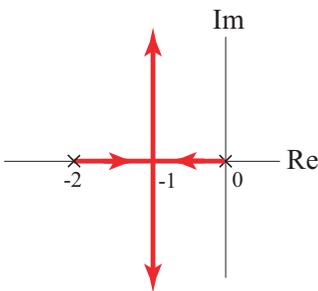


図 9.4: 例題 9.2 の根軌跡

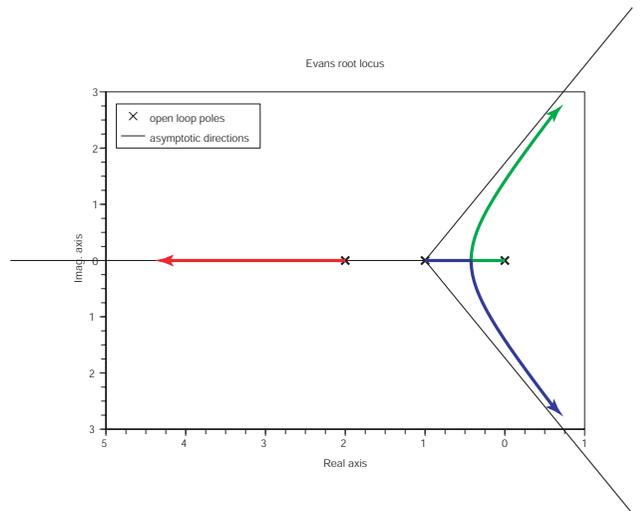


図 9.5: 例題 9.3 の根軌跡

## 例題 9.4

$$G_0(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+5)}$$

に対するフィードバック系（図 9.2）の根軌跡の概形を描け。

[解]  $G_0$  の零点は  $-2$ ，極は  $0, -1, -5$  である． $n - m = 2$  なので，根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

であり，漸近線の実軸との交点は

$$\frac{(0 - 1 - 5) - (-2)}{2} = -2$$

である．実軸上の分岐点の必要条件

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G_0} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{s^3 + 6s^2 + 5s}{s+2} \right) = 0$$

すなわち（微分は分子のみ計算すればよい）

$$(3s^2 + 12s + 5)(s+2) - (s^3 + 6s^2 + 5s) = 2s^3 + 12s^2 + 24s + 10 = 0$$

これを解くと

$$s = -0.558, -2.721 \pm j1.249$$

を得るが，実軸上の根である  $s = -0.558$  が分岐点となる．よって，図 9.6 を得る．

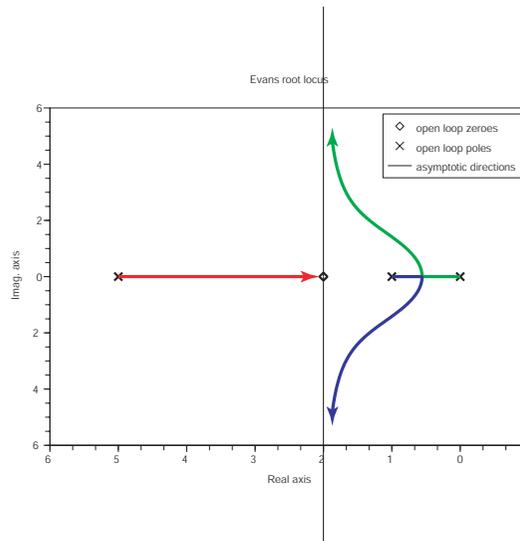


図 9.6: 例題 9.4 の根軌跡

## 9.2 1パラメータを持つ特性方程式の根軌跡

例えば、次式の1パラメータ  $K$  を持つ特性方程式を考えよう。

$$s^3 + 6s^2 + (11 + K)s + 6 = 0$$

$K$  を含む項を別にして次のように整理する。

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) + Ks = 0$$

さらに、両辺を  $(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$  で割ると

$$1 + K \frac{s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = 0 \quad (9.3)$$

よって

$$G_0(s) = \frac{s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

とおけば、(9.3) 式はフィードバック系の特性方程式と同じになるので、 $G_0$  に対して根軌跡法を適用すればよい。

$G_0$  の零点は 0, 極は  $-1, -2, -3$  である。  $n - m = 2$  なので、根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

であり、漸近線の実軸との交点は

$$\frac{(-1 - 2 - 3)}{2} = -3$$

である。実軸上の分岐点の必要条件

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G_0} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{s} \right) = 0$$

すなわち

$$(3s^2 + 12s + 11)s - (s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = 2s^3 + 6s^2 - 6 = 0$$

これを解くと

$$s = -2.532, -1.347, 0.879$$

を得るが、実軸上の根である  $s = -2.532$  が分岐点となる。よって、図 9.7 を得る。

## 9.3 演習問題

1. 図 9.8 のフィードバック系において  $G_0(s)$  が以下のとき、 $K \geq 0$  に対する根軌跡の概形を描け。また、根軌跡が虚軸に交わる  $K$  および根軌跡と虚軸との交点を求めよ。

$$(1) G_0(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad (2) G_0(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

2. 図 9.9 のフィードバック系において、 $K \geq 0$  に対する根軌跡の概形を描け。

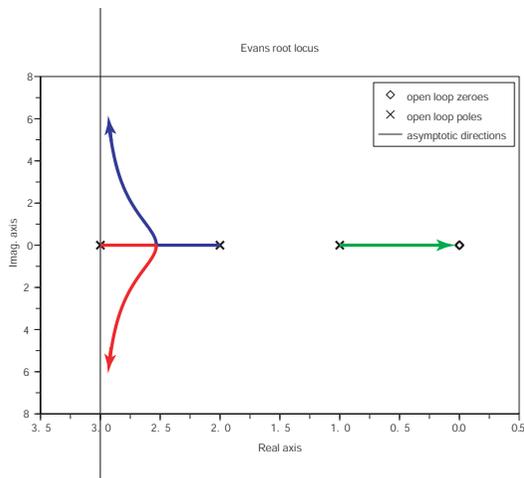


図 9.7: 1 パラメータを持つ特性方程式の根軌跡

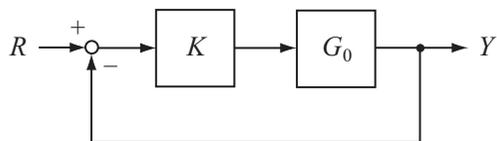


図 9.8: フィードバック系

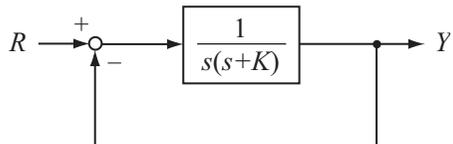


図 9.9: フィードバック系

### 9.3 の演習問題の解答

1. (1)  $G_0$  の零点はなく、極は  $0, -1 \pm j$  である。  $n - m = 3$  なので、根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

であり、漸近線の実軸との交点は

$$\frac{0 - 1 + j - 1 - j}{3} = -\frac{2}{3}$$

である。一方、特性方程式は

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

から

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$$

よって、表 9.2 のラウス表から、閉ループ系は  $0 < K < 4$  のとき安定となる。これから、 $K = 4$  のとき根軌跡が虚軸と交わる。虚軸との交点は、 $K = 4$  とした特性方程式  $s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$  の根

$$-2, \pm j\sqrt{2}$$

から、 $\pm j\sqrt{2}$  となる。根軌跡を図 9.10 に示す（図は数値計算した点をプロットしたもので、通常、連続的な曲線で軌跡を描く）。

- (2)  $G_0$  の零点は  $-1$ 、極は  $0, -2, -1 \pm j$  である。  $n - m = 3$  なので、根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

であり、漸近線の実軸との交点は

$$\frac{(0 - 2 - 1 + j - 1 - j) - (-1)}{3} = -1$$

である。一方、特性方程式は

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+2)} = 0$$

から

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + (4+K)s + K = 0$$

よって、表 9.3 のラウス表から、閉ループ系は  $0 < K < 4\sqrt{5}$  のとき安定となる。これから、 $K = 4\sqrt{5}$  のとき根軌跡が虚軸と交わる。虚軸との交点は、 $K = 4\sqrt{5}$  とした特性方程式  $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + (4 + 4\sqrt{5})s + 4\sqrt{5} = 0$  の根

$$-3, -0.888, \pm j1.799$$

から、 $\pm j1.799$  となる。根軌跡を図 9.11 に示す。

表 9.2: 2.24(2) のラウス表

$s^3$	1	2	0
$s^2$	2	$K$	0
$s^1$	$\frac{4-K}{2}$	0	
$s^0$	$K$		

表 9.3: 2.24(3) のラウス表

$s^4$	1	6	$K$
$s^3$	4	$4+K$	0
$s^2$	$\frac{20-K}{4}$	$K$	0
$s^1$	$\frac{80-K^2}{20-K}$	0	
$s^0$	$K$		

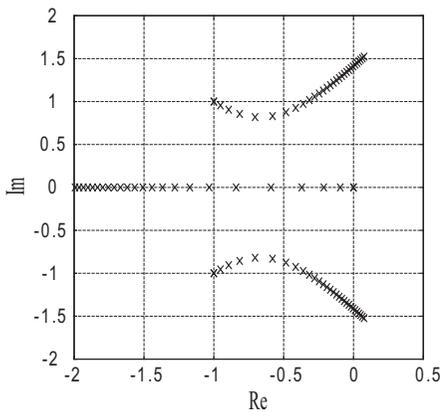


図 9.10: (1) の根軌跡

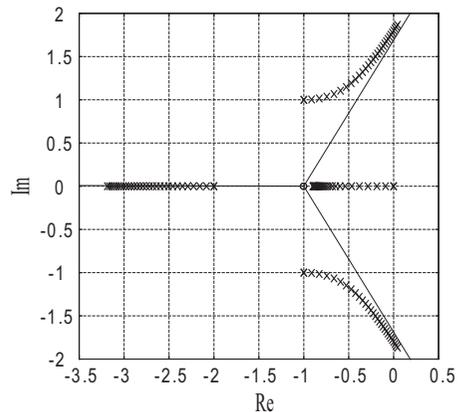


図 9.11: (2) の根軌跡

2. 特性方程式は

$$1 + \frac{1}{s(s+K)} = 0$$

すなわち

$$s^2 + Ks + 1 = (s^2 + 1) + Ks = 0$$

である。この両辺を  $s^2 + 1$  で割ると

$$1 + K \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

よって

$$G_0(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

に対して根軌跡法を適用すればよい。

$G_0$  の零点は 0, 極は  $\pm j$  である。  $n - m = 1$  なので, 根軌跡の漸近線の角度は  $\pi$  である。実軸上の分岐点の必要条件

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{G_0} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{s^2 + 1}{s} \right) = 0$$

すなわち

$$2s \cdot s - (s^2 + 1) = s^2 - 1 = 0$$

これを解くと

$$s = \pm 1$$

を得るが、実軸上の根である  $s = -1$  が分岐点となる。よって、図 9.12 を得る。

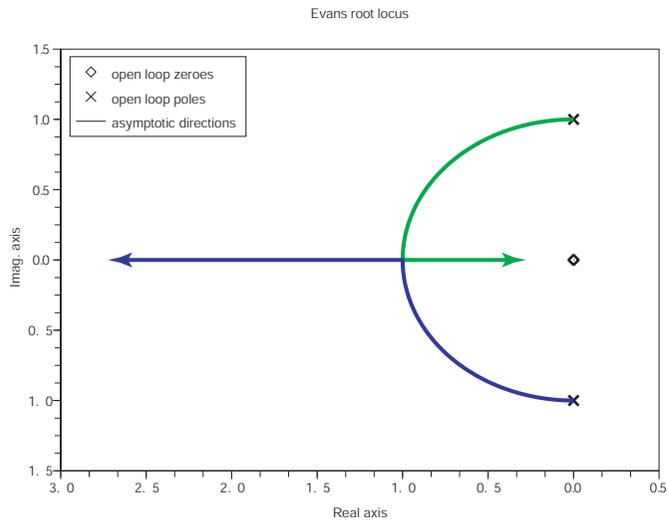


図 9.12: 2. の根軌跡

## 第10章 ループ整形法による設計

8.4 と 8.6 節で開ループ周波数特性と制御系の性能との関係を述べた。これらの関係に基づいて、望ましい開ループ周波数特性を与える補償器を設計する方法をループ整形法 (loop-shaping method) という。今週はループ整形法によるフィードバック制御系の設計法を説明する。すなわち、基本的な補償器であるゲイン補償器 (gain compensator), 位相進み補償器 (lead compensator), 位相遅れ補償器 (lag compensator), 位相進み遅れ補償器 (lag-lead compensator) を取り上げ、これらの特徴とパラメータ調整法を例題と共に説明する。

### 10.1 ゲイン補償器

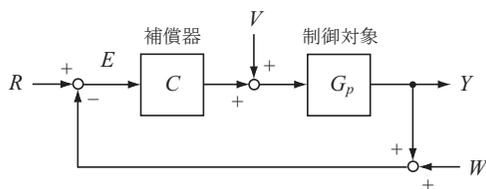


図 10.1: フィードバック制御系

$$C(s) = K, \quad K > 0$$

ゲイン補償器は開ループ伝達関数  $G_0 = CG_p$  のゲインを全周波数で一様に増減する。位相特性には変化を与えない。よって、一般に次の特徴を持つ。

[ゲインを小さくすると]

1. 位相余裕  $\phi_M$  とゲイン余裕  $G_M$  が増し、安定度 (減衰性) が向上する。
2. 高周波域のゲインが小さくなるので、観測雑音遮断特性とロバスト安定性が向上する。
3. ゲイン交差周波数  $\omega_P$  が小さくなるので、速応性が悪くなる。
4. 低周波域のゲインが小さくなるので、目標値追従性と外乱除去特性 (合わせて定常特性と呼ぶ) が悪くなる。

**例題 10.1** 図 10.2 のフィードバック制御系において、 $C(s)$  はゲイン補償器とする。位相余裕が  $\phi_M \geq 50^\circ$  という条件のもとで、速応性と定常特性を改善するためにできるだけ大きなゲインを設計せよ。

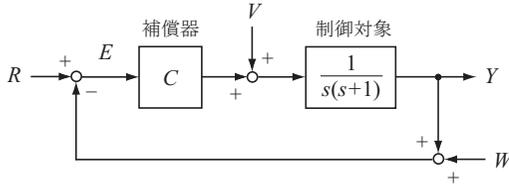


図 10.2: フィードバック制御系

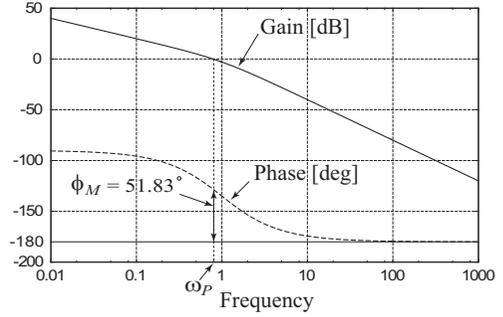


図 10.3: 制御対象  $G_p$  のボード線図

[解]  $G_p$  のボード線図を図 10.3 に示す.  $G_p$  に対して,  $\phi_M = 51.83^\circ$ ,  $\omega_P = 0.786$  であるので, ゲイン補償による改善の余地はほとんどない. 設計の結果, 次を得た.

$$C_1(s) = 1.09, \quad \phi_M = 50.1^\circ, \quad \omega_P = 0.836$$

このときの制御系の極は

$$p_{1,2} = -0.5 \pm j0.917$$

である. また, 制御系の根軌跡とステップ応答をそれぞれ図 10.4, 10.5 に示す.

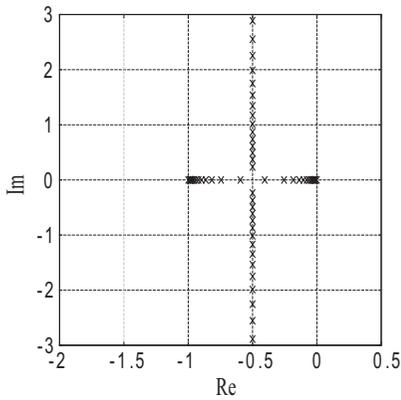


図 10.4: 制御系 (ゲイン補償) の根軌跡

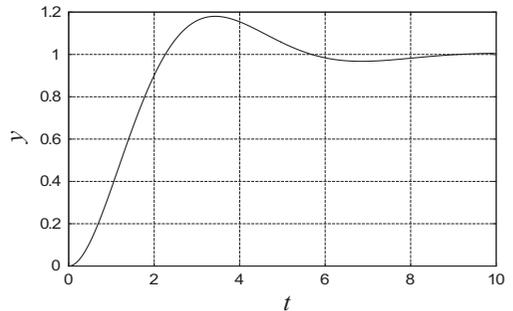


図 10.5: 制御系 (ゲイン補償) のステップ応答

## 10.2 位相進み補償器

$$C(s) = \frac{T_1 s + 1}{\alpha_1 T_1 s + 1}, \quad 0 < \alpha_1 < 1$$

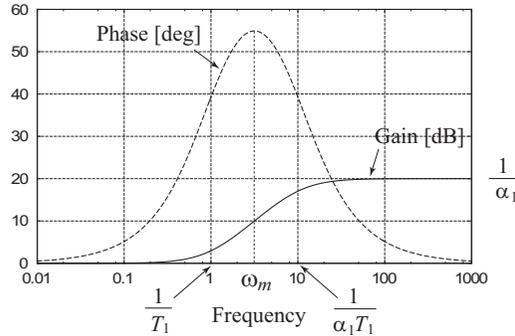


図 10.6: 位相進み補償器 ( $\alpha_1 = 0.1, T_1 = 1$  の場合)

位相進み補償器 ( $\alpha_1 = 0.1, T_1 = 1$  の場合) のボード線図を図 10.6 に示す。

位相進み補償器は次の特徴を持つ。

1. 特に

$$\frac{0.1}{T_1} < \omega < \frac{10}{\alpha_1 T_1}$$

の帯域で位相進み特性を持つ ( $90^\circ$  未満)。位相余裕を大きくできるので、ゲイン交差周波数も大きく設定できる。したがって、制御系の安定度と速応性を改善するために使用される。

2.  $\omega > 1/T_1$  でゲインが大きくなるので、観測雑音遮断特性とロバスト安定性が悪くなる。

最大位相進み量  $\phi_m$  を与える  $\omega$  は

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 T_1}} \quad (10.1)$$

であり、このときのゲインは

$$|C(j\omega_m)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$$

となる。  $\phi_m$  は

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1} \quad (10.2)$$

から計算できる。また、上式から

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} \quad (10.3)$$

がわかる。

**例題 10.2** 図 10.2 のフィードバック制御系において、 $C(s)$  はゲイン・位相進み補償器とする。位相余裕が  $\phi_M \geq 50^\circ$  という条件のもとで、 $\omega_P \geq 3$  を満たす補償器を設計せよ。

[解] ゲイン補償器で  $\omega_P > 3$  という条件から  $K$  を決めると

$$K = 10, \phi_M = 17.96^\circ, \omega_P = 3.08$$

を得る。  $\phi_M = 50^\circ$  とするために指定すべき位相進み量は  $50 - 17.96 = 32.04^\circ$  となる。 よって、  $\phi_m = 32.04^\circ$ 。 (10.3) 式から、  $\alpha_1 = 0.307$  となり、 (10.1) から、  $\omega_m = \omega_P$  として、  $T_1 = 0.585$  を得る。 また、 位相進み補償で  $\omega_m$  におけるゲインが  $1/\sqrt{\alpha_1}$  上がることを考慮して補償器に  $\sqrt{\alpha_1}$  を掛けておく。 以上から、 補償器が

$$C_2(s) = \sqrt{\alpha_1} K \frac{T_1 s + 1}{\alpha_1 T_1 s + 1} = 5.539 \frac{0.585s + 1}{0.180s + 1}$$

と設計され、 この結果

$$\phi_M = 50.0^\circ, \omega_P = 3.08$$

となる。  $C_2 G_p$  のボード線図を図 10.7 に示す。  $C_2 G_p$  の極は  $0, -1, -5.569$ 、 零点は  $-1.708$  である。 制御系の極は

$$p_1 = -2.202, p_{2,3} = -2.184 \pm j3.040$$

である。 制御系の根軌跡とステップ応答をそれぞれ図 10.8, 10.9 に示す。

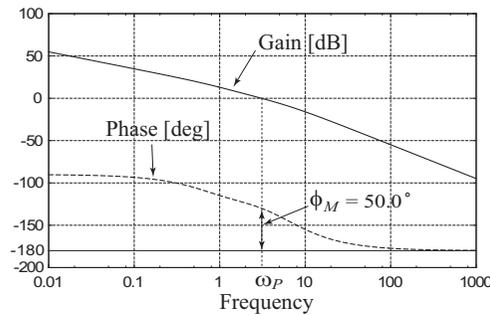


図 10.7:  $C_2 G_p$  のボード線図

### 10.3 位相遅れ補償器

$$C(s) = \frac{\alpha_2(T_2 s + 1)}{\alpha_2 T_2 s + 1}, \alpha_2 > 1$$

位相遅れ補償器 ( $\alpha_2 = 10, T_2 = 1$  の場合) のボード線図を図 10.10 に示す。

位相遅れ補償器は次の特徴を持つ。

1. 低周波域 ( $\omega < 1/(\alpha_2 T_2)$ ) のゲインを約  $\alpha_2$  倍することができるので、定常特性を改善するために用いられる。

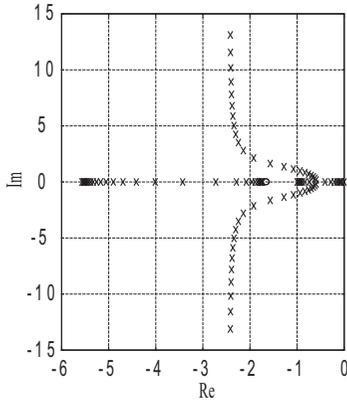


図 10.8: 制御系 (ゲイン・位相進み補償) の根軌跡

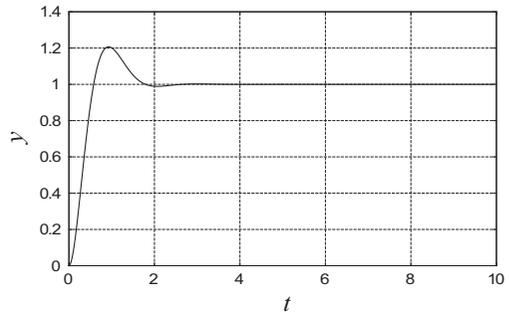


図 10.9: 制御系 (ゲイン・位相進み補償) のステップ応答

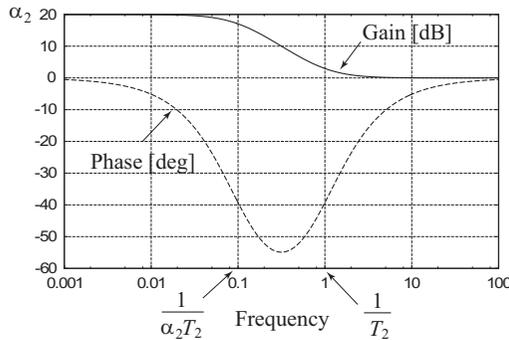


図 10.10: 位相遅れ補償器 ( $\alpha_2 = 10, T_2 = 1$  の場合)

2. 特に

$$\frac{0.1}{\alpha_2 T_2} < \omega < \frac{10}{T_2}$$

の帯域で位相遅れ特性を持つ ( $90^\circ$  未満). これは位相余裕を小さくするので, 制御系の安定度を悪くする.

**例題 10.3** 図 10.2 のフィードバック制御系において,  $C(s)$  はゲイン・位相進み遅れ補償器 (位相進み・位相遅れ補償器) とする. 位相余裕が  $\phi_M \geq 50^\circ$  という条件のもとで,  $\omega_P \geq 3$  を満たし, さらに, 単位ステップ外乱に対する定常偏差を 0.01 にする補償器を設計せよ.

[解] 外乱除去特性に関係する伝達関数は  $-G_p S$  である. 本制御対象の場合,  $\omega \ll 1$  の低周波域で,  $|G_p| \gg 1$  なので

$$|G_p S| = \left| \frac{G_p}{1 + C G_p} \right| = \frac{1}{\left| \frac{1}{G_p} + C \right|} \simeq \frac{1}{|C|}$$

に注意する. 例題 10.2 の補償器  $C_2$  を基に, ゲイン・位相進み遅れ補償器 ( $C_3$  で表す) の  $\omega = 0$  におけるゲインが  $|C_3(j0)| = 100$  となるように設計する. まず,  $C_2$  で設定したゲイン

が  $\sqrt{\alpha_1 K}$  なので,  $\alpha_2$  を

$$\alpha_2 = \frac{100}{\sqrt{\alpha_1 K}}$$

と与える.  $T_2$  は位相遅れ補償器の零点  $-1/T_2$  がゲイン・位相進み補償器による制御系の極の最大実部 (速応性を表す)  $-2.184$  に比べてあまり大きくならないように,  $T_2 = 1$  とする. いま設計した位相遅れ補償器の  $\omega = 3$  での位相が  $-17.74^\circ$  であることを考慮して, 位相進み補償器の位相進み量を  $32.04 + 17.74 = 49.78^\circ$  とする. 以上から, 補償器が

$$C_3(s) = C_2(s) \frac{27.31(s+1)}{27.31s+1} = \frac{88.55s^2 + 188.55s + 100}{3.24s^2 + 27.43s + 1}$$

と設計され, この結果

$$\phi_M = 50.4^\circ, \quad \omega_P = 3.21$$

となる.  $\omega_P$  を約 3 に調整するため,  $K = 9$  とし上述の設計を行うと, 結局

$$C_3(s) = \frac{93.77s^2 + 193.77s + 100}{3.81s^2 + 30.53s + 1}$$

$$\phi_M = 50.4^\circ, \quad \omega_P = 3.05$$

を得る.  $C_3G_p$  のボード線図を図 10.11 に示す.  $C_3G_p$  の極は  $0, -1, -7.983, -0.0329$ , 零点は  $-1, -1.067$  である. 制御系の極は

$$p_1 = -2.120, \quad p_{2,3} = -2.948 \pm j1.922$$

である. 制御系の根軌跡とステップ応答をそれぞれ図 10.12, 10.13 に示す. 比較のため, 図 10.13 にはゲイン補償とゲイン・位相進み補償による制御系のステップ応答も示している. また,  $r = w = 0$  とし, 外乱  $v$  に単位ステップ関数  $\mathbf{1}(t)$  を与えたときの  $y$  の応答を図 10.14 に示す.

ゲイン補償, ゲイン・位相進み補償, ゲイン・位相進み遅れ補償の場合の開ループ伝達関数  $C_1G_p, C_2G_p, C_3G_p$  のゲイン特性を図 10.15 に示す. また, 各制御系に対する単位ステップ外乱に対する定常偏差を表 10.1 に示す.

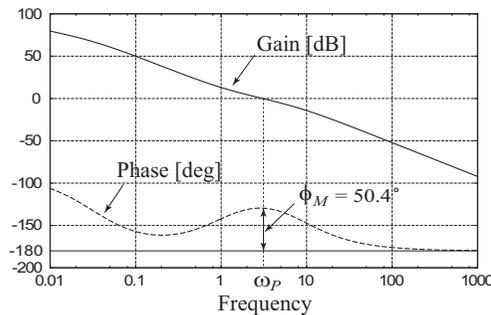


図 10.11:  $C_3G_p$  のボード線図

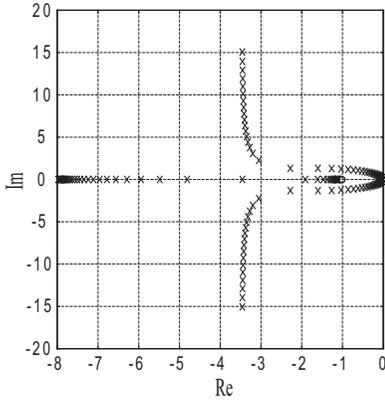


図 10.12: 制御系（ゲイン・位相  
進み遅れ補償器）の根軌跡

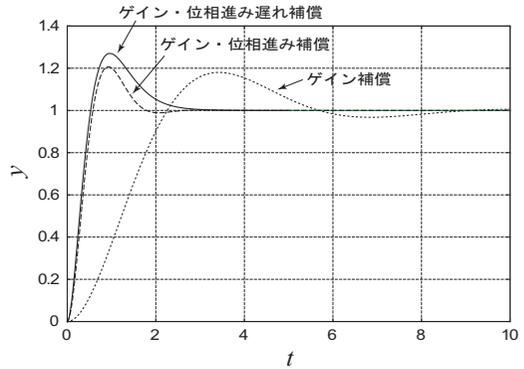


図 10.13: 制御系のステップ応答

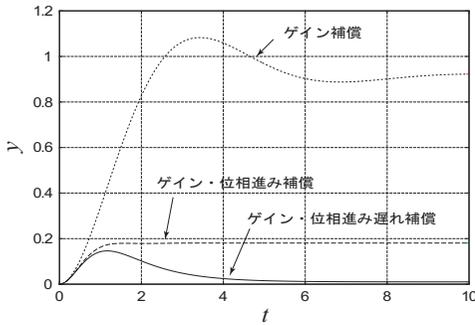


図 10.14: 単位ステップ外乱に対  
する制御系の応答

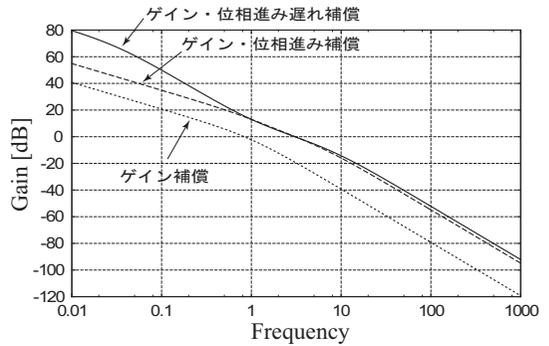


図 10.15: 開ループ伝達関数のゲイン特性

## 10.4 ループ整形法による設計例（台車系）

上記で述べたループ整形法を用いて、台車系の搬送制御を行う制御系を設計し、実験装置を用いた制御実験を行った結果を紹介する。

### 10.4.1 ゲイン補償器

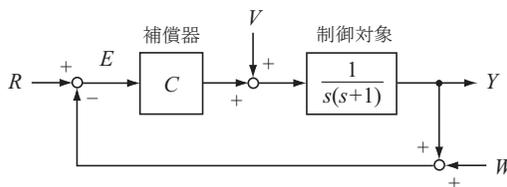


図 10.16: フィードバック制御系

表 10.1: 単位ステップ外乱に対する定常偏差

補償器	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$ G_p(j0)S(j0) $	0.917	0.181	0.01

台車駆動系の入力（モータードライバへの入力電圧）を  $u(t)$ ，出力（台車の変位）を  $y(t)$  とする。台車系の伝達関数は次式である。

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)} \quad (10.4)$$

ゲイン補償器を

$$C(s) = K = 1 \quad (10.5)$$

と与えた場合，位相余裕  $\phi_M = 51.8^\circ$ ，ゲイン交差周波数  $\omega_P = 0.788 \text{ rad/s}$  であった。

#### 10.4.2 ゲイン位相進み補償器

速応性を改善するため ( $\omega_P$  を大きくするため)，ゲイン補償器で

$$K = 2 \quad (10.6)$$

として， $\omega_P = 1.25 \text{ [rad/s]}$ ， $\phi_M = 38.7^\circ$  を得た。この  $\omega_P$  を変えずに，位相余裕が  $\phi_M = 50^\circ$  となるように位相進み補償器を設計し，次式を得た。

$$C(s) = K_1 \frac{T_1 s + 1}{\alpha_1 T_1 s + 1}, \quad K_1 = 1.64, \alpha_1 = 0.672, T_1 = 0.977 \quad (10.7)$$

#### 10.4.3 ゲイン位相進み遅れ補償器

さらに，外乱や目標値に対する定常特性を改善するため，低周波数域の開ループ伝達関数のゲインを大きくできる位相遅れ補償器を追加し， $\omega = 0$  でのゲインを 50 倍にした。 $T_2$  は，位相遅れが大きくなる周波数帯を考慮し， $\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_P}{5}$  から決定した。ただし， $\omega_P = 1.25 \text{ rad/s}$ ， $\phi_M = 50^\circ$  を保持するように，ゲイン位相進み補償器を修正した。この結果，次式を得た。

$$C(s) = K_2 \frac{T_1 s + 1}{\alpha_1 T_1 s + 1} \frac{\alpha_2 (T_2 s + 1)}{\alpha_2 T_2 s + 1}$$

$$K_2 = 1.32, \alpha_1 = 0.450, T_1 = 1.19, \alpha_2 = 30.5, T_2 = 4.00 \quad (10.8)$$

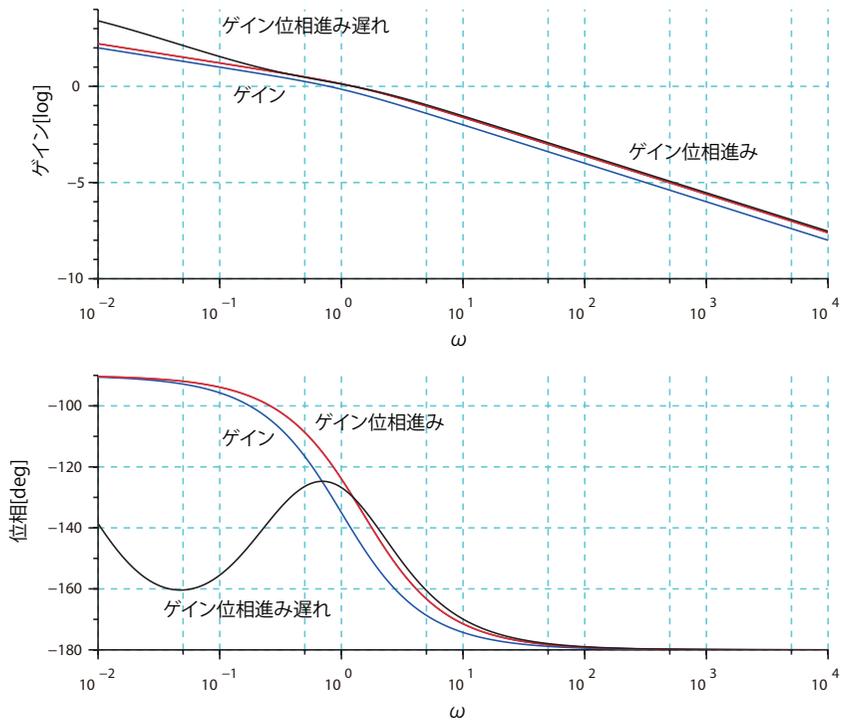


図 10.17:  $C(s)G_p(s)$  のボード線図

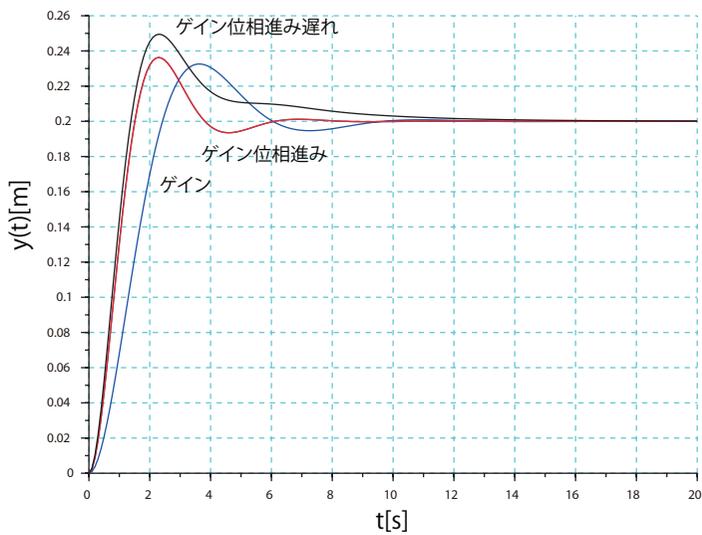


図 10.18: 制御系のステップ応答 ( $y(t)$ ) (シミュレーション)

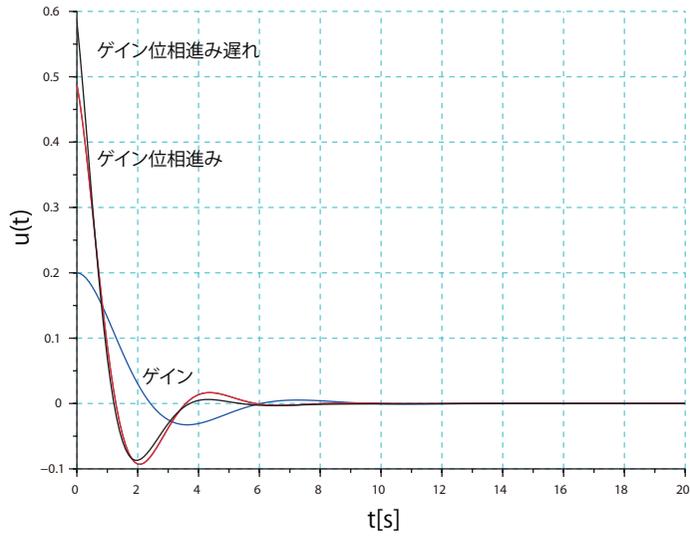


図 10.19: 制御系のステップ応答 ( $u(t)$ ) (シミュレーション)

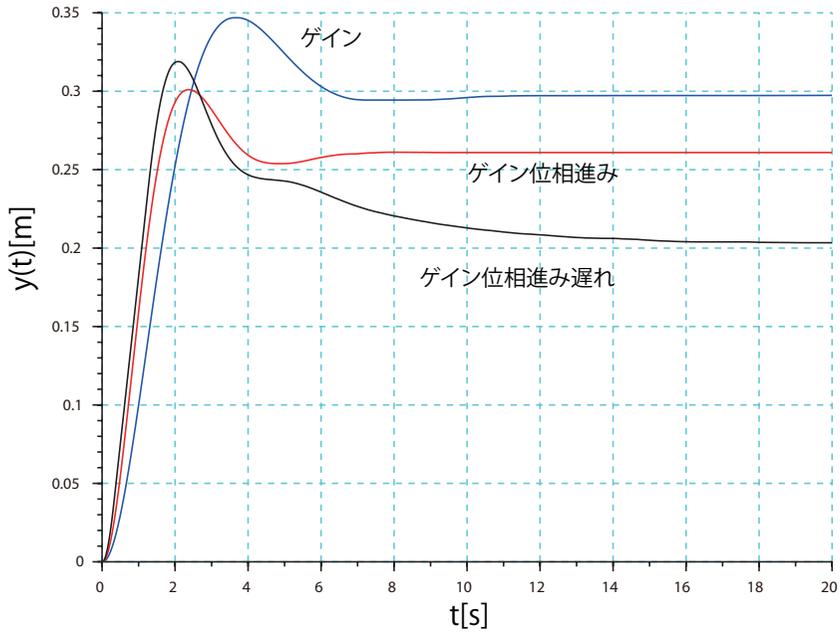


図 10.20: 制御系のステップ応答 ( $y(t)$  外乱  $v(t) = 0.1 \text{ m/s}$  を与えた場合) (実験)

## 10.5 演習問題

1. ゲイン補償器の特徴を述べよ.
2. 位相進み補償器の特徴を述べよ.
3. 位相遅れ補償器の特徴を述べよ.
4. 位相進み補償器

$$C(s) = \frac{T_1 s + 1}{\alpha_1 T_1 + 1}$$

のボード線図（折れ線近似）を描け。ただし， $\alpha_1 = 0.01$ ,  $T_1 = 10$  とする。

5. 位相遅れ補償器

$$C(s) = \frac{\alpha_2(T_2 s + 1)}{\alpha_2 T_2 s + 1}$$

のボード線図（折れ線近似）を描け。ただし， $\alpha_2 = 100$ ,  $T_2 = 1$  とする。



## 関連図書

- [1] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices, Vol.II*, Chelsea Publishing Company, 1965.
- [2] 相良 節夫, 基礎自動制御, 森北出版, 1978.
- [3] 中野 道雄, 美多 勉, 制御基礎理論-古典から現代まで-, 昭晃堂, 1982.
- [4] 片山 徹, フィードバック制御の基礎, 朝倉書店, 1987.
- [5] 大須賀 公一, 制御工学, 共立出版, 1995.
- [6] 杉江 俊治, 藤田 政之, フィードバック制御入門, コロナ社, 1999.
- [7] 奥山 佳史ほか, 制御工学-古典から現代まで-, 朝倉書店, 2001.
- [8] K. Ogata, *Modern Control Engineering, Fourth Edition*, Prentice-Hall, Inc., 2002.
- [9] 吉田 和信, Matlab/Octave による制御系の設計, 科学技術出版, 2003.
- [10] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design, Second Edition*, John Wiley & Sons, Ltd., 2005.
- [11] 吉田 和信, システムと制御入門, 2009,  
[http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/syscon\(2009\)\\_rev.pdf](http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/kyoshida/syscon(2009)_rev.pdf)

# 制御工学I講義ノート

---

2020年8月10日

Copyrights © 2022 吉田 和信

---

著者 吉田 和信